

## Nudos y enlaces en mecánica de fluidos

por

**Alberto Enciso y Daniel Peralta-Salas**

**RESUMEN.** En este artículo revisaremos algunos temas de interés en mecánica de fluidos, en los cuales se pretende analizar aspectos de las trayectorias descritas por las partículas del fluido y que combinan de manera natural ideas de carácter analítico y geométrico. Nos centraremos especialmente en el estudio de trayectorias anudadas y entrelazadas, que se remonta a los trabajos de Lord Kelvin y fue fuertemente impulsado por V. I. Arnold y K. Moffatt en los años 60. Revisaremos también resultados recientes sobre la realización de enlaces como trayectorias de soluciones estacionarias a la ecuación de Euler módulo difeomorfismo.

### 1. INTRODUCCIÓN

La mecánica de fluidos es una extensa área de la Física Matemática que presenta numerosos problemas abiertos, muchos de ellos relacionados directamente con la teoría de ecuaciones en derivadas parciales. En este artículo revisaremos algunos de estos problemas, cuyo nexo común es que el principal objeto de interés son las trayectorias descritas por las partículas del fluido. Desde un punto de vista físico, estas preguntas se suelen enmarcar dentro del estudio de fenómenos de turbulencia e inestabilidad hidrodinámica. Matemáticamente, este tipo de cuestiones resultan muy atractivas porque dan lugar a conexiones entre diversas áreas de las matemáticas, tales como ecuaciones en derivadas parciales, sistemas dinámicos y geometría diferencial.

En el contexto de los desarrollos que presentaremos en las siguientes secciones, las dos figuras principales son los matemáticos Leonhard Euler y Vladimir Arnold. A Euler (Basilea, 1707 – San Petersburgo, 1783), unánimemente reconocido como uno de los más grandes y prolíficos matemáticos de la historia, se le debe la introducción de la ecuación que gobierna la dinámica de los fluidos no viscosos [13], que actualmente se conoce como *ecuación de Euler*.

Además de en mecánica de fluidos, Euler trabajó prácticamente en todas las áreas de las matemáticas de su tiempo: geometría, cálculo, trigonometría, álgebra y teoría de números. También realizó aportaciones en varias áreas de la física; de hecho, su disertación doctoral (realizada bajo la dirección de Johann Bernoulli) versaba sobre la propagación del sonido. Euler introdujo mucha de la notación matemática moderna del cálculo infinitesimal y se le considera el fundador de la topología y de la teoría de grafos, en parte por su resolución del problema de los puentes de

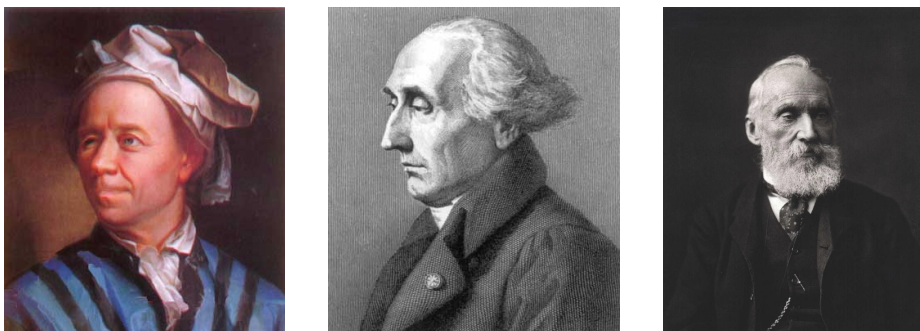


Figura 1: De izquierda a derecha, Euler, Lagrange y Kelvin.

Königsberg. A día de hoy su nombre perdura, por ejemplo, en la característica de Euler, la función Gamma de Euler, las ecuaciones de Euler-Lagrange, los ángulos de Euler de un sólido rígido (p. ej., el trompo de Euler), la constante de Euler-Mascheroni, y la célebre fórmula de Euler:  $e^{i\pi} = -1$ .

El estudio de las trayectorias de las partículas de un fluido, que es el tema central de este artículo, se asocia habitualmente a Joseph-Louis Lagrange (Turín, 1736 – París, 1813), que fue discípulo de Euler y cuyos nombres aparecen ligados en las ecuaciones del cálculo de variaciones. Lagrange fue también un matemático excepcional, en honor al cual se acuñó el término «mecánica lagrangiana».

En lo referente al estudio geométrico de trayectorias de partículas fluidas, el aspecto que más atención ha suscitado es la existencia de trayectorias anudadas o entrelazadas. El origen de estos estudios se remonta hasta William Thomson, más conocido como Lord Kelvin (Belfast, 1824 – Largs, Escocia, 1907). Lord Kelvin destacó por sus importantes trabajos en termodinámica (donde introdujo la escala absoluta de temperaturas) y electromagnetismo, en los que aplicaba sus profundos conocimientos de análisis matemático. El interés de Lord Kelvin en las trayectorias anudadas partía de su teoría atómica, que entendía los átomos como nudos en el éter [17]. Aunque esta teoría quedó pronto obsoleta, motivó fuertemente el desarrollo de la teoría de nudos. En este sentido, resultan también llamativas las nuevas relaciones entre teoría de nudos y diversas áreas de la física teórica que han ido surgiendo desde la segunda mitad del siglo XX, dando lugar en particular a espectaculares conexiones con teoría cuántica de campos a través del trabajo de Edward Witten [27].

