Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri Ramírez y Emilio Fernández Moral

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Madre de Dios 53, 26006, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 28 de febrero de 2021.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 393. *Propuesto por Dorin Marghidanu, "A. I. Cuza" National College, Corabia, Rumanía.*

Si $x_1, \ldots, x_n$ son números reales, probar que

$$x_1\sqrt{1+x_1^2} + x_2\sqrt{2+x_2^2} + \cdots + x_n\sqrt{n+x_n^2} < x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + \frac{n(n+1)}{4}.$$

Problema 394. *Propuesto por Seán M. Stewart, Bomaderry, NSW, Australia.*

Evaluar la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} H_{n/2},$$

donde

$$H_x = \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}\, dt$$

es la extensión de los números armónicos para $x \in \mathbb{R}$, con $x > -1$.

PROBLEMA 395. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.*

Las longitudes de los lados de un cuadrilátero cíclico $ABCD$ son números enteros distintos. El ángulo en el vértice A es agudo y mayor de $70°$, y la longitud de la diagonal AC es 2020. Encontrar un valor posible para la longitud de la diagonal BD y para el ángulo agudo entre ambas diagonales.

PROBLEMA 396. *Propuesto por Daniel Sitaru, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Sean $x, y, z, t \in (0, 1)$ tales que $3\sqrt{3}(xyz + yzt + ztx + txy) = 4$. Probar que

$$\frac{yzt}{x(1-x^2)} + \frac{ztx}{y(1-y^2)} + \frac{txy}{z(1-z^2)} + \frac{xyz}{t(1-t^2)} \geq 2.$$

PROBLEMA 397. *Propuesto por D. M. Bătineţu-Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucarest, y Neculai Stanciu, "George Emil Palade" School, Buzău, Rumanía.*

Sean a, b y c, respectivamente, las longitudes de los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC de área F y sean m_a, m_b y m_c, respectivamente, las longitudes de las medianas desde los vértices A, B y C. Probar que

$$6F \leq am_a + bm_b + cm_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

PROBLEMA 398. *Propuesto por Larry Glasser, Clarkson University, Potsdam, Nueva York, EE. UU.*

Evaluar la integral

$$\int_0^{\pi} \frac{(\arctan(\cot\phi \operatorname{sen}\theta))^2}{1+\cos\theta}\, d\theta, \qquad 0 \leq \phi < \pi/2.$$

PROBLEMA 399. *Propuesto por Leonard Giugiuc, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales no negativos, con $n \geq 4$, tales que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n$. Determinar los valores positivos de α para los que se cumple la desigualdad

$$n^2(n-2) + n(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\alpha} \geq 2(n-1) \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j.$$

Problema 400. *Propuesto por Daniel Cao Labora, Universidad de Vigo, Pontevedra.*

Sea d un número entero positivo cualquiera tal que $d+1$ es primo, y sea n un número natural. Probar que la suma

$$S_{n,d} := \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{1+j\cdot d}$$

es un número entero si y solo si $n = 0$.

Soluciones

Nota. Debido a un error involuntario, las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ de la solución al Problema 364, publicada en el número anterior, son incorrectas. La forma exacta de tales funciones debería ser

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n-1} \frac{(2n)!}{2^{4n-2}n!^2}, \qquad g(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n} \frac{(2n)!}{2^{4n-2}n!^2}$$

y

$$h(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{4n-2}n!^2}.$$

Problema 369⋆. *Propuesto por Joaquín Hernández Gómez.*

Nonino y Quino juegan a pillar. Quino está montado en una barca (la vamos a considerar puntual, igual que a él) en el centro exacto de un estanque circular. Nonino, a quien consideraremos también puntual, puede correr por el borde del estanque a una velocidad cuatro veces mayor que Quino remando. ¿Qué ruta debe seguir Quino para salvarse? (Se supone que Quino se salva si llega a algún punto del borde antes que Nonino.)

Solución enviada por Alberto Espuny Díaz, University of Birmingham, Birmingham, Reino Unido.

Supongamos que el estanque tiene radio 1 (en caso contrario, todas las distancias dadas en esta solución se deberán escalar con el radio). Quino comienza a desplazarse radialmente, y lo hace hasta recorrer una distancia a, para una constante $a \in (1-\pi/4, 1/4)$ (la dirección de desplazamiento puede ser independiente de la posición de Nonino). Llegados a este punto, Quino comienza a desplazarse trazando una circunferencia alrededor del centro del lago, en el sentido que hace que el menor de los ángulos entre Nonino, el centro del estanque y Quino aumente. Dado que $a < 1/4$, la velocidad angular de Quino es mayor que la de Nonino. Por lo tanto, habrá algún momento en que Quino conseguirá posicionarse de modo que la recta trazada entre

Quino y Nonino contenga el centro del estanque. Llegados a este punto, Quino se dirige en línea recta, radialmente, hacia la orilla (por el segmento más corto). El tiempo que Quino empleará en llegar a la orilla sera $1 - a$ y el de Nonino para llegar a ese mismo punto de la orilla, teniendo en cuenta que estaba en el punto diametralmente opuesto, será $\pi/4$, por lo que, como $1 - a < \pi/4$, Quino podrá salir del estanque sin que Nonino le pille.

También resuelto por R. de la Cruz y A. Stadler.

