Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri Ramírez y José Luis Díaz Barrero

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@dmc.unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 30 de septiembre de 2012.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 193. *Propuesto por Cristobal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.*

Sean ABC un triángulo en el que las longitudes de sus lados verifican $a \leq b \leq c$ y están en progresión aritmética. Si para dicho triángulo S denota su área y r_a, r_b y r_c sus exinradios, probar que la magnitud

$$\frac{(r_a - r_c)S}{(a-c)b^2}$$

es constante y hallar su valor.

Problema 194. *Propuesto por Juan Manuel Urbano Blanco, Universidad de Granada, Granada.*

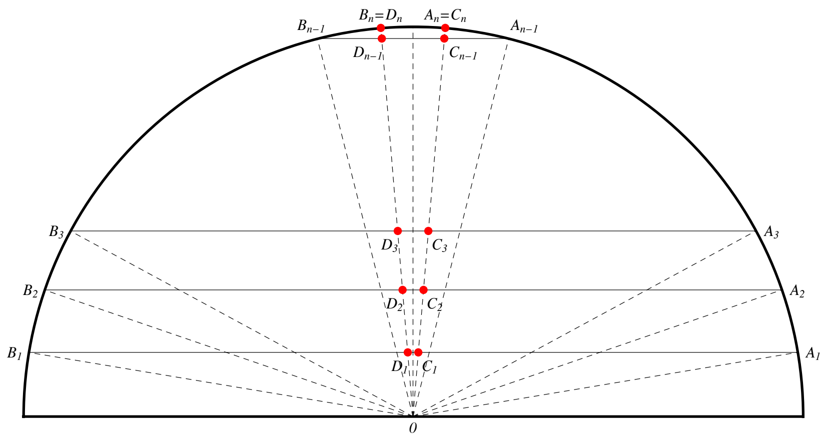
Para cada entero $n \geq 1$, definimos la función

$$f_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \left(\cos^{2^{k+1}} x + \operatorname{sen}^{2^{k+1}} x \right).$$

Determinar el mínimo de cada $f_n(x)$ y el conjunto de valores de x en el que se alcanza.

PROBLEMA 195. *Propuesto por Manuel Prieto Alberca, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid.*

Dividamos en un número impar de partes iguales una semicircunferencia de centro O y radio a, tal y como se muestra en la figura adjunta.



Esquema que ilustra el Problema 195.

Sean $A_1, \ldots, A_n$ y $B_1, \ldots, B_n$ los puntos de división. Tracemos las rectas paralelas al diámetro pasando por los puntos A_i y B_i, para $i = 1, \ldots, n$. Estas rectas cortan a las rectas OA_n y OB_n en los puntos C_i y D_i, para $i = 1, \ldots, n$. Probar que

$$\overline{C_1D_1} + \cdots + \overline{C_nD_n} = a.$$

PROBLEMA 196. *Propuesto por O. Furdui, Cluj, Rumanía, y H. Qin, Universidad de Tecnología de Shandong, Shandong, China.*

Para cada entero positivo $k \geq 2$, probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\log k - H_{kn} + H_n - \frac{k-1}{2kn} \right) = \frac{k-1}{2k} - \frac{\log k}{2} - \frac{\pi}{2k^2} \sum_{j=1}^{k-1} j \cot\left(\frac{j\pi}{k}\right),$$

donde $H_m = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}$.

PROBLEMA 197. *Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.*

Sean a, b y c tres números reales positivos tales que $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Demostrar que

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{c}{\sqrt{b^2+3}} + \frac{a}{\sqrt{c^2+3}} \leq \sqrt[4]{\frac{9(a+b+c)^2}{16abc}}.$$

Problema 198. *Propuesto por Pedro H. O. Pantoja (estudiante), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Brasil.*

Sean p y q dos números primos tales que $p > q$. Demostrar que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) p y q son primos gemelos,

b) $\sigma(p) + \sigma(q) = 2p$,

c) $\phi(p) + \phi(q) = 2q$,

donde $\sigma(n)$ es la suma de los divisores positivos de n y $\phi(n)$ es la función de Euler.

