Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri y José Luis Díaz Barrero

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 31 de marzo de 2012.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 181. *Propuesto por Nicuşor Minculete, Universitatea Crestina Dimitrie Cantemir, Brasov, Rumanía.*

Sea A' un punto del lado BC de un triángulo ABC, en el que las longitudes de sus lados BC, CA y AB son, respectivamente, a, b y c. La recta AA' se denomina ceviana de orden k desde el punto A si $\frac{BA'}{A'C} = \left(\frac{c}{b}\right)^k$, para algún entero k.

Para un triángulo ABC denotamos por K, L y M, respectivamente, los puntos de intersección de las cevianas de orden k desde los puntos A, B y C con sus lados opuestos. Sea P un punto del triángulo KLM, y X, Y y Z, respectivamente, los pies de las perpendiculares trazadas por el punto P a los lados BC, CA y AB. Si denotamos por x, y y z, respectivamente, las longitudes de los segmentos PX, PY y PZ, probar que

a) si $P \in LM$, entonces $\dfrac{x}{a^{k-1}} = \dfrac{y}{b^{k-1}} + \dfrac{z}{c^{k-1}}$;

b) si $P \in MK$, entonces $\dfrac{y}{b^{k-1}} = \dfrac{z}{c^{k-1}} + \dfrac{x}{a^{k-1}}$; y

a) si $P \in KL$, entonces $\dfrac{z}{c^{k-1}} = \dfrac{x}{a^{k-1}} + \dfrac{y}{b^{k-1}}$.

NOTA. Notar que las cevianas de orden cero son las medianas, y las de orden uno las bisectrices. Por tanto, en el caso $k = 1$ esta propuesta se corresponde con el Problema ENEM 3, cuya solución incluimos en este mismo número.

PROBLEMA 182. *Propuesto por Neculai Stanciu, "George Emil Palade" Secondary School, Buzău, Rumanía.*

Para cada $a \in \mathbb{R}^+$, evaluar el límite

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{(a+1)(k+n)-a}{(a+1)n} \right)^{\frac{(a+1)(k+n)-a}{(a+1)n^2}} .$$

PROBLEMA 183. *Propuesto por Jaime Vinuesa Tejedor, Universidad de Cantabria, Santander.*

Sea $\{x_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales.

a) ¿Es posible que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+x_n)$ sea convergente y $\prod_{n=1}^{\infty}(1-x_n)$ divergente a infinito?

b) ¿Es posible que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+x_n)$ sea convergente y $\prod_{n=1}^{\infty}(1-x_n)$ divergente a cero?

PROBLEMA 184. *Propuesto por Panagiote Ligouras, "Leonardo da Vinci" High School, Noci, Italia.*

Las longitudes de los lados de un hexágono $ABCDEF$ satisfacen $AB = BC$, $CD = DE$ y $EF = FA$. Probar que

$$\frac{ED}{AD}\cdot\frac{CB}{EB} + \frac{CB}{EB}\cdot\frac{AF}{CF} + \frac{AF}{CF}\cdot\frac{ED}{AD} \geq \frac{3}{4}.$$

PROBLEMA 185. *Propuesto por Paolo Perfetti, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Tor Vergata, Roma.*

Sean a, b y c números reales positivos. Probar que

$$\sum_{\text{cíclica}} \left(\frac{2a^2}{b+c} + \frac{a^3}{b^2+c^2} \right) \geq \frac{9}{2}\,\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}.$$

PROBLEMA 186. *Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Universidad Complutense, Madrid.*

Sea ABC un triángulo con $A \geq \frac{\pi}{2}$ y $b \geq c$. Sean m y n, respectivamente, las longitudes de las proyecciones de los lados AB y AC sobre el lado BC.

a) Probar que $b - c \leq m - n \leq \sqrt{2}(b-c)$.

b) Evaluar $\lim_{b\to c} \frac{m-n}{b-c}$.

Soluciones

Problema 157. *Propuesto por Myhàly Bencze, Brasov, Rumanía.*

Sean $\lambda > 0$, $x_i > 0$, para $i = 1, \ldots, n$, $a \geq 1$ y $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$. Probar la desigualdad

$$\sum_{\text{cíclica}} \frac{x_1^k}{(\lambda + x_2)(\lambda + x_3)\cdots(\lambda + x_k)} \geq \left(\frac{k}{a} - \frac{k-1}{a\sqrt[k-1]{a}}\right) \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n(k-1)\lambda}{a\sqrt[k-1]{a}}.$$

Solución enviada por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona.