El principal impulsor del estudio moderno de trayectorias anudadas fue el distinguido matemático Vladimir Arnold (Odessa, 1937 – París, 2010), creador del campo de la hidrodinámica topológica. La extraordinaria habilidad matemática de Arnold quedó patente ya en su época de doctorando, cuando resolvió el 13.º problema de Hilbert. Arnold realizó destacadas contribuciones en mecánica hamiltoniana, sistemas dinámicos, geometría simpléctica y teoría de singularidades. En particular, es uno de los fundadores de la teoría KAM, en la que su nombre se une con el de su director de tesis, A. Kolmogorov, y con el de J. Moser. También propuso el lla-

mado mecanismo de difusión de Arnold y la conjetura de Arnold sobre trayectorias periódicas de sistemas hamiltonianos, que motivó el nacimiento de la teoría de Floer.

Cabe destacar que las cuestiones sobre trayectorias complejas de partículas fluidas planteadas por Arnold no han resultado de interés únicamente para la comunidad de matemáticos puros (p. ej., [21, 12, 20]), sino que también han atraído la atención de numerosos físicos teóricos y matemáticos aplicados desde que M. Hénon [16] y K. Moffatt [22] comenzaron a investigar en este tema en la década de los años 60 del siglo XX. Una referencia clásica sobre este tipo de cuestiones y su historia es el libro de Arnold y Khesin [4].

El presente artículo se organiza como sigue. En la sección 2 se introduce la ecuación de Euler para fluidos incompresibles y se detalla el tipo de problemas que se revisarán en este trabajo. En la sección 3 se presentan los argumentos heurísticos que llevaron a suponer que cualquier enlace podría aparecer como trayectorias de una solución estacionaria de la ecuación de Euler. En la sección 4 se da una nueva demostración del teorema de estructura de Arnold, que restringe fuertemente el tipo de trayectorias de una solución estacionaria bajo ciertas hipótesis técnicas. En la sección 5 se definen los campos de Beltrami, que proporcionan un tipo de soluciones estacionarias a la ecuación de Euler para las que el teorema de Arnold no se aplica. En la sección 6 enunciamos un teorema reciente que permite realizar cualquier enlace como trayectorias periódicas de una solución de tipo Beltrami. Finalmente, en la sección 7 discutimos algunos problemas abiertos sobre la estructura geométrica de las trayectorias estacionarias de los fluidos.

## 2. LA ECUACIÓN DE EULER

Matemáticamente, un fluido se describe mediante un campo vectorial dependiente del tiempo  $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$ , con la variable espacial  $x$  definida en un dominio  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ , que representa el campo de velocidades del fluido. En este dominio, la ecuación que rige la evolución temporal de este campo es la célebre ecuación de Euler, que se deriva de las ecuaciones de Newton al aplicarlas a un medio continuo [6]. Asumiendo que la densidad del fluido es constante y que el fluido no está sometido a fuerzas exteriores, esta ecuación se escribe como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\nabla P, \quad \operatorname{div} u = 0.$$

La función  $P(x, t)$  representa la presión interna del fluido y no se prescribe de antemano, sino que es una incógnita más del problema, de forma que la ecuación de Euler es un sistema de cuatro ecuaciones en derivadas parciales con cuatro incógnitas:  $u = (u_1, u_2, u_3)$  y  $P$ .

El enfoque lagrangiano a la ecuación de Euler considera las trayectorias  $x(t)$  determinadas por el campo de velocidades, es decir, las soluciones a la ecuación

$$\dot{x} = u(x, t).$$

Físicamente, la trayectoria  $x(t)$  con condición inicial  $x(t_0) = x_0$  representa la evolución temporal de una partícula de fluido que se encuentra en la posición  $x_0$  en el

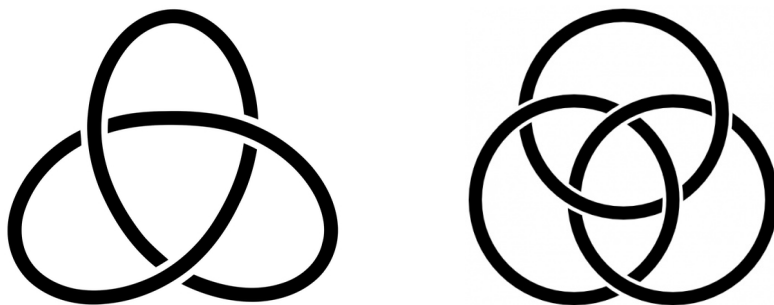


Figura 2: A la izquierda, el nudo conocido como trébol. A la derecha, los anillos de Borromeo, donde los nudos no están enlazados dos a dos pero presentan un enlazamiento no trivial de orden superior.

tiempo  $t_0$ . (Más adelante será conveniente hacer explícita la dependencia en  $t_0$  y  $x_0$  escribiendo  $x(t) = \phi_{t,t_0}(x_0)$ , donde el difeomorfismo  $\phi_{t,t_0}$  define el flujo del campo no autónomo  $u$ .) En dinámica de fluidos, estas trayectorias se denominan *líneas de corriente*. Otro campo vectorial que desempeña un papel muy relevante en el análisis de la ecuación de Euler es la *vorticidad*  $\omega(x, t)$ , que se define como

$$\omega := \text{rot } u.$$

Las trayectorias del campo  $\omega$  se denominan *líneas de vorticidad* y, por motivos físicos, reciben aún más atención que las líneas de corriente.

