
LAS MEDALLAS FIELDS

Sección a cargo de

Leovigildo Alonso Tarrío y Ana Jeremías López

Sir Vaughan Frederick Randal Jones

por

Enrique Artal Bartolo y María Teresa Lozano Imízcoz

1. BIOGRAFÍA DE V. JONES

Según la biografía contenida en los archivos de la Universidad de St. Andrews en Escocia [13], Vaughan Frederick Randal Jones nació el 31 de diciembre de 1952 en la ciudad neozelandesa de Gisborne. Fue alumno sucesivamente de St. Peter's School en Cambridge (Nueva Zelanda) y Grammar School en Auckland. Se graduó con Honores en la Universidad de Auckland en 1973.

En 1974 ingresó en la École de Physique de la Universidad de Ginebra, trasladándose en 1976 a la École de Mathématiques de la misma Universidad. Su formación en física y la presencia en Ginebra de expertos en topología y C^* -álgebras (Pierre de la Harpe, Michel Kervaire, Claude Weber y, especialmente, su director de tesis André Haefliger) fueron claves para la realización de su tesis doctoral, leída en 1979, y galardonada con el premio Vacheron Constantin. En 1980 se traslada a Estados Unidos, primero como profesor asistente de matemáticas en la Universidad de California en Los Angeles, y después en la Universidad de Pennsylvania, donde fue nombrado en 1984 profesor asociado. Desde 1985 es Profesor en la prestigiosa Universidad de California en Berkeley. La página web del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Vanderbilt (Tennessee) anuncia su incorporación en otoño de 2011 como Profesor Distinguido.

Jones ha recibido muchos premios y honores por su trabajo, además de la Medalla Fields. Fue elegido miembro de la Royal Society en 1990, miembro de la National Academy of Sciences de Estados Unidos en 1999, de la American Academy of Arts and Science en 1993, y de la Royal Society of Letters and Sciences de Noruega en 2001. Ha recibido la medalla Onsager (2000), el Prix Mondial Nessim Habif (2007), y es un Knight Companion de la New Zealand Order of Merit (2009). Es doctor honoris causa por las Universidades de Auckland (Nueva Zelanda), Gales (Reino Unido) y del Litoral Costa de Ópalo (Francia).

2. ICM 1990

El Congreso Internacional de Matemáticas de 1990 tuvo lugar en Kyoto del 21 al 29 de agosto. Era el primer ICM que se celebraba fuera de Europa y Estados Unidos. Asistieron (incluyendo la segunda autora) más de 4000 matemáticos de 83 nacionalidades, que fueron testigos del buen trabajo realizado por los colegas japoneses, que organizaron además numerosos congresos satélites. Especialmente relacionado con el Medalla Fields que nos ocupa, destacamos KNOTS 90 (International Conference on Knot Theory and Related Topics), organizado en Osaka por Akio Kawauchi del 15 al 19 de agosto de 1990. Contó con la asistencia de 174 participantes, entre los que estaban J. Birman, L. Kauffman, V.F.R. Jones, y casi todos los topólogos que van a ser citados en esta historia. Fue, para la segunda autora, la ocasión de conocer a Vaughan y constatar, además de su valía científica, su amabilidad y simpatía.

Vaughan Frederick Randal Jones recibió una de las cuatro medallas Fields que se entregaron en el ICM 1990. Su trabajo fue presentado en el Congreso por Joan Birman [3], que alabó la belleza de sus resultados y calificó de asombrosa la relación que Vaughan había descubierto entre las álgebras de von Neumann y la topología geométrica, descubriendo un nuevo invariante de nudos que no había sido encontrado por los topólogos a pesar de la intensa actividad en áreas relacionadas llevada a cabo durante los anteriores 60 años. También citó las aplicaciones del Teorema del Índice de Jones a la parte de la mecánica estadística relacionada con modelos solubles, grupos cuánticos, diagramas de Dynkin y teorías de representación de álgebras de Lie simples.

En el ICM 1990 fue conferenciante invitado. Sus conocidos se preguntaban qué indumentaria elegiría para su presentación y no defraudó: una camiseta de jugador de rugby de los *All Blacks*. Su conferencia *Von Neumann algebras in Mathematics and Physics*, recogida en los *Proceedings* del Congreso [10], describe cómo se relacionan varios problemas de física y matemáticas que giran en torno a las álgebras de von Neumann y las trenzas.

Por la repercusión posterior, nos centraremos en su polinomio, nuevo y sorprendente invariante de nudos. Este descubrimiento dio un impulso decisivo a la teoría combinatoria de nudos y estableció puentes entre esta teoría y otras, como la mecánica estadística.