Soluciones

Problema 169. *Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.*

Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo acutángulo $\triangle ABC$. Probar que

$$\sqrt{\frac{a\operatorname{sen}(\cos C)}{ab+a+1}} + \sqrt{\frac{b\operatorname{sen}(\cos A)}{bc+b+1}} + \sqrt{\frac{c\operatorname{sen}(\cos B)}{ca+c+1}} < \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Solución enviada por Xavier Ros, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.

A continuación demostraremos que

$$\sqrt{\frac{a\operatorname{sen}(\cos C)}{ab+a+1}} + \sqrt{\frac{b\operatorname{sen}(\cos A)}{bc+b+1}} + \sqrt{\frac{c\operatorname{sen}(\cos B)}{ca+c+1}} \leq \sqrt{3\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right)},$$

con igualdad si y sólo si $a = b = c$. La desigualdad del enunciado se sigue de esta empleando la desigualdad $\operatorname{sen} x < x$, válida para $x > 0$.

En primer lugar, por la desigualdad de Cauchy tenemos que

$$\left(\sqrt{\frac{a\operatorname{sen}(\cos C)}{ab+a+1}} + \sqrt{\frac{b\operatorname{sen}(\cos A)}{bc+b+1}} + \sqrt{\frac{c\operatorname{sen}(\cos B)}{ca+c+1}}\right)^2$$

$$\leq \big(\operatorname{sen}(\cos A) + \operatorname{sen}(\cos B) + \operatorname{sen}(\cos C)\big)\left(\frac{1}{b+1+\frac{1}{a}} + \frac{1}{c+1+\frac{1}{b}} + \frac{1}{a+1+\frac{1}{c}}\right).$$

Además, usando que la función $\sin(\cos x)$ es cóncava en $(0, \frac{\pi}{2})$ y la desigualdad de Jensen, se verifica que

$$\operatorname{sen}(\cos A) + \operatorname{sen}(\cos B) + \sin(\cos C) \leq 3\operatorname{sen}\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) = 3\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Para concluir basta probar que

$$\frac{1}{b+1+\frac{1}{a}}+\frac{1}{c+1+\frac{1}{b}}+\frac{1}{a+1+\frac{1}{c}}\leq 1,$$

con igualdad si y sólo si $abc=1$.

Resulta inmediato comprobar que la función

$$f(x)=\frac{1}{x+1+\frac{1}{b}}+\frac{1}{a+1+\frac{1}{x}},\qquad x>0,$$

alcanza el máximo absoluto en $x=\frac{1}{ab}$ y, por lo tanto,

$$\frac{1}{b+1+\frac{1}{a}}+\frac{1}{c+1+\frac{1}{b}}+\frac{1}{a+1+\frac{1}{c}}=\frac{1}{b+1+\frac{1}{a}}+f(c)\leq\frac{1}{b+1+\frac{1}{a}}+f\left(\frac{1}{ab}\right)=1,$$

como queríamos demostrar.

También resuelto por D. Lasaosa, Kee-Wai Lau, J. A. Múgica, M. Prieto y el proponente.

PROBLEMA 170. *Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Universidad Complutense de Madrid, Madrid.*

Para cada $n\geq 2$ fijo consideramos $x_1,\ldots,x_n$ números reales positivos. Probar que para todo entero positivo k se verifica que

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^k-\sum_{i=1}^{n}x_i^k\geq(n^k-n)\prod_{i=1}^{n}x_i^{k/n}.$$

Solución enviada por Kee-Wai Lau, Hong Kong, China.

Asumiremos $k\geq 2$ ya que la desigualdad es trivial para $k=1$.