NOTA. Como observa J. Nadal en un comentario que nos ha remitido, este problema es bien conocido. De hecho se trata de una propuesta de Martin Gardner en su popular columna *Mathematical Games* de la revista *Scientific American*, aparecida en noviembre de 1965, y cuya solución se publicó en el número del mes siguiente. Presentamos a continuación el enunciado propuesto entonces:

> A young lady was vacationing on Circle Lake, a large artificial body of water named for its precisely circular shape. To escape from a man who was pursuing her, she got into a rowboat and rowed to the center of the lake, where a raft was anchored. The man decided to wait it out on shore. He knew she should have to come ashore eventually; since he could run four times faster than she could row, he assumed that it would be a simple matter to catch her as soon as her boat touched the lake's edge. But the girl —a mathematics major at Radcliffe— gave some thought to her predicament. She knew that on foot she could outrun the man [which does raise the question of why such a smart lady got herself into this situation in the first place by rowing out into a lake!]; it was only necessary to devise a rowing strategy that would get her to a point on shore before *he* could get there. She soon hit on a simple plan, and her applied mathematics applied successfully. What was the girl's strategy?

Resulta evidente que nuestra propuesta es equivalente a la de Martin Gardner. Este enunciado y la solución del mismo, en su versión en castellano, pueden verse en el libro de Martin Gardner, *Carnaval matemático*, Alianza Ed., Madrid, 1980. Un estudio detallado de este problema y de alguna de sus posibles generalizaciones pueden verse en el capítulo cuatro del libro de Paul J. Nahin, *Chases and escapes: the mathematics of pursuit and evasion*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 2000.

Sin embargo debemos señalar que la estrategia de evasión que hemos presentado, muy similar a las restantes recibidas, es ligeramente diferente de las propuestas por Gardner y por Nahin. La segunda etapa de la estrategia es común en ellas y en la que hemos seleccionado, pero hay una diferencia destacable en la primera etapa. Ellos proponen que Quino, en nuestro caso, comience a remar desde el centro del lago trazando una semicircunferencia de radio $r/8$, donde r es el radio del lago, de tal forma que la posición de Quino, el centro del lago y la de Nonino siempre estén alineadas. Este hecho es posible porque la velocidad angular de Quino es mayor que la de Nonino. Una vez trazada la semicircunferencia, Nonino debería dirigirse hacia la orilla como en la estrategia planteada y el resultado sería, esencialmente, el mismo.

Problema 370⋆. *Propuesto por Joaquín Hernández Gómez.*

¿Cuántas tangente-normales puede haber en la gráfica de un polinomio de grado n, con $n > 2$? (Una *tangente-normal* es una recta tangente a la gráfica en un punto y normal en otro.)

Solución parcial enviada por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.

Suponemos de entrada que el polinomio tiene la forma explícita $y = P(x)$, donde $P(x)$ es un polinomio en x de grado $n > 2$. La recta tangente a la gráfica en $x = a$ tiene la ecuación $y = P(a) + P'(a)(x - a)$. Si incide también en el punto $(b, P(b))$ tendremos

$$P(b) - P(a) = P'(a)(b - a) \tag{1}$$

y, si incide en ese punto normalmente, es claro que

$$P'(a)P'(b) = -1. \tag{2}$$

Dado $P(x)$, el número de rectas tangente-normales será el número de soluciones (a, b) del sistema de ecuaciones que forman (1) y (2).

La ecuación (2) implica que los signos de la derivada en los puntos $x = a$ y $x = b$ deben ser distintos, de donde se deduce que las funciones monótonas, como $y = x^3$, no tienen rectas tangente-normales. Tampoco tienen tangente-normales las funciones polinómicas con un solo extremo relativo, como $y = x^4$, pues por convexidad las tangentes a la curva no vuelven a incidir en ella.

Si $P(x)$ es una función par/impar, entonces $P'(x)$ es impar/par, y es sencillo ver que si (a, b) es una solución del sistema (1) y (2), entonces $(-a, -b)$ es otra solución distinta, y por consiguiente en esos casos el número de rectas tangente-normales será par.

Veamos un ejemplo para $n = 3$. Sea $P(x) = x^3 - px$, luego $P'(x) = 3x^2 - p$. La ecuación (1) en este caso se puede factorizar como $(b - a)^2(b + 2a) = 0$, resultando (puesto que $b \neq a$) como única posibilidad $b = -2a$. Sustituyendo, la ecuación (2) queda $(3a^2 - p)(12a^2 - p) = -1$, que resulta ser bicuadrada y que, cuando $p > \frac{4}{3}$, tiene cuatro soluciones reales distintas. Eso da cuatro soluciones para el sistema, y por consiguiente cuatro rectas tangente-normales para la gráfica del polinomio $y = x^3 - px$, en ese caso. Particularizando con $p = 2$, estas rectas son $y \pm 1.084 = -0.191(x \mp 0.777)$, $y \mp 0.849 = -1.309(x \mp 0.480)$.

Un polinomio cualquiera de tercer grado con dos extremos relativos puede transformarse mediante un cambio lineal de variables (una traslación del punto de inflexión al origen y una homotecia para que el coeficiente director sea 1) en uno del tipo $P(x) = x^3 - px$. Por tanto, cuando se tenga $p > \frac{4}{3}$ la gráfica del polinomio de partida tendrá cuatro rectas tangente-normales.