3. HISTORIA DE UN POLINOMIO

3.1. ANTECEDENTES

Durante el siglo XX se desarrolló la topología de dimensión baja, en particular el estudio de variedades de dimensión 3, que localmente son como el espacio que habitamos, y dentro de ella, la teoría de nudos, que adquiere gran importancia por su aplicación a otros ámbitos científicos, como la física y la bioquímica.

Los nudos, en matemáticas, son la abstracción del objeto físico que forma una cuerda en el espacio con sus extremos identificados: se toma un trozo de cuerda, se anuda, y después se identifican los extremos de tal manera que no podamos

シュプリンガー・フェアラク東京刊「数学の祭典：国際数学会議 1世紀のアルバム」

ICM-90 フィールズ賞受賞者

- ①生年月日
- ②出身地
- ③受賞時の所属
- ④研究業績



森 重文
Muroga Shigeru

- ①1951年 2月23日
- ②名古屋, 日本
- ③京都大学数理解析研究所
- ④Hartshorne予想の解決, 放射線と縮約写像の理論の創始, 第2 Betti数 > 1 の Fano 多様体の分類, 極小モデルの理論, 特に3次元の場合の存在証明の成功.



ドリンフェルト, ヴラヂミール・ゲルシヨノヴィッチ
Vladimir Gershonovich Drinfeld

- ①1954年 2月14日
- ②ハルコフ, ソビエト連邦
- ③ウクライナ科学アカデミー低温物理学・工学研究所
- ④Drinfeld加群の研究, Langlands予想に関する肯定的諸結果など数論における成果, 物理学の可解模型について, 表現論とのかかわりあいから, N インスタントン解の構成, ソリトン方程式の系統化, 古典ヤン・バクスター方程式の解の分類など諸結果を与えた. 特に量子群について系統的な全体像を与えた.



ウィッテン, エドワード
Edward Witten

- ①1951年 8月26日
- ②バルティモア, アメリカ合衆国
- ③プリンストン高等研究所
- ④超対称性とモース理論, 大域的異常項, ディラック作用素のイーター不変量と異常項, ディラック作用素の指標定理, 正質量予想の別証明, 位相的場の量子論での成果, ドナルドソンの多項式, ジョーンズ多項式への新視点からの理解を与えた.



ジョーンズ, ヴォーン・フレデリック・ランダル
Vaughan Frederick Randal Jones

- ①1952年12月31日
- ②ボスボーン, ニュージーランド
- ③カリフォルニア大学バークレー校
- ④作用素理論において, 反自己同形写像をもつが, 対称的反自己写像をもたない因子環の存在, 超有限型因子環への群の作用の完全な分類, II₁型因子環の部分因子環について指標の概念を導入, Jones環の研究において, 位相幾何学におけるリンク不変量として Jones 多項式を発見.

Figura 1: Anuncio repartido en el ICM-90 de los premiados con medallas Fields.

distinguir dónde se ha realizado ese pegado. El resultado es una cuerda circular anudada. Para un matemático es un encaje de una circunferencia en el espacio. Todo nudo que se obtenga a partir de otro como resultado de una deformación que no contenga cortes y pegados, por ejemplo un movimiento de la cuerda, es un nudo equivalente al de partida. Decimos que se trata del *mismo nudo*. Los nudos se representan mediante diagramas (proyecciones en un plano) que tienen cruces (puntos dobles) como únicas singularidades. Se distingue el tramo superior en un cruce marcándolo con trazo continuo, a diferencia del tramo inferior que se dibuja

cortado, como se ve en la figura 3. Un diagrama sin cruces corresponde al llamado nudo trivial, pero puede haber diagramas con cruces que también representen al nudo trivial. La disciplina llamada Teoría de Nudos estudia también enlaces. Un enlace es un encaje de un número finito de circunferencias en el espacio. Responde a la realidad física de varias cuerdas cerradas, que pueden estar anudadas y a la vez enlazadas unas con otras. Un nudo es entonces un enlace con una sola componente. El principal problema que se plantea en el estudio de los nudos y enlaces es su clasificación, en particular inventar un procedimiento que permita decir si dos nudos son iguales (equivalentes) o no lo son, o si un diagrama corresponde al nudo trivial. Dos diagramas corresponden al mismo enlace si, y sólo si, podemos pasar del uno al otro por los llamados movimientos o jugadas de Reidemeister [14], ver la figura 2. La demostración de este resultado no es constructiva; de hecho, no hay ningún algoritmo que permita conectar dos diagramas del mismo enlace mediante una secuencia de jugadas de Reidemeister; esta circunstancia complica enormemente el estudio de la teoría de nudos.