Podemos escribir el segundo miembro de la desigualdad como $n\mu f(a)$, donde hemos llamado μ a la media aritmética de los x_i, $i = 1, \ldots, n$, y

$$f(a) = \frac{k}{a} - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{k-1}{a^{\frac{k}{k-1}}}.$$

Observando que

$$f'(a) = -\frac{k}{a^2} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{k}{a^{\frac{2k-1}{k-1}}} = \frac{k}{a^2 \sqrt[k-1]{a}} \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu} - \sqrt[k-1]{a}\right),$$

resulta evidente que f posee un máximo para $\sqrt[k-1]{a} = \frac{\lambda+\mu}{\mu}$. Luego

$$n\mu f(a) \leq n\mu f\left(\left(\frac{\lambda + \mu}{\mu}\right)^{k-1}\right) = \frac{n\mu^k}{(\lambda + \mu)^{k-1}},$$

y es suficiente probar la desigualdad

$$\frac{1}{n} \sum_{\text{cíclica}} \frac{x_1^k}{(\lambda + x_2)(\lambda + x_3)\cdots(\lambda + x_k)} \geq \frac{\mu^k}{(\lambda + \mu)^{k-1}}.$$

Denotemos $\mu_1 = \frac{x_2+x_3+\cdots+x_k}{k-1}$, y de forma similar definamos $\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_n$ por permutación cíclica. Se tiene, por la desigualdad entre medias geométrica y aritmética, que

$$(\lambda + x_2)(\lambda + x_3)\cdots(\lambda + x_k) \leq (\lambda + \mu_1)^{k-1},$$

con igualdad si y sólo si $x_2 = x_3 = \cdots = x_k$, y de forma similar para sus permutaciones cíclicas. Se tiene entonces que, definiendo $y_i = \frac{x_i}{\lambda+\mu_i}$, nos basta con demostrar

$$\frac{1}{\lambda + \mu} \sum_{\text{cíclica}} \frac{\lambda + \mu_1}{n} y_1^k \geq \frac{\mu^k}{(\lambda + \mu)^k}. \tag{1}$$

Nótese ahora que

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = n\mu \qquad \text{y} \qquad \sum_{\text{cíclica}} \frac{\lambda + \mu_1}{n} = \lambda + \mu,$$

ya que cada uno de los x_i aparece en exactamente $k-1$ de los μ_j, con coeficiente $\frac{1}{k-1}$ en cada uno de ellos. Así, teniendo en cuenta que la función $g(y) = y^k$ es convexa cuando $y > 0$, podemos aplicar la desigualdad de Jensen y concluir (1). En efecto,

$$\frac{1}{\lambda+\mu} \sum_{\text{cíclica}} \frac{\lambda+\mu_1}{n} y_1^k \geq \left(\frac{1}{\lambda+\mu} \sum_{\text{cíclica}} \frac{\lambda+\mu_1}{n} y_1 \right)^k \geq \frac{\mu^k}{(\lambda+\mu)^k},$$

con igualdad si y sólo si todos los y_i son iguales. Queda entonces demostrada la desigualdad requerida, dándose la igualdad si y sólo si, simultáneamente, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ y $a = \frac{(\lambda+\mu)^{k-1}}{\mu^{k-1}}$.

También resuelto por el proponente.

Problema 158. *Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Universidad Complutense, Madrid.*

Sea $\triangle ABC$ un triángulo en el que las longitudes de los lados $a = BC$, $b = AC$ y $c = AB$ satisfacen $a \leq b \leq c$. Si D denota el pie de la altura desde el vértice C y G es el punto de tangencia de la circunferencia inscrita al triángulo con el lado AB, probar que

$$CD \cdot (BG + GA) - 2BG \cdot GA \gtreqless 0 \iff \angle ACB \lesseqgtr \frac{\pi}{2}.$$

Solución enviada por Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.

Sean r y s, respectivamente, el radio de la circunferencia inscrita y el semiperímetro del $\triangle ABC$.