A lo largo de este artículo nos centraremos especialmente en el estudio de las líneas de corriente y vorticidad de las soluciones a la ecuación de Euler. Este es un tema central de la llamada hidrodinámica topológica, un área de la mecánica de fluidos cuyo origen se remonta a los trabajos fundacionales de V. I. Arnold de mediados de los años sesenta [1, 2] y en la que confluyen el análisis de las ecuaciones en derivadas parciales que gobiernan la evolución de los fluidos, la teoría cualitativa de sistemas dinámicos y la geometría diferencial [5, 4, 18].

Más concretamente, las preguntas que consideraremos pretenden dilucidar los diferentes tipos de curvas que pueden ser líneas de corriente o vorticidad de un fluido. De especial interés son las trayectorias periódicas y la forma en que estas están anudadas y enlazadas entre sí. En este sentido, conviene recordar que un *nudo* es un círculo embebido en  $\mathbb{R}^3$  y que un *enlace* es una unión de nudos disjuntos. Es preciso notar que los círculos no tienen por qué estar embebidos de forma trivial; en la figura 2 aparecen ejemplos de nudos y enlaces no triviales.

### 3. EL CASO ESTACIONARIO

En la literatura sobre la geometría de las líneas de corriente y vorticidad, la situación de mayor interés es cuando el fluido se encuentra en estado *estacionario*, es decir, cuando el campo de velocidades no depende de  $t$ . Un simple cálculo muestra

que en el caso estacionario la ecuación de Euler puede escribirse como

$$u \wedge \operatorname{rot} u = \nabla B, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad (1)$$

donde  $B := P + \frac{1}{2}|u|^2$  es la función de Bernoulli. La peculiaridad de este caso es que existen argumentos físicos, conocidos desde hace décadas, que sugieren la existencia de soluciones estacionarias con líneas de corriente y vorticidad con topologías arbitrariamente complejas.

El argumento que sugiere esta complejidad en el caso de líneas de vorticidad, que en esencia se remonta a Helmholtz [15], se basa en el transporte de la vorticidad. La idea es que si  $u(x, t)$  satisface la ecuación de Euler, su vorticidad verifica la ecuación de transporte

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = [\omega, u], \quad (2)$$

siendo  $[\omega, u]$  el conmutador de campos vectoriales. Por tanto, la vorticidad en tiempo  $t$  puede expresarse en términos de la vorticidad en tiempo  $t_0$ ,  $\omega_0(x)$ , como

$$\omega(x, t) = (\phi_{t, t_0})_* \omega_0(x),$$

siendo  $(\phi_{t, t_0})_*$  el *push-forward* del flujo no autónomo definido por  $u$ . «Congelar» el fluido en tiempo  $t_1$  equivale a considerar las trayectorias  $x(\tau)$  del campo  $\omega(x, t_1)$ , que satisfacen la ecuación

$$\dot{x}(\tau) = \omega(x(\tau), t_1) = (\phi_{t_1, t_0})_* \omega_0(x(\tau)).$$

De aquí se desprende que las «líneas de vorticidad congeladas» en cualquier tiempo  $t_1$  son difeomorfas a las trayectorias definidas por el campo de vorticidad inicial  $\omega_0$ .

Por tanto, si  $\omega_0(x)$  posee un conjunto de trayectorias enlazadas  $L$ , existe un conjunto de trayectorias del «campo congelado»  $\omega(x, t_1)$  difeomorfo a  $L$  (aquí y en lo sucesivo, «difeomorfo» significa a través de un difeomorfismo suave de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$ ). El argumento heurístico ahora es que, si el fluido tiende a una situación de equilibrio, la dependencia en  $t$  de  $u$  y  $\omega$  se debe hacer despreciable, de manera que las líneas de vorticidad para tiempo grande deben parecerse mucho a las trayectorias congeladas en un tiempo  $t_1$  suficientemente grande, y por tanto también debería haber un conjunto de líneas de vorticidad difeomorfo a  $L$ .