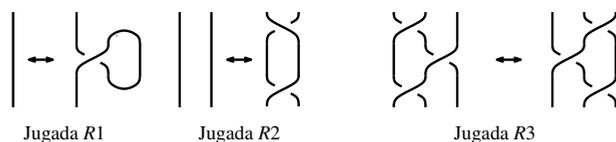


Figura 2: Movimientos de Reidemeister.

Para abordar el problema de clasificación se utilizan invariantes. En ocasiones estos invariantes se obtienen a partir de propiedades topológicas de los enlaces. En otras ocasiones, se obtienen objetos calculables a partir de un diagrama, que tienen el mismo valor para todos los posibles diagramas de todos los enlaces equivalentes al de partida, es decir, que no cambian cuando se aplican movimientos de Reidemeister. Algunos son muy sencillos, por ejemplo, el número de componentes del enlace. Otros requieren maquinarias algebraicas, combinatorias o geométricas. La figura 3 contiene varios enlaces con nombre propio.

Uno de los invariantes que contiene más propiedades topológicas del encaje de un nudo K (o un enlace) en la esfera tridimensional \mathbb{S}^3 es el grupo fundamental del complementario $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K)$. Desde principios del siglo XX se conocen métodos para obtener una presentación de dicho grupo por generadores y relaciones. El problema que se plantea de cara a distinguir nudos y enlaces es que, en general, es muy difícil decidir si dos grupos son isomorfos o no. En el año 1928 el matemático James W. Alexander [1], que estudiaba variedades de dimensión 3, publicó un artículo que contenía un nuevo invariante de nudos: un polinomio de Laurent en una variable t (con potencias positivas y negativas) que pronto fue conocido como el polinomio de Alexander y denotado por $\Delta_K(t)$. Es un polinomio con un claro significado topológico y algebraico relacionado con la homología del espacio recubridor cíclico infinito del complemento del nudo y que depende de $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K)$. Su interés es, al menos, doble. Por una parte codifica propiedades topológicas del nudo; por otra, es un instrumento muy fácil de usar a la hora de comparar nudos.

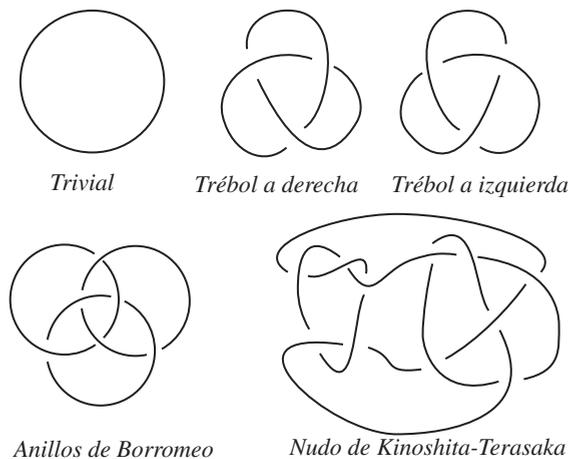


Figura 3: Algunos nudos y enlaces famosos.

Al ser un invariante de la topología del complemento, estaba claro desde el principio que, para dos nudos distintos, pero simétricos por una reflexión especular (resultado de cambiar en cada cruce de un diagrama los tramos superiores e inferiores), el polinomio de Alexander iba a coincidir. El polinomio de Alexander no sirve para distinguir un nudo de su imagen en el espejo. Por ejemplo el trébol a derecha del trébol a izquierda, ver la figura 3. A pesar de que originalmente su cálculo era laborioso (aunque completamente algorítmico a partir de una presentación del grupo fundamental), el invariante resultó muy útil porque es muy fácil comparar polinomios para decidir si son o no iguales. Para el nudo trivial O su valor es $\Delta_O(t) = 1$, y costó un tiempo encontrar otro nudo K no trivial con el mismo polinomio $\Delta_K(t) = 1$. Esto demuestra que no es un invariante completo, es decir que existen nudos distintos con el mismo polinomio de Alexander.