Habida cuenta que $GA = s - a$, $BG = s - b$ y

$$\frac{1}{2} CD \cdot AB = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \ (= \text{área de } \triangle ABC),$$

resulta

$$CD \cdot AB = 2rs, \qquad BG \cdot GA = \frac{r^2 s}{s-c}$$

y

$$\begin{aligned} CD \cdot (BG + GA) - 2BG \cdot GA &= CD \cdot AB - 2BG \cdot GA \\ &= 2rs \left(1 - \frac{r}{s-c}\right) = 2rs \left(1 - \tan \frac{C}{2}\right). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} CD \cdot (BG + GA) - 2BG \cdot GA \gtreqless 0 &\iff 1 - \tan \frac{C}{2} \gtreqless 0 \iff \tan \frac{C}{2} \lesseqgtr 1 \\ &\iff \frac{C}{2} \lesseqgtr \frac{\pi}{4} \iff \angle ACB \lesseqgtr \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

También resuelto por R. S. Eléxpuru, D. Lasaosa, R. Peiró (estudiante), B. Salgueiro, C. Sánchez y el proponente.

Nota. Todas las soluciones recibidas (excepto la del proponente) hacen notar de manera implícita o explícita que la condición $a \le b \le c$ establecida en el enunciado no es necesaria.

Problema 159. *Propuesto por Ovidiu Furdui, Cluj, Rumanía.*

Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Evaluar

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^n f(\cos x)\, dx.$$

Como consecuencia, deducir, para cada función continua $g : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$, el valor de

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^n g(x)\, dx.$$

Solución enviada por Javier Duoandikoetxea Zuazo, Universidad del País Vasco, Bilbao.

El primero de los límites solicitado vale $f(0)\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Para el segundo, observando que $g(x) = g(\arccos(\cos x))$, se tiene inmediatamente el valor $g\left(\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Haciendo el cambio $\cos x = t/\sqrt{n}$ la integral en el primer límite se transforma en

$$\sqrt{n} \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^n f(\cos x)\, dx = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{(n-1)/2} f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt.$$

Observando que para $n \ge 2$ se cumple la desigualdad

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{(n-1)/2} \left| f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right| \le M e^{-t^2/4}, \quad 0 < t < \sqrt{n}, \tag{1}$$

podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada y el límite pedido es

$$f(0) \int_0^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt = f(0)\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Tomando como M una cota de $|f(x)|$, $0 \le x \le 1$, para demostrar la desigualdad (1) basta comprobar que

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} \le e^{-x/2}, \quad 0 < x < n,$$

lo que se deduce del hecho de que para $n \ge 2$ la función

$$(n-1)\log\left(1 - \frac{x}{n}\right) + \frac{x}{2}$$

se anula en 0 y es decreciente en $(0, n)$.

NOTA. Como se puede deducir fácilmente de la solución para el primer límite, no es necesario exigir la continuidad de la función f en todo el intervalo $[0,1]$, basta que f sea continua en $x=0$ y acotada en $[0,1]$. Para el segundo límite es suficiente suponer que g sea continua en $x=\frac{\pi}{2}$ y acotada en $[0,\pi/2]$.

También resuelto por D. Lasaosa, J. A. Múgica, M. Omarjee, P. Perfetti, X. Ros, A. Stadler y el proponente.

PROBLEMA 160. *Propuesto por Cristobal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.*

Probar que las tangentes de los tres ángulos de un triángulo están en progresión aritmética si y sólo si la recta de Euler del triángulo es paralela a uno de los lados.

Comentario enviado (independientemente) por Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, y Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Una solución a este problema se encuentra en el artículo "Triángulos especiales (2)" (ver apartado II.12 y la referencia del Problema 49), del profesor Francisco Bellot Rosado, publicado en el número 18 de la *Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática* (marzo-abril de 2005). Puede accederse a la publicación a través del link `http://www.oei.es/oim/revistaoim/numero18.htm`.

Se han recibido soluciones de R. Barroso, D. Lasaosa, J. A. Múgica, J. Rivero y el proponente.

PROBLEMA 161. *Propuesto por Perfetti Paolo, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Tor Vergata, Roma, Italia.*

Determinar las soluciones positivas de la ecuación

$$16\sqrt{2}x^{3+\sqrt{2}} - 20\sqrt{2}x^{2+\sqrt{2}} + 16\sqrt{2}x^3 + 3\sqrt{2}x^{1+\sqrt{2}} - 20\sqrt{2}x^2 + x^{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-22) + 3\sqrt{2}x + 22 + \sqrt{2} = 0.$$

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

La ecuación propuesta puede reescribirse como $f(x)=g(x)$ donde

$$f(x) = \sqrt{2}(x-1)(16x^2-4x-1)(x^{\sqrt{2}}+1)$$

y

$$g(x) = 22(x^{\sqrt{2}}-1).$$

Estudiando y representando gráficamente las funciones $f(x)$ y $g(x)$, se observa que ambas cortan al eje OX en el punto $(1,0)$, punto en el que además tienen como tangente común la recta $y=22\sqrt{2}(x-1)$ y quedan por encima de dicha tangente. También se tiene que la gráfica de $f(x)$ queda por encima de la de $g(x)$; es decir, $f(x)>g(x)$ para $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$. Por tanto, la única solución positiva de la ecuación dada es $x=1$.