Si  $L$  es un enlace finito de clase  $C^\infty$ , es fácil ver que podemos tomar una velocidad inicial  $u_0(x)$ , regular y con divergencia nula, tal que  $L$  es un conjunto de trayectorias de la vorticidad inicial  $\omega_0 := \operatorname{rot} u_0$ . Para esto empezamos realizando el enlace  $L$  como unión de componentes conexas de la intersección de dos conjuntos de nivel  $f^{-1}(1) \cap g^{-1}(1)$ , siendo  $f$  y  $g$  funciones suaves de soporte compacto en  $\mathbb{R}^3$  que intersecan transversalmente en  $L$  (esto se puede hacer porque cualquier enlace tiene fibrado normal trivial;<sup>1</sup> de hecho se puede conseguir que  $L$  sea exactamente la

<sup>1</sup>Recordamos que el fibrado normal del enlace  $L$  es el fibrado vectorial de base  $L$  cuya fibra en cada punto  $x$  es el plano ortogonal al enlace en  $x$ . Dicho fibrado se dice trivial si es equivalente, como fibrado, al producto cartesiano  $L \times \mathbb{R}^2$ .

intersección  $f^{-1}(1) \cap g^{-1}(1)$ , pero esto es mucho más sutil). En términos de estas funciones, podemos prescribir una vorticidad inicial como

$$\omega_0 := \nabla f \wedge \nabla g$$

y obtener la velocidad inicial a través de la ley de Biot-Savart, que expresa el campo de velocidades  $u_0$  en función de su vorticidad a través de la integral singular

$$u_0(x) := \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(x-y) \wedge \omega_0(y)}{|x-y|^3} dy.$$

Este campo está en cualquier espacio de Sobolev  $W^{k,p}(\mathbb{R}^3)$ ,  $1 < p < \infty$ .

Hay dos problemas que impiden hacer riguroso este argumento heurístico. El primero es que hemos hecho hipótesis fuertes sobre la existencia global de la solución  $u(x, t)$  a la ecuación de Euler con dato inicial  $u_0$ . El segundo es que la relación entre las líneas de vorticidad congelada y las líneas de vorticidad reales no es clara, y su análisis en todo caso requeriría mucha información sobre el comportamiento cualitativo de  $u(x, t)$  para tiempos grandes.

El argumento heurístico a favor de la existencia de soluciones estacionarias con líneas de corriente anudadas, debido a V. E. Zakharov y Y. B. Zeldovich, recurre al fenómeno de relajación magnética ([3, Problemas 1973-25 y 1973-26], [14]) en vez de a la congelación de vorticidad. Para esbozar su argumento [23], consideremos el siguiente sistema magnetohidrodinámico:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v &= -\nabla p + \nu \Delta v + B \wedge \text{rot } B, \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= [B, v], \quad \text{div } v = \text{div } B = 0. \end{aligned}$$

En esta ecuación,  $v(x, t)$  representa el campo de velocidades de un plasma,  $B(x, t)$  es el campo magnético asociado y  $p(x, t)$  es la presión del plasma.

Al igual que en el argumento heurístico anterior, la idea es tomar datos iniciales  $(B_0, v_0)$  tales que  $B_0$  tiene un conjunto de trayectorias difeomorfo a un cierto enlace  $L$ . Entonces se argumenta que, si el sistema magnetohidrodinámico tiene existencia global, es razonable que el término viscoso  $\nu \Delta v$  provoque que la velocidad del plasma tienda a cero cuando  $t$  tiende a infinito. Si el campo magnético tiende a un cierto límite  $B_\infty(x)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , se tiene entonces que este campo límite satisface

$$B_\infty \wedge \text{rot } B_\infty = \nabla p, \quad \text{div } B_\infty = 0.$$

Por la ecuación (1),  $B_\infty$  es una solución estacionaria de la ecuación de Euler. Como el campo magnético verifica también una ecuación de transporte, un argumento similar al empleado anteriormente permite intuir que deben existir soluciones estacionarias a la ecuación de Euler con líneas de corriente con cualquier topología. Los problemas que se presentan al intentar hacer riguroso este argumento son similares a los que comentamos en el caso de líneas de vorticidad.

A pesar de que no parece sencillo hacer rigurosos estos argumentos, fueron la principal justificación teórica para la conjetura, bien conocida en el campo de la

hidrodinámica topológica, de que han de existir soluciones estacionarias a la ecuación de Euler con líneas de corriente y vorticidad enlazadas de forma arbitraria.

#### 4. EL TEOREMA DE ESTRUCTURA DE ARNOLD

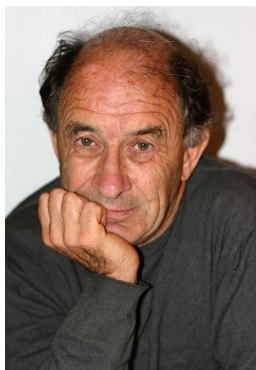


Figura 3: V. I. Arnold.

En virtud de la conjetura formulada en la sección anterior, cabría esperar que las líneas de corriente de un fluido estacionario fuesen un conjunto muy desordenado de órbitas complejas. Desde este punto de vista, resulta sorprendente el llamado teorema de estructura de Arnold, que muestra que, bajo hipótesis razonables, las líneas de corriente se distribuyen de acuerdo a una estructura rígida y ordenada, análoga a la que aparece en los sistemas hamiltonianos integrables. De manera informal, veremos que «la mayoría» de las trayectorias del fluido se distribuyen sobre superficies regulares (toros o cilindros), en las que definen flujos periódicos o cuasi-periódicos. A su vez, estas superficies se ordenan en familias que cubren casi todo el volumen ocupado por el fluido.