Definimos los conjuntos $S_1=\{x_1,\ldots,x_n\}$, $S_2=\{x_1^k,\ldots,x_n^k\}$,

$$S_3=\left\{\prod_{i=1}^{k}a_i : a_i\in S_1,\ i=1,\ldots,k\right\}$$

y $S_4=S_3\setminus S_2$. Es sencillo comprobar que el cardinal de S_4 es n^k-n y que

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^k-\sum_{i=1}^{n}x_i^k=\sum_{x\in S_4}x.$$

Aplicando la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica se tendrá

$$\sum_{x\in S_4}x\geq(n^k-n)\left(\prod_{x\in S_4}x\right)^{1/(n^k-n)}.$$

Resulta que $\prod_{x\in S_4} x$ es el producto de $k(n^k - n)$ números tomados de S_1 y, por simetría, cada x_i aparece $k(n^{k-1} - 1)$ veces. Por tanto

$$\prod_{x\in S_4} x = \prod_{i=1}^{n} x_i^{k(n^{k-1}-1)}$$

y se obtiene el resultado solicitado.

También resuelto por A. Castaño, M. Fernández, D. Lasaosa, J. A. Múgica, P. Perfetti, B. Salgueiro, A. Stadler y el proponente.

Problema 171. *Propuesto por Ovidiu Furdui, Cluj, Rumanía.*

Para cada entero no negativo k, probar que

$$\int_0^1\int_0^1 \left\{\frac{x}{y}\right\}^k dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\}^k dx + \frac{1}{2(k+1)} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\zeta(p+1)-1}{\binom{k+p}{p}} + \frac{1}{2(k+1)},$$

donde $\{a\}$ es la parte decimal de a y $\zeta(z)$ es la función zeta de Riemann.

Deducir que

$$\int_0^1\int_0^1 \left\{\frac{x}{y}\right\} dx\,dy = \frac{3}{4} - \frac{\gamma}{2} \qquad \text{y} \qquad \int_0^1\int_0^1 \left\{\frac{x}{y}\right\}^2 dx\,dy = \frac{\log(2\pi)}{2} - \frac{1}{3} - \frac{\gamma}{2},$$

siendo γ la constante de Euler-Mascheroni.

Solución enviada por Albert Stadler, Herrliberg, Suiza.

La solución de la propuesta es consecuencia de la identidades

$$\text{a)}\quad \int_0^1\int_0^1 \left\{\frac{x}{y}\right\}^k dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\}^k dx + \frac{1}{2(k+1)},$$

$$\text{b)}\quad \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\zeta(p+1)-1}{\binom{k+p}{p}} = \int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\}^k dx, \qquad \text{c)}\quad \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\zeta(p+1)-1}{p+1} = 1-\gamma$$

y

$$\text{d)}\quad \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\zeta(p+1)-1}{(p+1)(p+2)} = \frac{\log(2\pi)}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2}.$$

Procedamos a probar cada una de ellas.

Prueba de a). Cortando la integral por la recta $y = x$ tendremos

$$\int_0^1\int_0^1 \left\{\frac{x}{y}\right\}^k dx\,dy = \int_0^1\int_0^x \left\{\frac{x}{y}\right\}^k dy\,dx + \int_0^1\int_x^1 \left\{\frac{x}{y}\right\}^k dy\,dx.$$

Para la primera integral, aplicando el cambio de variable $y = xt$, se deduce que

$$\int_0^1 \int_0^x \left\{ \frac{x}{y} \right\}^k dy\, dx = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{t} \right\}^k dt \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \frac{1}{t} \right\}^k dt.$$

Para la segunda integral, teniendo en cuenta que $\left\{ \frac{x}{y} \right\} = \frac{x}{y}$, se verifica

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_x^1 \left\{ \frac{x}{y} \right\}^k dy\, dx &= \begin{cases} \dfrac{1}{k-1} \displaystyle\int_0^1 (x - x^k)\, dx = \dfrac{1}{2(k+1)}, & k > 1, \\ -\displaystyle\int_0^1 x \log x\, dx = \dfrac{1}{4}, & k = 1, \end{cases} \\ &= \frac{1}{2(k+1)}, \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración de a).