Solución parcial por los editores.

Partimos también del polinomio en la forma $y = P(x)$. La recta $y = P(a) + P'(a)(x - a)$, tangente a la gráfica en $x = a$, corta de nuevo a la gráfica en otros

$n-2$ puntos (reales o no, repetidos o no), cuyas abscisas, como se ve fácilmente, son las soluciones de la ecuación polinómica, en la variable x, $Q(x,a)=0$ donde

$$Q(x,a)=\sum_{k=2}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k-2}.$$

La ecuación $Q(x,a)=0$ podría tener hasta $n-2$ soluciones reales distintas $b_1(a)$, $b_2(a)$, $\ldots$, $b_{n-2}(a)$, pero estas expresiones dejan de poder ser explícitas en general si $n\geq 7$, según el resultado clásico de Abel. La recta tangente en $x=a$ será normal a la curva en $x=b_j(a)$, con $j=1,\ldots,n-2$, si se verifica

$$P'(a)\cdot P'(b_j(a))=-1. \tag{3}$$

Para $n=3$ la expresión para $b_1(a)$ es un polinomio de primer grado en a, de manera que, en ese caso, (3) es una ecuación polinómica de grado cuatro en a que puede tener, como se ha visto en la solución parcial anterior, hasta cuatro soluciones reales distintas. El problema, algebraicamente, consiste en saber cuántas soluciones reales puede tener en general la ecuación (3) en a, ya que incluso para $4\leq n\leq 6$ las expresiones $P'(b_j(a))$, que en esos casos aún se pueden llegar a obtener explícitamente, dejan de ser polinómicas en la variable a.

Ilustraremos por nuestra parte el caso $n=4$ también con un ejemplo particular, ya que no hemos sido capaces de obtener un resultado general. Sea $P(x)=x^4-2px^2$ (con $p>0$). Se tiene $Q(x,a)=x^2+2ax+3a^2-2p$, polinomio cuyas raíces son $b_{1,2}(a)=-a\pm\sqrt{2}\sqrt{p-a^2}$, reales y distintas si $|a|<\sqrt{p}$. Para $p=4$, por ejemplo, las ecuaciones (3) para $j=1,2$ quedan

$$\mp 16\sqrt{2}a(4-a^2)^{\frac{5}{2}}\mp 32\sqrt{2}a^3(4-a^2)^{\frac{3}{2}}+80a^6-640a^4+1280a^2+1=0,$$

cada una con 4 soluciones reales distintas en el intervalo $(-2,2)$, opuestas las de una ecuación a las de la otra. Esto da ocho rectas tangente-normales para la gráfica correspondiente.

Esto parece sugerir una posible cota superior de $2(n-1)(n-2)$ para el número de rectas tangente-normales a una gráfica polinómica de grado n.

Se ha recibido una solución incorrecta.

NOTA. Cuando propusimos este problema, sugerido por un manuscrito original de Joaquín proporcionado por A. Juano, no conocíamos el origen del enunciado, acaso era fruto de su propio ingenio. Sin embargo, al final hemos sabido que se trataba del *elementary problem* E2886, propuesto por C. O. Oakley, en la revista *The American Mathematical Monthly* **88** (1981), pág. 349. Y podemos añadir que el problema aún se daba por *unsolved* en junio de 1991 (véase el libro S. Rabinowitz (ed.), *Index to Mathematical Problems 1980–1984*, MathPro Press, USA, 1992.)

Problema 371. *Propuesto por Manuel Bello Hernández, Universidad de La Rioja, Logroño.*

Sea n un número natural. Probar que todas las raíces del polinomio

$$G_n(z) = \int_z^1 (1-x^2)^n \, dx$$

distintas de $z = 1$ están en el semiplano $\operatorname{Re} z < 0$.

Solución enviada por Alberto Stadler, Herrliberg, Suiza.

Vamos a proceder a localizar los ceros distintos de $z \neq 1$ de $G_n(z)$ de un manera más precisa. De hecho probaremos que todos ellos se encuentran en el disco $|z+1| \leq 1$. Para ello utilizaremos el denominado teorema de Eneström-Kakeya:

Teorema. *Sea $p(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ un polinomio de grado n verificando que $0 \leq a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n$. Entonces todos los ceros de $p(z)$ están en el disco $|z| \leq 1$.*

Al final daremos una prueba de este poco conocido teorema. Veamos ahora cómo utilizarlo para probar nuestro resultado sobre los ceros de $G_n(z)$. Utilizando el cambio de variable $x = 1-(1-z)t$, tenemos

$$G_n(z) = (1-z)^{n+1} \int_0^1 t^n (2-t+zt)^n \, dt = (1-z)^{n+1} \int_0^1 t^n (2(1-t)+t(z+1))^n \, dt.$$

Usando el binomio de Newton, deducimos que

$$\begin{aligned} G_n(z) &= (1-z)^{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} (z+1)^k \int_0^1 t^{n+k} (1-t)^{n-k} \, dt \\ &= (1-z)^{n+1} \sum_{k=1}^n a_k (z+1)^k, \end{aligned}$$

con

$$a_k = \binom{n}{k} 2^{n-k} (z+1)^k \int_0^1 t^{n+k} (1-t)^{n-k} \, dt = \frac{n!}{(2n+1)!} \frac{2^{n-k}(n+k)!}{k!}.$$

Como, para $0 \leq k \leq n-1$,

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{n+k+1}{2(k+1)} \geq 1,$$

por el teorema de Eneström-Kakeya deducimos que todos los ceros del polinomio $\sum_{k=1}^n a_k (z+1)^k$ están en el disco $|z+1| \leq 1$ y hemos concluido.