A continuación enunciaremos el teorema de estructura de Arnold [1, 2] y daremos una demostración del mismo. Habitualmente la demostración se basa en que, en el caso estacionario, los campos  $u$  y  $\omega$  conmutan, como se desprende inmediatamente de la ecuación (2), luego se tiene esencialmente el mismo tipo de simetrías que aparece en la demostración del teorema de Arnold-Liouville en el contexto de sistemas hamiltonianos integrables. Aquí presentaremos una demostración bastante diferente, que en lugar de utilizar la vorticidad explota que la dimensión es baja y que, por tanto, las posibles topologías son controlables a priori.<sup>2</sup>

**TEOREMA 4.1.** *Sea  $u$  una solución de la ecuación de Euler estacionaria en un dominio acotado  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  con frontera suave. Supongamos que el campo de velocidades es tangente a la frontera, de forma que el dominio  $\Omega$  es invariante bajo el flujo de  $u$ , y que  $u$  es una función analítica en la adherencia de  $\Omega$ . Supongamos también que  $u$  y  $\omega$  no son colineales en todas partes, es decir, que  $u \wedge \omega$  no se anula idénticamente. Entonces existe un conjunto analítico  $C$ , de codimensión al menos 1, tal que  $\Omega \setminus C$  consta de un número finito de subdominios en los que la dinámica tiene una de las dos siguientes estructuras:*

1. *El subdominio está fibrado trivialmente por toros invariantes bajo el flujo de  $u$ . En cada toro existe un difeomorfismo que transforma todas las líneas de corriente en las trayectorias de un campo lineal (racional o irracional).*

<sup>2</sup>La demostración del teorema de estructura que se presenta es un poco más técnica que el resto del artículo. El lector interesado puede encontrar la definición de la mayor parte de los conceptos geométricos y de sistemas dinámicos utilizados en este artículo en [8] y [25]. Las propiedades de los conjuntos analíticos están bien explicadas en [19].

2. El subdominio está fibrado trivialmente por cilindros invariantes bajo el flujo de  $u$  cuyos bordes se encuentran en  $\partial\Omega$ . Todas las líneas de corriente en este subdominio son periódicas.

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis, la función de Bernoulli  $B$  es analítica en la adherencia de  $\Omega$ , luego sus conjuntos de nivel críticos

$$C := B^{-1}(S_1 \cup S_2)$$

definen un conjunto analítico (que generalmente no es una subvariedad). En esta fórmula,

$$S_1 := B(\{x \in \bar{\Omega} : \nabla B(x) = 0\})$$

es el conjunto de valores críticos de  $B$  y  $S_2$  son los valores cuyos conjuntos de nivel son tangentes al borde en algún punto. Como  $B$  no es idénticamente constante por hipótesis, el conjunto  $C$  tiene codimensión al menos 1.

De nuevo por analiticidad,  $\Omega \setminus C$  consta de un número finito de componentes. Sea  $U$  una de ellas. Por definición, el gradiente de  $B$  no se anula en  $U$ , y de la ecuación (1) se sigue que  $B$  es una integral primera del campo  $u$ , esto es,  $u \cdot \nabla B = 0$ . Por tanto los conjuntos de nivel de  $B$  en  $U$  son superficies regulares que son invariantes bajo el flujo de  $u$ . Por la definición de los subdominios, el campo  $u$  es tangente y no se anula en cada una de estas superficies. Si la superficie no tiene borde, se sigue del teorema del índice de Hopf que la superficie es un toro. Además, como la divergencia de  $u$  es cero, es estándar que el *pullback* de  $u$  sobre cada superficie preserva también un volumen: el dado por la 2-forma de volumen de Liouville,  $\mu$ , que se define como

$$dB \wedge \mu = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

De estas condiciones se sigue que  $u$  es, en este caso, orbitalmente conjugado a un campo lineal en el toro [26].

Supongamos ahora que la superficie tiene borde. Este borde está necesariamente contenido en  $\partial\Omega$ , y al ser invariante ha de estar constituido por trayectorias periódicas de  $u$ . Como la función de Bernoulli es analítica y  $\partial\Omega$  es compacto, es evidente que el número  $n$  de trayectorias periódicas es finito. Es estándar que en este caso podemos proceder con un argumento de compactificación. Básicamente, consideramos la superficie sin borde que se obtiene al añadir una «tapa» sobre cada componente del borde. Por analiticidad, es claro que se obtiene una superficie compacta orientable, cuyo género denotamos por  $g$ .