En los años 60, los investigadores buscaban algoritmos susceptibles de ser implementados en un ordenador para calcular invariantes. En esta época John Conway [4] encontró un invariante polinómico de enlaces $\nabla_L(z)$ que resultó estar relacionado con el polinomio de Alexander por un cambio de variable

$$\Delta_K(t) = \nabla_L \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right),$$

pero que tenía la ventaja de que se calculaba fácilmente utilizando una definición recursiva del polinomio basada en dos axiomas:

- (C1) El polinomio del nudo trivial O es 1: $\nabla_O = 1$.
- (C2) Denotemos por D_+ , D_- y D_0 tres diagramas que coincidan fuera de una bola y en el interior de esta bola difieren como muestra la figura 4. Y designemos por L_+ , L_- y L_0 , respectivamente, los enlaces representados por los diagramas D_+ , D_- y D_0 . Entonces los polinomios están relacionados por la ecuación

$$\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z\nabla_{L_0}(z).$$

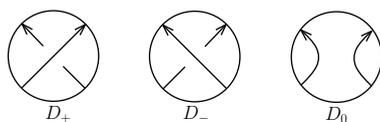


Figura 4: Relaciones *skein* (de madeja).

Los cambios de cruces representados en la figura 4 permiten pasar de un nudo (o enlace) cualquiera al nudo trivial, por lo que esta presentación permite calcular (recurrentemente) el polinomio de Conway de cualquier enlace; la dificultad del trabajo de Conway proviene de demostrar que con este proceso el polinomio de un diagrama no depende de qué cruces elegimos para llegar al nudo trivial, y que dos diagramas equivalentes por las jugadas de Reidemeister de la figura 2 dan el mismo polinomio. Este resultado es el nacimiento de la teoría combinatoria de nudos y enlaces.

3.2. EL POLINOMIO DE JONES

En los años 1980, V. Jones estudió unas ciertas funciones traza sobre C^* -álgebras, y observó que éstas servían como espacios de representación de los grupos de trenzas.

DEFINICIÓN 1. Una C^* -álgebra A es una \mathbb{C} -álgebra de Banach con una involución $*$ que es un automorfismo sesquilineal tal que, $\forall x \in A$, se tiene $\|xx^*\| = \|x\|^2$.

El modelo de partida son las álgebras de matrices complejas con la norma dada por el producto hermitiano estándar. Estas álgebras admiten formas lineales que generalizan el concepto de traza de una matriz.

Una trenza de n hilos se puede identificar como una clase de homotopía de n caminos (no ordenados) $\gamma_1, \dots, \gamma_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuyos grafos son disjuntos y tales que $\{\gamma_1(0), \dots, \gamma_n(0)\} = \{\gamma_1(1), \dots, \gamma_n(1)\}$. Las trenzas se multiplican por yuxtaposición y forman un grupo denotado por \mathbb{B}_n . Emil Artin dio la siguiente presentación del grupo de trenzas:

$$\mathbb{B}_n := \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \left| \begin{array}{l} [\sigma_i, \sigma_j] = 1, \\ |i-j| \geq 2 \end{array} \right. \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \right. \left. \right\rangle. \quad (1)$$

Las presentaciones (1) permite establecer inclusiones naturales $\mathbb{B}_n \subset \mathbb{B}_{n+1}$. Alexander demostró en los años 30 que todo enlace se puede representar por una trenza cerrada (es decir, uniendo los extremos superior e inferior por hilos no anudados), aunque no de manera única. Dos trenzas representan el mismo enlace si están relacionadas por un número finito de transformaciones de Markov. Hay dos tipos de tales transformaciones:

(M1) Si $\sigma, \tau \in \mathbb{B}_n$, σ y $\tau^{-1}\sigma\tau$ representan el mismo enlace.

(M2) Si $\sigma \in \mathbb{B}_n$, entonces σ y $\sigma\sigma_n \in \mathbb{B}_{n+1}$ representan el mismo enlace.

Observación 1. Observemos que dos trenzas conjugadas dan lugar al mismo enlace al cerrarlas, ya que la trenza de conjugación se compensa con su inversa. La última relación de (1) se corresponde exactamente a la tercera jugada de Reidemeister. La

segunda jugada corresponde al producto $\sigma_i\sigma_i^{-1}$, mientras que la primera jugada se corresponde con (M2).

Lo que sucedió en mayo de 1984, cuando se descubrió el polinomio de Jones, está documentado en una amplia y amena entrevista realizada a Joan Birman en 2006 y publicada en *Notices of the AMS* [7]. Nos permitimos traducir y resumir aquí algunos de sus párrafos:

Un día de principios de mayo de 1984, me llamó Vaughan Jones para preguntarme cuándo podríamos reunirnos para hablar de matemáticas. Me llamaba porque había descubierto una función traza especial sobre representaciones de trenzas y le habían dicho que yo era experta en trenzas y podía tener ideas sobre su utilidad.¹

Ciertamente, en esa fecha Joan Birman era ya una matemática de prestigio universalmente conocida, autora de varios artículos sobre trenzas, entre ellos [2], un clásico sobre el tema publicado en 1974.