Completemos la solución dando una prueba del teorema de Eneström-Kakeya:

DEMOSTRACIÓN. Tomamos la función

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n} (a_j - a_{j-1}) z^j,$$

con $a_{-1} = 0$. Resulta sencillo comprobar que se satisface la relación

$$p(z)(1-z) = f(z) - a_n z^{n+1}. \tag{1}$$

Para $|z| = 1$, usando la monotonía de los coeficientes, tenemos

$$|f(z)| \leq \sum_{j=0}^{n} (a_j - a_{j-1}) = a_n.$$

Es evidente que también se verifica que $|z^n f(1/z)| \leq a_n$, para $|z| = 1$, y, puesto que $z^n f(1/z)$ es una función analítica en $|z| \leq 1$, por el principio del módulo máximo deducimos la estimación $|z^n f(1/z)| \leq a_n$, para $|z| \leq 1$. Ahora, cambiando z por $1/z$, llegamos a que $|f(z)| \leq a_n |z|^n$, cuando $|z| \geq 1$. De este modo, de (1) obtenemos que, para $|z| \geq 1$,

$$\begin{aligned} |(1-z)p(z)| = |f(z) - a_n z^{n+1}| &\geq a_n |z|^{n+1} - |f(z)| \\ &\geq a_n (|z|^{n+1} - |z|^n) = a_n |z|^n (|z| - 1). \end{aligned}$$

Por tanto, si $|z| > 1$ se tiene que $(1-z)p(z) \neq 0$, y podemos concluir que todos los ceros de $p(z)$ están en el disco $|z| \leq 1$. □

También resuelto B. Bradie, J. M. Sanz Serna y el proponente.

PROBLEMA 372. *Propuesto por Manuel Benito Muñoz, Logroño, La Rioja.*

Para hacer la criba de Eratóstenes se escriben los números naturales desde el 2: $2, 3, 4, \ldots$. A partir del 2 se van tachando números de dos en dos; el primero que queda sin tachar es el 3. A continuación, a partir del 3 se van tachando números de tres en tres (pudiendo volverse a tachar alguno de los números que ya estaban tachados anteriormente); el primero que queda sin tachar es el 5. A continuación, a partir del 5,... y así sucesivamente. Esto da lugar a una lista de números sin tachar,

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, \ldots,$$

que es la sucesión de los números primos. Si hacemos un proceso similar, pero en vez de tachar, borramos los números que toque, los números que quedan sin borrar se denominan *lúdicos*. La lista de los números lúdicos comienza

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 25, 29, 37, 41, 43, 47, 53, 61, 67, 71, 77, 83, 89, 91, 97, \ldots$$

(para más información sobre los números lúdicos puede verse la sucesión `A003309` en *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, `https://oeis.org/A003309`).

La suma de los divisores de un número natural n es 3328. Hallar dicho número sabiendo que $n + 64$ es un número primo y lúdico.

Solución enviada por Jaime Vinuesa, Universidad de Cantabria, Santander.

Empezamos por determinar los números cuya suma de divisores es $3328 = 2^8 \cdot 13$. Como $\sigma(n)$ es una función multiplicativa y

$$\sigma(p^k) = 1 + p + \cdots + p^k,$$

las únicas soluciones posibles de la ecuación $\sigma(n) = 3328$ son

$$\begin{aligned} \sigma(n) = 13 \cdot 2^3 \cdot 2^5 = (1+3+3^2)(1+7)(1+31) &\implies n = 3^2 \cdot 7 \cdot 31 = 1953, \\ \sigma(n) = 104 \cdot 2^3 \cdot 2^2 = (1+103)(1+7)(1+3) &\implies n = 103 \cdot 7 \cdot 3 = 2163, \\ \sigma(n) = 104 \cdot 2^5 = (1+103)(1+31) &\implies n = 103 \cdot 31 = 3193. \end{aligned}$$

Ahora tenemos que $1953 + 64 = 2017$, que es primo y lúdico; $2163 + 64 = 2227 = 131 \cdot 17$, que no es primo; y $3193 + 64 = 3257$, que es primo pero no lúdico. Por tanto, el número buscado es $n = 1953$.

También resuelto por G. Barbat, J. Nadal, A. Stadler, D. Văcaru y el proponente.

Problema 373. *Propuesto por Mercedes Sánchez Benito, Universidad Complutense de Madrid, Madrid.*

Encontrar todos los números primos p tales que $(2^{p-1} - 1)/p$ es un cuadrado perfecto.

Solución enviada por Roberto de la Cruz.

Si $p = 2$ la expresión del enunciado vale $1/2$, por lo que no es un cuadrado perfecto.