En esta superficie sin borde, el campo  $u$  define de forma natural un sistema dinámico en el que las  $n$  trayectorias periódicas de  $u$  dan lugar a  $n$  centros (singularidades de índice 1), que son las únicas singularidades que posee. Aplicando el teorema del índice de Hopf se llega rápidamente a que el género  $g$  de la superficie sin borde y el número  $n$  de trayectorias periódicas se relacionan mediante la igualdad

$$n = 2 - 2g.$$

La única posibilidad es  $n = 2$  y  $g = 0$ , de tal manera que las superficies sin borde son esferas, que proceden de la compactificación de cilindros con dos trayectorias



periódicas en su borde. (El caso  $n = 0$  y  $g = 1$  se corresponde con el caso de toros invariantes, discutido anteriormente.) Como el pullback de  $u$  al cilindro preserva la forma de volumen de Liouville, de forma que las trayectorias en el cilindro no pueden acumular sobre otras trayectorias, es una consecuencia sencilla del teorema de Poincaré-Bendixson que todas las líneas de corriente sobre el cilindro son periódicas.

Para concluir, basta observar que de la definición de  $C$  se sigue que en  $U$  no pueden coexistir conjuntos de nivel de  $B$  con distinta topología (es decir, toros con cilindros). De hecho, un argumento un poco más elaborado basado en la definición de  $C$  muestra que los conjuntos de nivel de  $B$  definen un fibrado trivial en  $U$ .  $\square$

Es conveniente dedicar unas líneas a discutir la demostración original de Arnold. Esta última se basa en que, por las ecuaciones (1) y (2),  $u$  y  $\omega$  son dos campos no colineales en casi todas partes, que conmutan y que dejan invariantes los conjuntos de nivel de la función de Bernoulli. Esto define una acción local de  $\mathbb{R}^2$ , lo que permite argumentar como en la demostración del teorema de Arnold-Liouville haciendo uso de que el borde del dominio es invariante bajo el flujo de  $u$ . Una ventaja de esta demostración es que permite probar que  $u$  es, en realidad, conjugado (no solo orbitalmente conjugado) a un campo lineal en el toro o a un campo periódico en el cilindro.

No todas las hipótesis del teorema desempeñan un papel igual de importante, como ya hizo notar Arnold en el artículo original. La hipótesis de analiticidad puede reemplazarse por condiciones de finitud y estratificación de los conjuntos de nivel críticos de la función de Bernoulli (por ejemplo, pidiendo que esta sea Morse o Morse-Bott en la adherencia de  $\Omega$ ). La hipótesis de que  $\Omega$  es un dominio acotado puede relajarse también asumiendo que  $u$  y  $\omega$  generan un flujo global (por ejemplo, pidiendo que  $|u(x)| + |\omega(x)| \leq A + B|x|$ ). En este caso sí resulta necesario emplear el enfoque original de Arnold para probar el resultado, en el que también se admitirían trayectorias no periódicas en el cilindro y conjuntos de nivel de  $B$  difeomorfos al plano. Por el contrario, la hipótesis de no-colinealidad sí resulta crucial: de hecho, el propio Arnold conjeturó que cuando  $\omega$  es proporcional a  $u$  es esperable que las líneas de corriente y vorticidad puedan exhibir topologías arbitrariamente complejas [1, 2]. La causa de este aumento de la complejidad se debe a que la función de Bernoulli es constante en este caso, de forma que se pierde la integral primera.

Es destacable que no existe un inverso al teorema de Arnold, esto es, dada una dinámica compatible con la estructura descrita en el teorema no se sabe si existe una solución estacionaria a la ecuación de Euler que realice esta dinámica módulo conjugación orbital. Está claro también que esta estructura impone obstrucciones al tipo de nudos y enlaces que pueden presentar las líneas de corriente y vorticidad; sin embargo, caracterizar completamente estas obstrucciones parece una tarea complicada. Algunos resultados parciales pueden consultarse en [11].

## 5. CAMPOS DE BELTRAMI

En virtud del teorema de estructura de Arnold, resulta natural buscar soluciones estacionarias a la ecuación de Euler con trayectorias complejas entre aquellas para

las que la velocidad y la vorticidad son colineales. Esto nos lleva a considerar las soluciones del sistema

$$\operatorname{rot} u = f u, \quad \operatorname{div} u = 0,$$

siendo  $f(x)$  una función suave en  $\mathbb{R}^3$ .

Tomando la divergencia en la primera ecuación se infiere que  $\nabla f \cdot u = 0$ , esto es, que  $f$  es una integral primera del campo  $u$ . Por tanto, con vistas a obtener soluciones con dinámica compleja centraremos nuestra atención en campos que verifican

$$\operatorname{rot} u = \lambda u \tag{3}$$

en  $\mathbb{R}^3$ , con  $\lambda$  una constante real no nula. Este tipo de soluciones estacionarias se conocen como *campos de Beltrami*.

Desde hace décadas hay evidencia numérica y ciertos resultados analíticos que sugieren que la dinámica de los campos de Beltrami puede ser extremadamente compleja. El ejemplo de campo de Beltrami más estudiado son los campos ABC, introducidos por el propio Arnold y tratados en detalle (por ejemplo) en [7]:

$$u(x) = (A \operatorname{sen} x_3 + C \operatorname{cos} x_2, B \operatorname{sen} x_1 + A \operatorname{cos} x_3, C \operatorname{sen} x_2 + B \operatorname{cos} x_1).$$

Aquí  $A$ ,  $B$  y  $C$  son parámetros reales. Es destacable que toda la intuición sobre campos de Beltrami proviene del análisis de soluciones exactas, que se reducen básicamente a unos pocos ejemplos con simetrías euclídeas y a los campos ABC.