Cuenta Joan en la entrevista que en un principio tuvieron las lógicas dificultades para entenderse como consecuencia de trabajar en campos diferentes. Joan aportó, entre otras cosas, su conocimiento sobre las transformaciones de Markov y Vaughan el suyo sobre su función traza de representaciones de trenzas.

Jones trabajaba con unas C^* -álgebras denotadas A_n y muy cercanas a los grupos de trenzas. Las álgebras A_n están engendradas por $n + 1$ elementos $1, e_1, \dots, e_n$ que cumplen:

- (C*1) $e_i^2 = e_i = e_i^*$;
- (C*2) $e_i e_{i\pm 1} e_i = \tau e_i, \tau \in \mathbb{R}$;
- (C*3) $e_i e_j = e_j e_i$, si $j - i > 1$.

La relación aludida anteriormente entre estas álgebras y los grupos de trenzas es la representación $\pi_0 : \mathbb{B}_{n-1} \rightarrow A_n$ dada por $\pi_0(\sigma_i) := te_i - (1 - e_i)$. Basta comprobar que se cumplen las relaciones de (1).

Estas álgebras admiten una aplicación traza tr_τ que cumple que la forma hermitiana $\langle a, b \rangle := \text{tr}_\tau(ab^*)$ es definida positiva. No vamos a entrar en la definición de esta traza. Sin embargo, podemos destacar que cumple la siguiente relación:

(C*4) $\text{tr}_\tau(xe_{n+1}) = \tau \text{tr}_\tau(x)$ si $x \in A_n$.

Podemos considerar (C*4) como una relación de tipo Markov análoga a (M2). En cualquier caso, esta propiedad determina completamente la función traza tr_τ .

Sea $t \in \mathbb{C}$ tal que $\tau^{-1} = 2 + t + t^{-1}$. Una de las consecuencias de ser una función de tipo traza es que $\text{tr}_\tau \circ \pi_0$ es constante sobre las clases de conjugación. Sin embargo, en general ésta no respeta el segundo movimiento de Markov (si $\tau \neq 1$).

¹One day in early May 1984, Vaughan Jones called to ask whether we could get together to talk about mathematics. He contacted me because he had discovered certain representations of the braid group and what he called a “very special” trace function on them, and people had told him that I was the braid expert and might have some ideas about its usefulness.

Volvamos al relato de lo sucedido en mayo de 1984. Tras varios días de trabajo conjunto sin avances significativos, una noche Vaughan tuvo la idea clave de realizar un nuevo escalamiento en su función traza de manera que fuera invariante por transformaciones de Markov: la expresión

$$\left(-\frac{t+1}{\sqrt{t}}\right)^{n-1} \sqrt{t^e} \operatorname{tr}_\tau(\pi_0(\alpha)), \quad \alpha \in \mathbb{B}_n, \quad (2)$$

también es invariante por (M2), donde $e := \deg \alpha$, es decir la suma de los exponentes de cualquier palabra en $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ que represente a α . La demostración de que su traza normalizada era un invariante de enlaces era entonces inmediata.

DEFINICIÓN 2. El *polinomio de Jones* de un enlace L se obtiene a partir de la fórmula (2) para cualquier trenza α tal que al cerrarla se obtiene el enlace L .

El día siguiente fue para Joan y Vaughan una jornada de intenso y fructífero trabajo. En primer lugar había que aclarar si se trataba de una nueva encarnación de un invariante ya conocido, como ocurrió con el polinomio de Conway. Al tratarse de un polinomio de Laurent en una variable había un sospechoso evidente: ¿estaría relacionado con el polinomio de Alexander?

Para obtener la respuesta se necesitaba calcularlo en algunos ejemplos. Joan propuso calcularlo para el nudo trébol, que es el nudo no trivial más sencillo, y su imagen en el espejo. Ambos tienen el mismo polinomio de Alexander:

¡El nuevo polinomio obtenido por Jones distingue los dos nudos trébol!

Este resultado ya era excitante en sí mismo. Por una parte queda claro que el nuevo polinomio no se puede escribir en términos exclusivos del polinomio de Alexander. Por otro, aparece como un invariante extremadamente simple para poder comparar un nudo y su imagen especular y así poder decidir si un nudo es anfiqueiral (equivalente a su imagen especular).

Volvieron a repasar todos los cálculos, analizaron más ejemplos, incluido el nudo KT de 11 cruces (Kinoshita-Terasaka, ver la figura 3) cuyo polinomio de Alexander es 1, como el del nudo trivial:

¡El nuevo polinomio también distingue el nudo KT del nudo trivial!