Ahora, si p es un número primo impar, es decir, $p = 2k+1$, con $k \in \mathbb{Z}^+$, tenemos que

$$\frac{2^{p-1} - 1}{p} = \frac{2^{2k} - 1}{p} = \frac{(2^k + 1)(2^k - 1)}{p}.$$

Como $(2^k + 1)$ y $(2^k - 1)$ son primos entre sí, para que la expresión anterior sea una cuadrado perfecto uno de los dos tiene que ser igual a p y el otro un cuadrado perfecto. Hay dos posibilidades:

a) Si $2^k + 1 = p$, llegamos a la ecuación $2^k = 2k$, cuyas soluciones enteras son $k = 1$ y $k = 2$, y se corresponden con $p = 3$ y $p = 5$, respectivamente. Para $p = 3$ la expresión del enunciado vale 1, que es un cuadrado perfecto, y para $p = 5$ vale 3, que no es un cuadrado perfecto.

b) Si $2^k - 1 = p$, obtenemos la ecuación $2^k = 2(k+1)$, cuya única solución entera es $k = 3$ y nos da $p = 7$. En este caso el valor de la expresión del problema es 9 y, obviamente, es un cuadrado perfecto.

Por tanto, hay dos soluciones, $p = 3$ y $p = 7$.

También resuelto por J. Nadal, A. Stadler y la proponente.

PROBLEMA 374. *Propuesto por José M. Gamboa Mutuberría, Universidad Complutense de Madrid, Madrid.*

a) Sean u y v números reales. Demostrar que el sistema de ecuaciones

$$(xy-1)^2+y^2=u, \qquad x(xy-1)=v$$

tiene alguna solución $x, y \in \mathbb{R}$ si y solo si $u > 0$.

b) Sean u, v y w números reales. Demostrar que el sistema de ecuaciones

$$\frac{2x}{x^2+y^2+1}=u, \qquad \frac{2y}{x^2+y^2+1}=v, \qquad \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}=w$$

tiene alguna solución $x, y \in \mathbb{R}$ si y solo si $u^2+v^2+w^2=1$ y $(u,v,w) \neq (0,0,1)$.

c) Sean u y v números reales. Demostrar que existen tres polinomios $p_1(x,y)$, $p_2(x,y)$ y $p_3(x,y)$ con coeficientes reales tales que $p_3(x,y) > 0$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$, y de modo que el sistema de ecuaciones

$$\frac{p_1(x,y)}{p_3(x,y)}=u, \qquad \frac{p_2(x,y)}{p_3(x,y)}=v$$

tiene solución si y solo si $u^2+v^2<1$.

NOTA. En el apartado b) publicado originalmente se pedía asegurar la existencia de una solución $x, y, z \in \mathbb{R}$, cuando en realidad debía poner $x, y \in \mathbb{R}$. Pedimos disculpas por este error, que ha sido observado en las soluciones recibidas.

Solución enviada por el proponente.

a) Para cada par de números reales x e y se tiene $(xy-1)^2+y^2>0$, por ser una suma de cuadrados que no se anulan simultáneamente pues, si $y=0$, se cumple que $xy-1=-1\neq 0$

Recíprocamente, sean $u, v \in \mathbb{R}$ tales que $u > 0$. Si $v=0$, los valores $y=\sqrt{u}$ y $x=1/\sqrt{u}$ son una solución del sistema. En caso de que $v \neq 0$ escribimos la segunda ecuación como $y=(v+x)/x^2$, para $x \neq 0$, y la sustituimos en la primera, que, tras sencillas manipulaciones elementales, se convierte en $p(x)=0$, donde

$$p(x)=ux^4-(1+v)x^2-2vx-v^2.$$

Como $p(0)=-v^2<0$ y, por ser $u>0$, $\lim_{x\to\infty} p(x)=+\infty$, el teorema de Bolzano nos asegura la existencia de $x_0>0$ tal que $p(x_0)=0$. Por tanto, la pareja $(x_0,(v+x_0)/x_0^2)$ será una solución del sistema en este caso.

b) Si x e y son solución del sistema, entonces

$$u^2+v^2+w^2=\frac{4x^2+4y^2+(x^2+y^2-1)^2}{(1+x^2+y^2)^2}=1$$

y, obviamente, $(u,v,w)\neq(0,0,1)$ (notar que $u=v=0$ implica $w=-1$).

Recíprocamente, puesto que $u^2+v^2+w^2=1$ y $(u,v,w)\neq(0,0,1)$, los valores

$$x=\frac{u}{1-w} \qquad \text{e} \qquad y=\frac{v}{1-w}$$

están bien definidos y, como se puede comprobar de manera elemental, forman una solución del sistema.

c) Denotemos

$$\mathcal{H}_1=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : u>0\}, \qquad \mathcal{H}_2=\{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3 : u>0\},$$

$\mathbb{S}^2$ la esfera unidad en $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{D}$ el disco unidad abierto en $\mathbb{R}^2$; y sean las aplicaciones

$$\begin{aligned} F:\mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ (x,y) &\longmapsto ((xy-1)^2+y^2, x(xy-1)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G:\mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3\\ (x,y) &\longmapsto \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2})\right), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} H:\mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ (x,y,z) &\longmapsto (y,z). \end{aligned}$$

Por el apartado a), sabemos que $F(\mathbb{R}^2)=\mathcal{H}_1$ y, por el b), $G(\mathbb{R}^2)=\mathbb{S}^2\setminus\{(0,0,1)\}$. Además, como la primera coordenada de la aplicación G toma valores positivos únicamente cuando $x>0$ se deduce que $G(\mathcal{H}_1)=\mathbb{S}^2\cap\mathcal{H}_2$. Ahora, como $H(\mathbb{S}^2\cap\mathcal{H}_2)=\mathcal{D}$, llegamos a que

$$H\circ G\circ F(\mathbb{R}^2)=H\circ G(\mathcal{H}_1)=H(\mathbb{S}^2\cap\mathcal{H}_2)=\mathcal{D}.$$

Para terminar basta observar que las coordenadas de F, G y H son cocientes de polinomios cuyos denominadores son positivos en todos los puntos del plano. Esto implica que

$$H\circ G\circ F(x,y)=\left(\frac{p_1(x,y)}{p_3(x,y)}, \frac{p_2(x,y)}{p_3(x,y)}\right)$$

para ciertos polinomios p_1, p_2 y p_3, con $p_3(x,y)>0$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$.