También resuelto por D. Lasaosa y el proponente.

Problema 162. *Propuesto por José Manuel Gutiérrez Jiménez, Universidad de La Rioja, Logroño.*

Para cada $a \in (0, 1/2)$, definimos la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ como $x_1 = a$ y

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_n}{1-x_n}\right)^2, \quad n \geq 1.$$

Evaluar $\prod_{n=1}^{\infty}(1-x_n)$.

Solución enviada (independientemente) por Moubinool Omarjee, Lycée Jean-Lurçat, París, y Xavier Ros (estudiante), Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.

En primer lugar, usando inducción y teniendo en cuenta la identidad $\cosh(2s) = 2\cosh s - 1$, podemos probar que

$$x_n = \frac{1}{2\cosh^2(2^{n-1}t)},$$

donde $t > 0$ es tal que $a = \frac{1}{2\cosh^2 t}$. De este modo, resulta evidente que

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x_n) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{\cosh(2^n t)}{2\cosh^2(2^{n-1}t)}.$$

Por otro lado, como $\operatorname{senh}(2s) = 2\operatorname{senh} s\cosh s$,

$$\prod_{n=1}^{N}\cosh(2^{n-1}t) = \prod_{n=1}^{N}\frac{\operatorname{senh}(2^n t)}{2\operatorname{senh}(2^{n-1}t)} = \frac{\operatorname{senh}(2^N t)}{2^N\operatorname{senh} t},$$

y, por tanto,

$$\prod_{n=1}^{N}\frac{\cosh(2^n t)}{2\cosh^2(2^{n-1}t)} = \frac{\frac{\operatorname{senh}(2^{N+1}t)}{2^N\operatorname{senh}(2t)}}{2^N\left(\frac{\operatorname{senh}(2^N t)}{2^N\operatorname{senh} t}\right)^2} = \frac{\operatorname{senh}^2 t}{\operatorname{senh}(2t)}\cdot\frac{\operatorname{senh}(2^{N+1}t)}{\operatorname{senh}^2(2^N t)}.$$

Así, usando que $\operatorname{senh} s \sim \frac{1}{2}e^s$ cuando $s \to +\infty$, tendremos que

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x_n) = \lim_{N\to\infty}\frac{\operatorname{senh}^2 t}{\operatorname{senh}(2t)}\frac{\operatorname{senh}(2^{N+1}t)}{\operatorname{senh}^2(2^N t)} = \frac{2\operatorname{senh}^2 t}{\operatorname{senh}(2t)} = \tanh t = \sqrt{1-2a},$$

donde la última igualdad se sigue de las igualdades $\tanh^2 t = 1 - \frac{1}{\cosh^2 t} = 1 - 2a$.

Solución enviada por Albert Stadler, Herrliberg, Suiza.

Usando la definición de la sucesión x_n y un argumento de inducción podemos probar las desigualdades

$$0 \leq x_n \leq \frac{(2a)^{2^{n-1}}}{2}.$$

En efecto, la estimación superior para x_n es cierta para $n = 1$ y, supuesta para un cierto n, se tiene que

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_n}{1-x_n}\right)^2 \leq \frac{1}{8}\frac{(2a)^{2^n}}{\left(1-\frac{(2a)^{2^{n-1}}}{2}\right)^2} \leq \frac{(2a)^{2^n}}{2}.$$

Entonces resulta evidente que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, por ser $a \in (0, 1/2)$. Ahora, de las identidades

$$1 - 2x_{n+1} = 1 - \frac{x_n^2}{(1-x_n)^2} = \frac{1-2x_n}{(1-x_n)^2}$$

concluimos que

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x_n) = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\sqrt{\frac{1-2x_n}{1-2x_{n+1}}} = \lim_{N\to\infty}\sqrt{\frac{1-2x_1}{1-2x_{N+1}}} = \sqrt{1-2a}.$$

También resuelto por V. Lanchares, D. Lasaosa, J. A. Múgica y el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.