Joan pensó que esto era un descubrimiento sorprendente, realmente se disponía de un nuevo invariante polinómico de la clase de isotopía de enlaces orientados, capaz de distinguir nudos de su imagen en el espejo. Y como tal lo difundieron entre todos los topólogos que trabajábamos en temas relacionados con los nudos. El anuncio se publicó en [8] y posteriormente los detalles en [9].

3.3. CONSECUENCIAS DEL DESCUBRIMIENTO

Tras conocerse el nuevo invariante $V_L(t)$, muchos matemáticos nos pusimos a trabajar en varias direcciones:

- (J1) Encontrar un algoritmo sencillo para calcularlo, tal como existía para el polinomio de Conway.

- (J2) Comprobar si era o no un invariante completo, buscando nudos distintos con el mismo polinomio.
- (J3) Generalizarlo.
- (J4) Buscar una interpretación topológica del polinomio, de su variable y de sus coeficientes.

1. Problema (J1). Pronto se conoció que el polinomio de Jones se podía definir de forma axiomática sin necesidad de recurrir a diagramas en forma de trenza. Una excelente presentación de este método de cálculo se encuentra en [5].

El polinomio de Jones $V_L(t)$ asociado a un nudo o enlace orientado L cumple los siguientes axiomas, en la misma línea que los que dan lugar al polinomio de Conway:

(V1) El polinomio del nudo trivial O es 1: $V_O(t) = 1$.

(V2) Los polinomios de L_+ , L_- y L_0 están relacionados por la ecuación

$$\frac{1}{t}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)V_{L_0}(t).$$

Los dos métodos de cálculo presentados (mediante trenzas cerradas o relaciones de madeja) son complementarios.

2. Problema (J2). En cuanto a la segunda cuestión, Jones encontró en [9] nudos distintos con el mismo polinomio de Alexander que también compartían polinomio de Jones. Pero también se encontraron enlaces con el mismo polinomio de Jones, pero distinto polinomio de Alexander, lo que demuestra no sólo que no es un invariante completo, sino que es un invariante distinto al de Alexander.

3. Problema (J3). La generalización de estos polinomios a un polinomio de dos variables definido axiomáticamente, cambiando los coeficientes del segundo axioma, fue obtenida casi de manera simultánea por varios matemáticos, que casualmente enviaron el anuncio de su descubrimiento a la misma revista: *Bulletin of the American Mathematical Society*. Los editores de la revista se encontraron con cuatro anuncios del mismo resultado enviados con pocos días de diferencia, entre finales de septiembre y primeros de octubre de 1984 (y alguno más que no llegó a tiempo por problemas en la distribución del correo). Era evidente que los cuatro grupos lo habían obtenido independientemente inspirados por el reciente trabajo de Jones. Los editores escribieron una nota a pie de página en el artículo finalmente publicado [6] explicando que los artículos originales pasaron el correspondiente proceso de revisión y cualquiera de ellos tenía la originalidad y calidad suficiente para ser publicados. La alternativa de publicar los cuatro o ninguno no parecía satisfactoria, así que decidieron publicar un único artículo firmado por los seis autores, con una sección introductoria conteniendo lo básico y cuatro secciones más, cada una escrita por cada uno de los grupos autores de los anuncios aportando su proceso de demostración. Uno de los trabajos lo presentaban conjuntamente P. Freyd y D. Yetter, y otro W.B.R. Lickorish y K.C. Millett; el resto eran trabajos individuales de J. Hostey y A. Ocneanu. Al polinomio se le llamó HOMFLY, usando las iniciales de los

autores en un orden fácil de recordar, y se designa por $P_K(v, z)$. Es un invariante de enlaces orientados o nudos no orientados. Los axiomas de definición utilizando relaciones de madeja son los siguientes:

(H1) $P_O(v, z) = 1$;

(H2) $v^{-1}P_{L_+}(v, z) - vP_{L_-}(v, z) = zP_{L_0}(v, z)$.

Su relación con los polinomios anteriores está dada por

$$V_K(t) = P_K\left(t, \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right),$$

$$\nabla_K(t) = P_K\left(1, \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right).$$

Es decir, este polinomio en dos variables contiene toda la información que guardan los polinomios de Alexander y Jones. Describamos brevemente cómo se obtiene a partir de funciones traza.

El polinomio HOMFLY se define a partir de álgebras de Hecke $H(q, n)$ de tipo A_{n-1} que se pueden ver como una *deformación* de la presentación de Artin (1):

$$H(q, n) := \left\langle g_1, \dots, g_{n-1} \left| \begin{array}{l} g_i g_j = g_j g_i, \quad g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \quad g_i^2 = (q-1)g_i + q \\ |i-j| \geq 2, \quad 1 \leq i < n-1, \quad 1 \leq i < n \end{array} \right. \right\rangle. \tag{3}$$

El parámetro q es una variable (que se puede evaluar en \mathbb{C}). La asignación $\sigma_i \mapsto g_i$ define una representación $\pi : \mathbb{B}_n \rightarrow H(q, n-1)$.