También resuelto por J. Nadal (apartados a) y b)). Se ha recibido una solución incorrecta.

Problema 375 (Corrección). *Propuesto por Jesús García Gual, Madrid.*

En una liguilla de fútbol han participado 10 equipos a partido único todos contra todos. La clasificación final por puntos (3 por ganar, 1 por empatar y 0 por perder) ha sido:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
24	20	18	14	11	10	9	8	7	5

Especifica el número de partidos ganados, perdidos y empatados por cada equipo, sabiendo que ningún equipo empató más de tres encuentros.

Solución enviada por Kee-Wai Lau, Hong Kong, China.

La distribución de los números de partidos ganados, empatados y perdidos por cada equipo se muestra en la tabla

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**
Gana	**8**	**6**	**5**	**4**	**3**	**3**	**2**	**2**	**2**	**1**
Empata	**0**	**2**	**3**	**2**	**2**	**1**	**3**	**2**	**1**	**2**
Pierde	**1**	**1**	**1**	**3**	**4**	**5**	**4**	**5**	**6**	**6**
Puntuación	**24**	**20**	**18**	**14**	**11**	**10**	**9**	**8**	**7**	**5**

que ha quedado construida como explicamos a continuación.

Claramente, cada equipo ha jugado 9 partidos y en total se han jugado 45 partidos. Considerando solamente cómo puede haber obtenido cada equipo la puntuación que se le asigna en el enunciado, obtenemos la siguiente tabla de posibilidades:

	A	B	C		D		E			F		
Gana	8	6	5	6	3	4	1	2	3	1	2	3
Empata	0	2	3	0	5	2	8	5	2	7	4	1
Pierde	1	1	1	3	1	3	0	2	4	1	3	5
Puntos	24	20	18		14		11			10		

	G				H			I			J	
Gana	0	1	2	3	0	1	2	0	1	2	0	1
Empata	9	6	3	0	8	5	2	7	4	1	5	2
Pierde	0	2	4	6	1	3	5	2	4	6	4	6
Puntos	9				8			7			5	

Teniendo ahora en cuenta que ningún equipo empató más de tres encuentros, la tabla anterior se reduce simplemente a

	A	B	C		D	E	F	G		H	I	J
Gana	8	6	5	6	4	3	3	2	3	2	2	1
Empata	0	2	3	0	2	2	1	3	0	2	1	2
Pierde	1	1	1	3	3	4	5	4	6	5	6	6
Puntos	24	20	18		14	11	10	9		8	7	5

Sean x e y el número de partidos que han empatado los equipos C y G, respectivamente. Como la suma de los empates de todos los equipos debe ser un número par, solo quedan las posibilidades $(x, y) = (0, 0)$ o bien $(x, y) = (3, 3)$. Si $(x, y) = (0, 0)$, entonces el número total de partidos ganados es igual a 38 y el número total de partidos perdidos es igual a 40, lo que es obviamente imposible. Luego se tiene $(x, y) = (3, 3)$, y de ahí la tabla del comienzo.

Como apéndice mostramos, mediante la siguiente tabla de resultados de encuentros, que la distribución de partidos resultante es, de hecho, realizable. No es única. La tabla se lee por filas: el equipo Fila (G)ana, (E)mpata o (P)ierde, su partido contra el equipo Columna.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A		G	P	G	G	G	G	G	G	G
B	P		G	E	E	G	G	G	G	G
C	G	P		E	E	E	G	G	G	G
D	P	E	E		P	P	G	G	G	G
E	P	E	E	G		G	P	P	P	G
F	P	P	E	G	P		P	G	G	P
G	P	P	P	P	G	G		E	E	E
H	P	P	P	P	G	P	E		G	E
I	P	P	P	P	G	P	E	P		G
J	P	P	P	P	P	G	E	E	P	

También resuelto por F. Aranda, R. Balayev, G. Barbat, C. Beade, Club de Matemáticas del I. E. S. San Juan Bautista de Madrid (solución elaborada por Andrea, Ángel, Aníbal, Daniel, Lucía, Luis, Luna, Noor, Paula, Samuel, Sergio, Sergio y Sol), J. I. Farrán, P. González, K. Mustafayev, J. Nadal, A. Población, J. M. Sanz Serna y el proponente. R. de la Cruz envía una solución correcta del enunciado sin corregir. Se han recibido además dos soluciones incorrectas.