Prueba de b). Mediante ciertas manipulaciones elementales, se puede comprobar que

$$\int_0^1 \left\{ \frac{1}{x} \right\}^k dx = \int_1^\infty \frac{\{x\}^k}{x^2}\, dx = \sum_{j=1}^\infty \int_j^{j+1} \frac{(x-j)^k}{x^2}\, dx = \sum_{j=1}^\infty \int_0^1 \frac{x^k}{(x+j)^2}\, dx.$$

Puesto que $\frac{1-x}{1+j} < 1$, podemos usar la identidad

$$\frac{1}{(x+j)^2} = \frac{1}{(j+1)^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{x-1}{j+1}\right)^2} = \sum_{p=1}^\infty \frac{p(1-x)^{p-1}}{(j+1)^{p+1}},$$

y entonces

$$\int_0^1 \frac{x^k}{(x+j)^2}\, dx = \sum_{p=1}^\infty \frac{p}{(j+1)^{p+1}} \int_0^1 (1-x)^{p-1} x^k\, dx = \sum_{p=1}^\infty \frac{1}{(j+1)^{p+1}} \frac{k!\, p!}{(k+p)!}.$$

Por tanto

$$\int_0^1 \left\{ \frac{1}{x} \right\}^k dx = \sum_{j=1}^\infty \sum_{p=1}^\infty \frac{1}{(j+1)^{p+1} \binom{k+p}{p}} = \sum_{p=1}^\infty \frac{\zeta(p+1) - 1}{\binom{k+p}{p}}.$$

Prueba de c). La identidad puede probarse mediante la igualdad

$$\sum_{p=1}^\infty \frac{1}{(p+1) j^{p+1}} = -\frac{1}{j} - \log\left(1 - \frac{1}{j}\right),$$

válida para $j \geq 2$, y teniendo en cuenta que

$$\lim_{N \to \infty} \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{j} - \log N \right) = \gamma. \tag{1}$$

En efecto,

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\zeta(p+1)-1}{p+1} = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{(p+1)j^{p+1}} = -\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{1}{j} + \log\left(1-\frac{1}{j}\right)\right)$$
$$= 1 - \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j} - \log N\right) = 1-\gamma.$$

Prueba de d). Del desarrollo en serie de potencias de x

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{1-x}{x}\log(1-x) = \sum_{p=2}^{\infty}\frac{x^p}{p(p+1)}, \qquad |x| \le 1,$$

evaluado en $x = 1/j$, se deduce que

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\zeta(p+1)-1}{(p+1)(p+2)} = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{(p+1)(p+2)j^{p+1}}$$
$$= \sum_{j=2}^{\infty}\sum_{p=2}^{\infty}\frac{1}{p(p+1)j^{p}}$$
$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{j=2}^{N}\left(1 - \frac{1}{2j} + (j-1)\log\left(1-\frac{1}{j}\right)\right).$$

Resulta sencillo comprobar que

$$\sum_{j=2}^{N}\left(1-\frac{1}{2j} + (j-1)\log\left(1-\frac{1}{j}\right)\right) = N - 1 - N\log N + \log(N!) - \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{N}\frac{1}{j}$$
$$= \log\left(\frac{e^N N!}{N^{N+1/2}}\right) + \frac{1}{2}\left(\log N - \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j}\right) - \frac{1}{2}.$$

De este modo, usando (1) y la equivalencia de Stirling, se deduce d).

También resuelto por D. Lasaosa, J. A. Múgica y el proponente.

Problema 172. *Propuesto por Andrei R. Baleanu (estudiante), "George Coşbuc" National College, Motru, Rumanía.*

Sean M y N puntos sobre los lados AB y AC de un triángulo ABC tal que el segmento MN es paralelo a BC. La circunferencia circunscrita al triángulo AMN corta los segmentos BN y CM en los puntos P y Q, respectivamente. Las líneas AP y AQ cortan a BC en dos puntos R y S de tal forma que $BC = 2\cdot RS$. Sea E un punto sobre el lado AB y F la intersección de EC y BN. Probar que AF es la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ si y solo si $\frac{AE}{BE} = \frac{AN}{BM}$.