Un interesante intento de atacar la conjetura sobre nudos en hidrodinámica topológica enunciada en la sección 3, debido a J. Etnyre y R. Ghrist, se basa en la conexión entre los campos de Beltrami y la geometría de contacto [12]. La observación fundamental es la siguiente. Sea  $u$  un campo de Beltrami y  $\alpha$  su 1-forma dual, que asocia a cada campo vectorial  $v$  el producto escalar  $u \cdot v$ . En términos de la 1-forma, la ecuación de Beltrami se escribe como

$$* d\alpha = \lambda \alpha \tag{4}$$

siendo  $*$  la estrella de Hodge. Por tanto, si  $u$  es un campo de Beltrami que no se anula en ningún punto,

$$\alpha \wedge d\alpha = \lambda |u|^2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

tampoco se anula, así que la 1-forma dual  $\alpha$  es una forma de contacto. De la misma manera, si  $\alpha$  es una forma de contacto en  $\mathbb{R}^3$ , existe una métrica suave  $g$  (adaptada a  $\alpha$ ) tal que la 1-forma  $\alpha$  satisface la ecuación de Beltrami (4) en la métrica  $g$  (esto es, siendo  $*$  la estrella de Hodge asociada a  $g$ ). El campo dual a la forma  $\alpha$  a través de la métrica  $g$  satisface, por tanto, la ecuación de Beltrami en la nueva métrica.

La utilidad de esta observación es que las técnicas de la geometría de contacto están muy bien adaptadas para construir formas de contacto cuyo campo dual posee un cierto enlace dado como conjunto de trayectorias periódicas. En consecuencia, se obtiene que cualquier enlace es conjunto de líneas de corriente de un campo vectorial que es solución de Beltrami en todo  $\mathbb{R}^3$  en una cierta métrica adaptada al enlace.

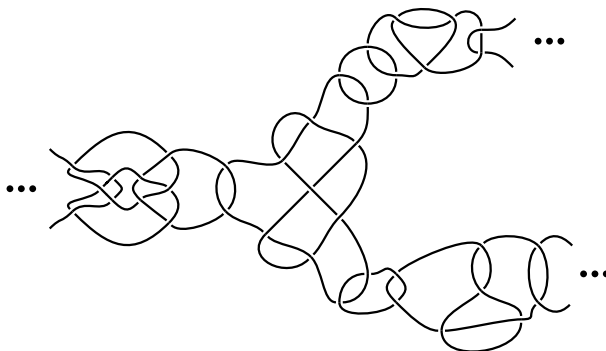


Figura 4: Un enlace localmente finito que contiene los anillos de Borromeo, el trébol y el nudo (7, 4) (cortesía de Javier Rodríguez-Laguna).

La principal limitación de este método es que no es posible estudiar la ecuación de Euler en el espacio euclídeo, sino que se ha de considerar el conjunto de ecuaciones tipo Euler asociadas a una métrica riemanniana arbitraria en  $\mathbb{R}^3$ , obteniéndose el resultado únicamente para cierta métrica adaptada al enlace que se quiere realizar.

## 6. UN TEOREMA DE REALIZACIÓN

Recientemente se ha demostrado, como Arnold sospechaba, que también se pueden emplear los campos de Beltrami para construir soluciones estacionarias a la ecuación de Euler con trayectorias difeomorfas a cualquier enlace dado. Con más precisión, en [9] hemos demostrado el teorema 6.1. Este resultado permite realizar también enlaces con un número infinito de nudos con tal de que los enlaces sean *localmente finitos*, es decir, que solo haya un número finito de nudos que intersequen cualquier conjunto compacto de  $\mathbb{R}^3$ . Enunciaremos el teorema para soluciones de Beltrami con  $\lambda \neq 0$ ; evidentemente para  $\lambda = 0$  el enunciado no puede verificarse, pues en este caso  $u$  es un campo gradiente y no puede, por tanto, tener trayectorias periódicas.

**TEOREMA 6.1.** *Sea  $\lambda$  una constante real no nula y  $L$  un enlace localmente finito. Entonces es posible deformar este enlace mediante un difeomorfismo  $\varphi$  de  $\mathbb{R}^3$ , arbitrariamente cercano a la identidad en cualquier norma  $C^p$ , de forma que  $\varphi(L)$  sea un conjunto de líneas de corriente de una solución de Beltrami  $u$ , que es analítica y satisface la ecuación  $\text{rot } u = \lambda u$  en  $\mathbb{R}^3$ .*

Conviene notar que, en particular y aprovechando que las clases de nudos módulo difeomorfismo son un conjunto numerable, este teorema da una respuesta positiva a la pregunta recogida por Etnyre y Ghrist en [12]: ¿existe una solución estacionaria a la ecuación de Euler en  $\mathbb{R}^3$  cuyas líneas de corriente realizan a la vez todas las clases topológicas de nudos?