Problema 376. *Propuesto por Rodolfo Larrea Tomás y Emilio Fernández Moral, Logroño, La Rioja.*

Demostrar que los radios de las circunferencias circunscritas a los cuadriláteros formados, uno por las bisectrices interiores de los ángulos de un cuadrilátero dado y otro por las bisectrices exteriores, están en la razón $\frac{a+c-b-d}{a+b+c+d}$, siendo a, b, c y d las longitudes de los cuatro lados del cuadrilátero dado tomados en su orden cíclico.

Solución enviada por los proponentes.

Por claridad, antes de abordar la solución propiamente dicha demostramos dos lemas auxiliares.

Lema 1. *En un cuadrilátero cualquiera las bisectrices interiores de sus ángulos determinan un cuadrilátero cíclico, y las bisectrices exteriores de sus ángulos también determinan un cuadrilátero cíclico.*

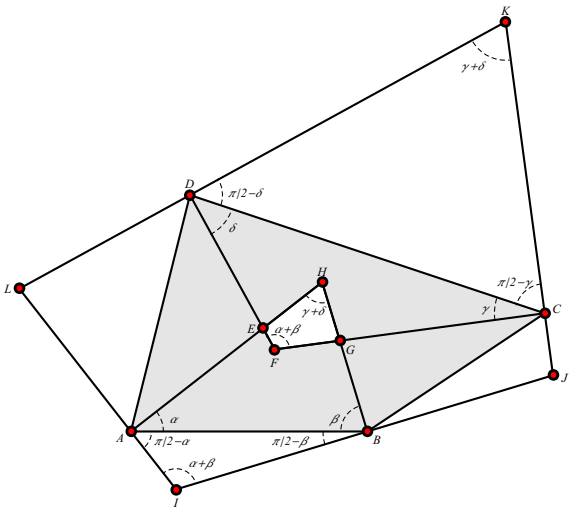

Figura 1: Esquema para la prueba del Lema 1 del Problema 376.

DEMOSTRACIÓN. Partimos del cuadrilátero $ABCD$, véase la figura 1. Por comodidad expresiva sean los ángulos interiores $\angle BAD = 2\alpha$, $\angle CBA = 2\beta$, $\angle DCB = 2\gamma$, $\angle CDA = 2\delta$.

Sea $EFGH$ el cuadrilátero formado por las bisectrices interiores (en un caso no degenerado, como el de la figura) de los ángulos del cuadrilátero $ABCD$. Para probar que $EFGH$ es cíclico basta demostrar que $\angle EHG + \angle EFG = \pi$. Pero

$$\angle EHG = \angle AHB = \pi - (\alpha + \beta) = \gamma + \delta,$$
$$\angle EFG = \angle DFC = \pi - (\gamma + \delta) = \alpha + \beta$$

y se tiene $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$, luego el cuadrilátero interior $EFGH$ es cíclico.

Sea $IJKL$ el cuadrilátero formado por las bisectrices exteriores. Recordemos que las bisectrices de un ángulo son perpendiculares entre sí. Se tiene

$$\angle DKC = \pi - (\angle CDK + \angle DCK) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \delta + \frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \gamma + \delta,$$

y análogamente $\angle AIB = \alpha + \beta$, luego el cuadrilátero exterior $IJKL$ es también cíclico. □

LEMA 2. *Si $EFGH$ e $IJKL$ son los cuadriláteros del Lema 1, entonces puntos I, F, H y K son colineales, así como los puntos L, E, G y J (ver la figura 1).*

DEMOSTRACIÓN. Veamos que los puntos L, E, G y J están alineados. Sea M el punto de intersección de las rectas AB y CD (ver la figura 2). Según la construcción del problema, el punto J es el incentro del triángulo MBC; el punto G es el exincentro correspondiente al lado BC de ese triángulo MBC; el punto E es el incentro

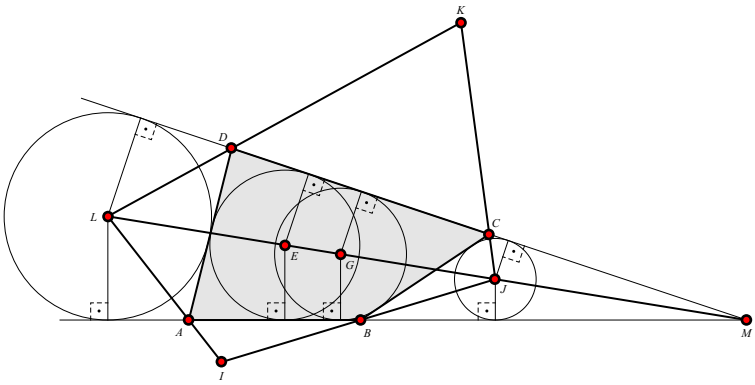

Figura 2: Esquema para la prueba del Lema 2 del Problema 376.

del triángulo MAD, y L es el exincentro correspondiente al lado AD del triángulo MAD; los cuatro puntos pertenecen, por lo tanto, a la bisectriz interior del ángulo $\angle DMA$.

También, sin hablar de incentros, podríamos aducir más simplemente que, por construcción, los puntos L, E, G y J equidistan de las rectas AB y CD, por lo que están alineados sobre su bisectriz (o sobre la paralela media en el caso $AB \parallel CD$).