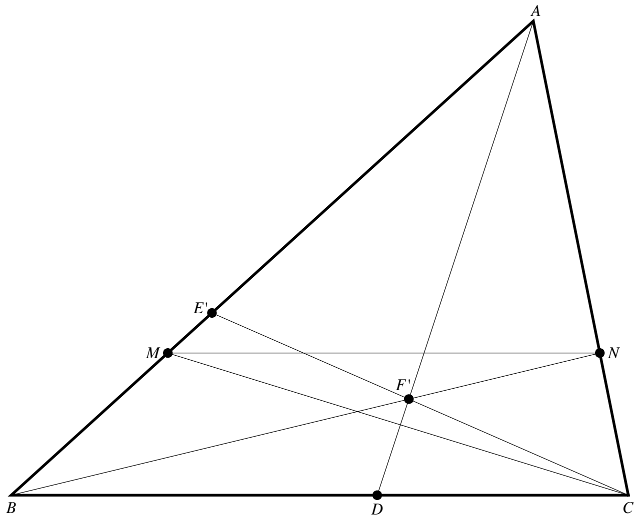


Figura 1: Esquema para la solución del Problema 172.

NOTA. Por error, en el enunciado original el ángulo $\angle BAC$ fue denominado $\angle BCA$. Todas las soluciones recibidas advierten este error y proceden a trabajar con el ángulo correcto.

Solución enviada por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.

Demostraremos que el problema es válido independientemente de la posición del segmento MN. Para ello, definimos D y F' como los puntos de corte de la bisectriz de A con los segmentos BC y BN, respectivamente, y construimos $E' = CF' \cap AB$, como en la figura 1.

LEMA 1. *Con las notaciones anteriores, se verifica* $\frac{AE'}{BE'} = \frac{AN}{BM}$.

DEMOSTRACIÓN. El teorema de Ceva nos permite asegurar que

$$\frac{AE'}{BE'} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CN}{AN} = 1;$$

por el teorema de la bisectriz se cumple que

$$\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA};$$

y, finalmente, el teorema de Thales nos proporciona la igualdad

$$\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA}.$$

La combinación de estos tres resultados prueba el lema. $\square$

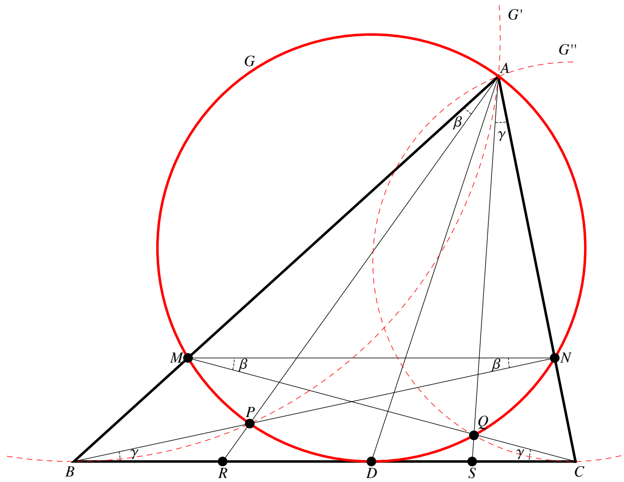


Figura 2: Esquema para el lema 2 del comentario al Problema 172.

Estamos ahora en condiciones de resolver el problema planteado. Si AF es la bisectriz de $\angle BAC$, entonces $F = F'$, con lo cual $E = E'$ y aplicamos el lema 1. Recíprocamente, si $\frac{AE}{BE} = \frac{AN}{BM}$, en virtud del lema 1 E debe necesariamente coincidir con E', con lo cual F coincide con F' y se concluye que AF es la bisectriz de A.