Las álgebras A_n definidas por Jones y descritas en la página 585 son cocientes de éstas. Como en el caso del grupo de trenzas, la presentación (3) permite establecer inclusiones naturales y $H(q, n) \subset H(q, n+1)$ y trabajar con los límites inductivos como uniones infinitas. Ocneanu [6] demostró que, dado $z \in \mathbb{C}$, existe una única *función traza* $\text{tr}_z : \bigcup_{n=1}^{\infty} H(q, n) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

(O1) $\text{tr}_z(ab) = \text{tr}_z(ba)$;

(O2) $\text{tr}_z(1) = 1$;

(O3) $\text{tr}_z(xg_n) = z \text{tr}_z(x), x \in H(q, n)$.

La relación (O3) es análoga al segundo movimiento de Markov (M2). A partir de ahí, se trata de buscar una normalización de este invariante que sea estable por (M2). Esto se consigue definiendo $\lambda := \frac{1-q+z}{qz}$ y tomando la siguiente generalización de (2):

$$\left(-\frac{1-\lambda q}{\sqrt{\lambda}(1-q)}\right)^{n-1} \lambda^{e/2} \text{tr}_z(\pi(\alpha)), \quad \alpha \in \mathbb{B}_n. \tag{4}$$

La presentación original de Jones se obtiene a partir de ésta.

4. Problema (J4). Empezaba el auge de la teoría combinatoria de nudos. En un principio la demostración de que estos polinomios eran invariantes topológicos resultaba laboriosa y exigía el conocimiento de otras técnicas. En este campo hay que

destacar el trabajo de Louis Kauffman, que ya trabajaba en teoría de nudos desde el punto de vista combinatorio desde los años 1970, pero este enfoque no despertaba todavía mucho interés. Kauffman es autor de otro invariante polinómico [11] que generaliza al de Jones con la gran ventaja de que la demostración de que es invariante topológico es sumamente sencilla. Kauffman introduce un invariante —conocido como *corchete de Kauffman*— definido para enlaces (no orientados) con marco. El marco de un enlace se obtiene eligiendo para cada componente un nudo *paralelo y cercano* a la componente. Hay que observar que esta elección no es única.

Kauffman es autor de varios libros y numerosos artículos donde demuestra la utilidad de estos invariantes para probar antiguas conjeturas de nudos y en los que acerca el mundo de los nudos a la física, de manera fructífera para ambos campos.

En concreto, la sencilla definición de Kauffman del *corchete* de un diagrama es como sigue:

- (K1) $\langle O \rangle = 1$, donde O representa el diagrama estándar del nudo trivial;
- (K2) $\langle \otimes \rangle = A \langle \bigcirc \rangle + A^{-1} \langle \ominus \rangle$;
- (K3) $\langle O \cup D \rangle = -(A^2 + A^{-2}) \langle D \rangle$, donde $O \cup D$ representa la unión no enlazada de los diagramas D y O .

A diferencia de las anteriores definiciones por relaciones de madeja, ésta no da lugar a un invariante de enlaces ya que no es invariante por el primer movimiento de Reidemeister (aunque sí por los demás). La interpretación natural es la siguiente. El corchete produce un invariante de enlaces *con marco*; es decir, a cada componente de un enlace L le asociamos un nudo *paralelo y cercano* a la componente, que se llama la *longitud* de la componente. Un diagrama de un enlace con marco se obtiene cuando, al proyectar, las longitudes son paralelas a las componentes originales.

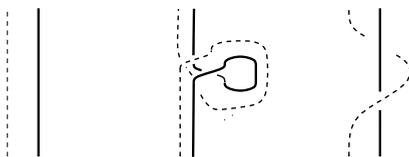


Figura 5: Enlaces con marco.

Los dos primeros fragmentos de la figura 5 representan el diagrama de un enlace con marco. En el último, se sigue la pista de la longitud después de realizar una jugada de Reidemeister de tipo $R1$. Si ahora fijamos una orientación \vec{D} del diagrama D , le podemos asociar un número $w(\vec{D})$ (conocido como *torsión topológica*² del diagrama) que consiste en sumar el número de cruces positivos D_+ y restarle el número de cruces negativos D_- (ver la figura 4). Bajo estas condiciones $(-A^3)^{-w(\vec{D})} \langle \vec{D} \rangle$ define un polinomio de Laurent en A invariante con respecto a todos los movimientos de Reidemeister. Recuperamos el polinomio de Jones con el cambio $A = t^{-1/4}$.