El mismo razonamiento, partiendo de las rectas AD y BC, nos llevará a concluir que los puntos I, F, H y K están alineados en la bisectriz, o sobre la paralela media en su caso, de dichas rectas. □

Y ahora vamos con el problema propuesto, siguiendo la misma notación de los lemas anteriores, donde ha quedado demostrado que los cuadriláteros $IJKL$ y $EFGH$ son cíclicos y que ambos cuadriláteros tienen sus diagonales sobre las mismas rectas. También son cíclicos los cuatro cuadriláteros $AIBH$, $BJCG$, $CKDF$ y $DLAE$, pues todos ellos tienen dos ángulos rectos opuestos. Con esto el mapa de ángulos y segmentos es el de la figura 3. Sean, respectivamente, a, b, c y d las longitudes de los lados AB, BC, CD y DA del cuadrilátero $ABCD$. Supondremos, como en el caso de nuestra figura, que se tiene $a + c > b + d$ (en otro caso reordenaríamos los vértices, y por tanto los lados, $A' = B$, $B' = C$, $C' = D, D' = A$, etc.). Sean R y r los radios de las circuferencias circunscritas respectivamente a los cuadriláteros $IJKL$ y $EFGH$.

Consideremos, en el cuadrilátero exterior $IJKL$, ciertos segmentos sobre la diagonal IK. Por un lado se tiene $IK = 2R\,\mathrm{sen}(\alpha + \delta)$ y también $FH = 2r\,\mathrm{sen}(\alpha + \delta)$, luego

$$IK + FH = 2(R + r)\,\mathrm{sen}(\alpha + \delta). \tag{1}$$

Por otro lado,

$$IK+FH = IH+FK = \frac{IB}{\cos\alpha}+\frac{KC}{\cos\delta} = \frac{a}{\mathrm{sen}(\alpha+\beta)}+\frac{c}{\mathrm{sen}(\gamma+\delta)} = \frac{a+c}{\mathrm{sen}(\gamma+\delta)}, \tag{2}$$

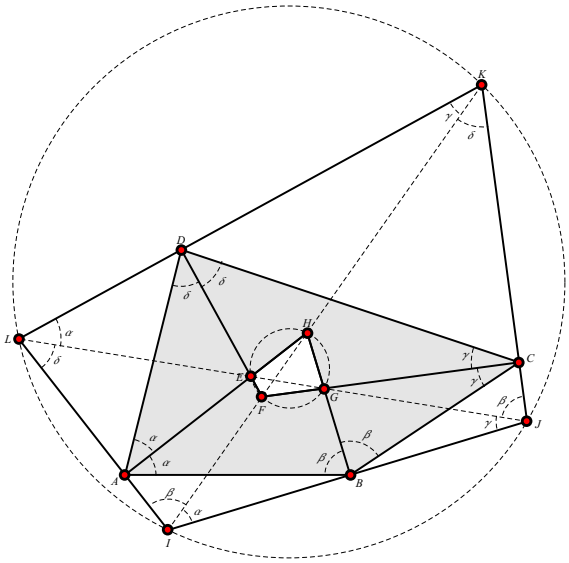

Figura 3: Esquema para la solución del Problema 376.

donde hemos aplicado el teorema de los senos a los triángulos IAB y KCD. De (1) y (2) se obtiene

$$\frac{a+c}{R+r} = 2\,\mathrm{sen}(\alpha+\delta)\,\mathrm{sen}(\gamma+\delta). \tag{3}$$

Consideramos ahora, de manera análoga, la diagonal LJ. Por un lado se tiene $LJ = 2R\,\mathrm{sen}(\gamma+\delta)$ y también $EG = 2r\,\mathrm{sen}(\gamma+\delta)$, luego

$$LJ - EG = 2(R-r)\,\mathrm{sen}(\gamma+\delta). \tag{4}$$

Por otro lado,

$$LJ - EG = LE + JG = \frac{LA}{\cos\delta} + \frac{GJ}{\cos\beta} = \frac{d}{\mathrm{sen}(\alpha+\delta)} + \frac{b}{\mathrm{sen}(\beta+\gamma)} = \frac{b+d}{\mathrm{sen}(\alpha+\delta)}, \tag{5}$$

donde se ha aplicado el teorema de los senos a los triángulos LDA y JBC. De (4) y (5) se obtiene

$$\frac{R-r}{b+d} = 2\,\mathrm{sen}(\alpha+\delta)\,\mathrm{sen}(\gamma+\delta). \tag{6}$$

Finalmente, de (3) y (6) resulta

$$\frac{R+r}{R-r} = \frac{a+c}{b+d},$$

y de aquí sale inmediatamente la relación buscada.

También resuelto por J. Nadal. Se ha recibido una solución incorrecta.

Nota. Este viejo y bello problema se ha recuperado de entre los *Problèmes divers* que se encuentran enunciados en la sección final del libro de Jacques Hadamard, *Leçons de Géométrie élémentaire, I: Géométrie plane*, Armand Colin & Cie, Editeurs, Paris, 1898. En concreto se trata del Problema 361 de dicha referencia (imagen extraída de la página 297):

361. Les rayons des cercles circonscrits (ex. 66) aux quadrilatères formés, l'un par les bissectrices des angles d'un quadrilatère déterminé, l'autre par les bissectrices de ses angles extérieurs, sont entre eux dans le rapport $\frac{a+c-b-d}{a+c+b+d}$ (a, b, c, d étant les quatre côtés du quadrilatère donné, pris dans leur ordre naturel).