Nota. Aunque la condición $BC = 2 \cdot RS$ resultó ser irrelevante en la solución de este problema, hemos considerado interesante estudiar cuál debe ser la posición del segmento MN para que se cumpla esta propiedad. Esto lo hemos hecho en los lemas 2 y 3.

Lema 2. *Sea D la intersección del lado BC con la bisectriz de A y consideramos la circunferencia G que pasa por A y es tangente a BC en D. Si M y N son los puntos de corte de G con AB y AC, respectivamente, entonces $MN \parallel BC$ y los puntos R y S construidos según el enunciado verifican $BC = 2 \cdot RS$ (véase la figura 2).*

Demostración. Para probar que $MN \parallel BC$, consideramos las igualdades de ángulos

$$\angle DMN = \angle DAN = \angle DAM = \angle BDM,$$

donde hemos usado propiedades de ángulos inscritos en G y el hecho de ser AD bisectriz de A.

Por otra parte, al ser el pentágono $ANQPM$ inscriptible, y $MN \parallel BC$, se tienen los ángulos β y γ indicados en la figura, lo cual permite deducir las siguientes condiciones de tangencia:

- BC es tangente en B a la circunferencia G' que pasa por A, B y P; y
- BC es tangente en C a la circunferencia G'' que pasa por A, C y Q.

Como BC también es tangente a G, razonando con la potencia de R respecto a las circunferencias G y G', se tiene que

$$RD^2 = RP \cdot RA = RB^2;$$

de forma análoga, calculando la potencia de S respecto de G y G'', deducimos que

$$SD^2 = SQ \cdot SA = SC^2.$$

En consecuencia, R es el punto medio de BD, S es el punto medio de DC y se concluye que RS es la mitad de BC. □

LEMA 3. *Sólo hay una posición de MN de manera que $BC = 2 \cdot RS$.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, supongamos que el segmento MN se aleja de la *posición de equilibrio* del lema 2, acercándose al vértice A. Entonces los ángulos β y γ aumentan, con lo cual los puntos R y S se mueven ambos hacia el interior del segmento BC y la longitud de RS decrece. Análogamente, si MN se mueve hacia BC, los puntos R y S se acercan a los extremos B y C y RS aumenta. □

También resuelto por D. Lasaosa y el proponente.

PROBLEMA 173. *Propuesto por Francisco Javier García Capitán, I. E. S. Álvarez Cubero, Priego, Córdoba.*

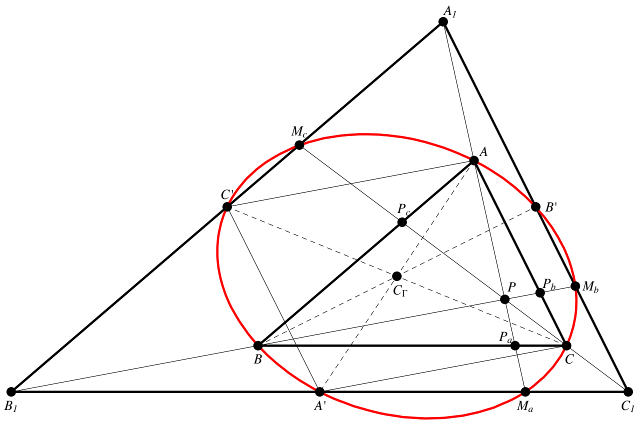
Sea ABC un triángulo y P un punto de su plano (fuera de los lados o sus prolongaciones). Las rectas PA, PB y PC cortan a las rectas BC, CA y AB, respectivamente, en los puntos P_a, P_b y P_c que forman el triángulo ceviano de P respecto de ABC. Sean M_a, M_b y M_c los simétricos de P respecto de P_a, P_b y P_c, respectivamente. Probar que el hexágono $ABCM_aM_bM_c$ está inscrito en una cónica Γ con centro. Si llamamos A', B' y C' a los simétricos de A, B y C con respecto al centro de Γ, probar también que las rectas $A'M_a$, $B'M_b$ y $C'M_c$ son paralelas, respectivamente, a los lados BC, CA y AB.