²writhe.

Kauffman resuelve de esta manera conjeturas clásicas de teoría de nudos abiertas hasta ese momento. Más adelante, Khovanov [12] categoriza el corchete de Kauffman asociando a cada diagrama un complejo de cadenas de espacios vectoriales graduados de manera que la homología de dicho complejo es un invariante del enlace. La característica de Euler de dicha homología resulta ser el polinomio de Jones. Estas nuevas técnicas han permitido resolver problemas relacionados con los nudos *rebanada*³ y *cinta*⁴.

4. EPÍLOGO

El polinomio de Jones supuso una revolución en la teoría de nudos. Permitted su acercamiento a otras ciencias. Los biólogos se interesaron por un invariante fácil de calcular e interpretar que les podía permitir distinguir los nudos que forman las cadenas de ADN.

En la búsqueda de una interpretación geométrica o topológica del polinomio de Jones y sus parientes, trabajaron también insignes físico-matemáticos, como Edward Witten, también medalla Fields en el mismo ICM 1990. Nuevos invariantes provenientes de ideas físicas *invadieron* (en el buen sentido de la palabra) campos aparentemente alejados de esta ciencia como la topología geométrica o la geometría enumerativa. Las categorizaciones realizadas por matemáticos para dar fundamento a los nuevos invariantes han permitido crear lazos entre campos que van desde la física a la combinatoria pasando por la topología. En la teoría de nudos que nos ocupa, las nuevas técnicas han permitido resolver problemas clásicos; Jones y su polinomio son en gran parte responsables.

La teoría combinatoria de nudos sigue siendo una rama activa de la topología. Una muestra de la actualidad del primer trabajo de Jones donde se define su polinomio es que tiene 182 citas en *MathSciNet*, de las que 13 son de artículos publicados en 2010. Según *Google Scholar*, el número de citas es 915.

REFERENCIAS

- [1] J.W. ALEXANDER, A lemma on systems of knotted curves, *Nat. Acad. Proc.* **9** (1923), 93–95.
- [2] J.S. BIRMAN, *Braids, Links, and Mapping Class Groups*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1974, Annals of Mathematics Studies, No. 82.
- [3] J.S. BIRMAN, On the work of Vaughan F. R. Jones, *Addresses on the works of Fields medalists and Rolf Nevanlinna Prize winner (Kyoto, 1990)*, ICM-90, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1990.
- [4] J.H. CONWAY, An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties, *Computational Problems in Abstract Algebra* (Proc. Conf., Oxford, 1967), Pergamon, Oxford, 1970, pp. 329–358.

³slice.

⁴ribbon.

- [5] P. DE LA HARPE, M. KERVAIRE Y C. WEBER, On the Jones polynomial, *Enseign. Math. (2)* **32** (1986), no. 3-4, 271–335.
- [6] P. FREYD, D. YETTER, J. HOSTE, W.B.R. LICKORISH, K. MILLETT Y A. OCNEANU, A new polynomial invariant of knots and links, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **12** (1985), no. 2, 239–246.
- [7] A. JACKSON Y L. TRAYNOR, Interview with Joan Birman, *Notices Amer. Math. Soc.* **54** (2007), no. 1, 20–29.
- [8] V.F.R. JONES, A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **12** (1985), no. 1, 103–111.
- [9] V.F.R. JONES, Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials, *Ann. of Math. (2)* **126** (1987), no. 2, 335–388.
- [10] V.F.R. JONES, von Neumann algebras in mathematics and physics, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990)*, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1991, pp. 121–138.
- [11] L.H. KAUFFMAN, State models and the Jones polynomial, *Topology* **26** (1987), no. 3, 395–407.
- [12] M. KHOVANOV, A categorification of the Jones polynomial, *Duke Math. J.* **101** (2000), no. 3, 359–426.
- [13] J. J. O’CONNOR Y E. F. ROBERTSON, Vaughan Frederick Randal Jones, Disponible en http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Jones_Vaughan.html.
- [14] K. REIDEMEISTER, Elementare Begründung der Knotentheorie, *Abhandlungen Hamburg* **5** (1926), 24–32.

ENRIQUE ARTAL BARTOLO, DPTO. DE MATEMÁTICAS, IUMA, FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

Correo electrónico: artal@unizar.es

MARÍA TERESA LOZANO IMÍZCOZ, DPTO. DE MATEMÁTICAS, IUMA, FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

Correo electrónico: tlozano@unizar.es