Solución enviada por Saturnino Campo Ruiz, I. E. S. Fray Luis de León, Salamanca.

Siguiendo la notación introducida en la figura adjunta, una homotecia de centro P y razón 2 transforma el triángulo $\triangle ABC$ en $\triangle A_1B_1C_1$.

Si se considera el cuadrivértice $A_1B_1C_1P$, existirá una cónica Γ (la cónica de los 9 puntos) que pasa por los puntos medios de los 6 lados de ese cuadrivértice (tres son los puntos A, B y C y los otros tres los puntos medios del triángulo $A_1B_1C_1$) y los 3 vértices del triángulo diagonal (puntos M_a, M_b y M_c).

Esta cónica no es una parábola pues, por el teorema de Varignon, los puntos medios del cuadrilátero $A_1PB_1C_1$ forman un paralelogramo inscrito en ella y, por tanto, su centro, denotado por C_Γ, es también el de la cónica. Con esto queda probado que el hexágono $ABCM_aM_bM_c$ está inscrito en una cónica Γ con centro.



Esquema para la solución del Problema 173.

Para demostrar la última parte será suficiente probar que los puntos A', B' y C' del enunciado son los puntos medios de los lados del triángulo $\triangle A_1B_1C_1$. Si llamamos C'', A'' y B'' a esos puntos medios, el centro de la cónica es la intersección de los vértices opuestos del paralelogramo inscrito $ABA''B''$ (puntos medios del cuadrilátero $A_1PB_1C_1$). Por tanto, los vértices A y B son simétricos respecto del centro de la cónica de los vértices B y B'', respectivamente, con lo cual concluimos.

También resuelto por D. Lasaosa, M. Prieto, A. Sáez y el proponente.

Nota. Es posible que la cónica de los nueve puntos a la que se hace referencia en la solución anterior no sea suficientemente conocida por algunos lectores. En el enlace `http://www.aloj.us.es/rbarroso/trianguloscabri/200extrasat.htm` puede verse un trabajo realizado por el autor de la solución en el que detalla algunos aspectos interesantes sobre este tema.

Problema 174. *Propuesto por Mihàly Bencze, Brasov, Rumanía.*

Sean $a_1, \ldots, a_n$ números reales mayores que uno, probar que

$$\prod_{\text{cíclico}} (\log_{a_2} a_1 + \log_{a_3} a_1) \geq 2^n \prod_{\text{cíclico}} \log_{\frac{a_2+a_3}{2}} a_1.$$

Solución enviada por Alberto Castaño Domínguez, Universidad de Sevilla, Sevilla.

Para demostrar la desigualdad del enunciado basta probar que, para cualesquiera números reales mayores que uno a, b y c, se cumple

$$\log_b a + \log_c a \geq 2 \log_{\frac{b+c}{2}} a.$$

Cambiando todos los logaritmos a base a, la desigualdad anterior la podemos reescribir como

$$\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_a c} \geq \frac{2}{\log_a \left(\frac{b+c}{2}\right)},$$

o, lo que es lo mismo,

$$\log_a \left(\frac{b+c}{2}\right) \geq \frac{2}{\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_a c}}.$$

El segundo miembro de esta expresión es la media armónica de $\log_a b$ y $\log_a c$. No queda más que usar las desigualdades entre las medias armónica, aritmética y geométrica y que el logaritmo en base a es creciente. En efecto,

$$\frac{2}{\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_a c}} \leq \frac{\log_a b + \log_a c}{2} = \log_a \left(\sqrt{bc}\right) \leq \log_a \left(\frac{b+c}{2}\right).$$

La igualdad se alcanza para $b = c$, lo que implica que la igualdad en la desigualdad propuesta se tiene para $a_1 = \cdots = a_n$.

También resuelto por M. Fernández, D. Lasaosa, J. Mozo, J. A. Múgica, P. Perfetti, J. Rivero, B. Salgueiro, N. Stanciu y el proponente.