A continuación esbozaremos la demostración del teorema. La dificultad de este problema radica en la necesidad de extraer información topológica de una ecuación

ción en derivadas parciales. Para hacer esto, las estrategias puramente topológicas y de sistemas dinámicos que se han empleado hasta la fecha no han resultado muy exitosas porque este tipo de técnicas son demasiado flexibles para capturar una ecuación en derivadas parciales (esto se refleja perfectamente en el enfoque de Etnyre y Ghrist, discutido en la sección 5). También se han propuesto tratamientos puramente analíticos, basados en aplicar argumentos variacionales sobre clases de funciones que obedecen ciertas restricciones topológicas [20]. Estos métodos, desafortunadamente, solo han tenido éxito en problemas con simetrías, donde los argumentos son esencialmente bidimensionales.

La filosofía de nuestra demostración es combinar los métodos flexibles de la topología diferencial y de los sistemas dinámicos (que nos sirven para controlar construcciones auxiliares) con los métodos rígidos de las ecuaciones en derivadas parciales (que permiten relacionar estas construcciones auxiliares con la ecuación). Para simplificar la exposición, y sin entrar en detalles técnicos, dividiremos la demostración en tres pasos. En los pasos 1 y 2 construiremos una solución de Beltrami local (definida en un entorno del enlace  $L$ ) que tiene  $L$  como conjunto de líneas de corriente, mientras que en el paso 3 veremos cómo esta solución local puede aproximarse por una solución de Beltrami global de tal manera que la solución global posee también un conjunto de líneas de corriente difeomorfo a  $L$ .

#### PASO 1:

Tomemos una componente conexa  $L_1$  del enlace  $L$ . Es bien conocido que, perturbando si es necesario  $L_1$  mediante un difeomorfismo pequeño, podemos asumir que  $L_1$  es un nudo analítico (es decir, la imagen de un embebimiento analítico). Como el fibrado normal de un nudo es trivial, podemos tomar una «banda» analítica  $\Sigma$  alrededor de  $L_1$ . Con mayor precisión, existe un embebimiento analítico  $h$  del cilindro  $\mathbb{S}^1 \times (-\delta, \delta)$  en  $\mathbb{R}^3$  cuya imagen es  $\Sigma$  y tal que  $h(\mathbb{S}^1 \times \{0\}) = L_1$ .

En un pequeño entorno tubular  $N_1$  del nudo  $L_1$  podemos tomar un sistema de coordenadas analíticas

$$(\theta, z, \rho) : N_1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times (-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta)$$

adaptado a la banda  $\Sigma$ . Básicamente,  $\theta$  y  $z$  son respectivamente extensiones adecuadas de la variable angular sobre el nudo y de la distancia con signo a  $L_1$  medida sobre la banda, mientras que  $\rho$  es la distancia con signo a  $\Sigma$ .

La utilidad de estas coordenadas es que permiten definir de forma sencilla un campo de vectores  $w_1$  en el entorno  $N_1$  que es clave en el desarrollo de la demostración: simplemente,  $w_1$  es el campo dual a la 1-forma cerrada

$$d\theta - z dz.$$

De esta expresión y de la definición de las coordenadas se sigue que  $w_1$  es un campo analítico tangente a la banda  $\Sigma$  y que  $L_1$  es una trayectoria periódica hiperbólica y estable del pullback sobre  $\Sigma$  de  $w_1$ .

PASO 2:

El campo  $w_1$  construido en el paso anterior servirá ahora para construir una solución local de Beltrami  $v_1$ . Para ello nos valdremos del problema de Cauchy

$$\operatorname{rot} v_1 = \lambda v_1, \quad v_1|_{\Sigma} = w_1. \tag{5}$$

El teorema de Cauchy-Kowalewski no se aplica directamente ya que el rotacional no posee superficies no características. De hecho, es fácil ver que no para cualquier dato de Cauchy analítico tangente a  $\Sigma$  existe solución: una condición necesaria es que el pullback sobre  $\Sigma$  de la 1-forma dual al dato de Cauchy debe ser cerrado.

Mediante un argumento más elaborado, que hace uso de un operador de Dirac, es posible ver que esta condición no es solo necesaria, sino también suficiente. Por tanto, las propiedades del campo  $w_1$  construido en el paso 1 permiten garantizar que existe un único campo analítico  $v_1$  en un entorno del nudo  $L_1$  que resuelve el problema (5). Tomando ahora el entorno  $N_1$  suficiente pequeño, podemos suponer que  $v_1$  está definido en la adherencia  $\overline{N_1}$  de este entorno.

Es obvio que el nudo  $L_1$  es una trayectoria periódica de la solución de Beltrami local  $v_1$ . De hecho, no es difícil ver que esta trayectoria es hiperbólica. La idea es que, por construcción,  $\Sigma$  es una variedad invariante bajo el flujo de  $v_1$  que se contrae exponencialmente sobre  $L_1$ . Como el flujo de  $v_1$  preserva el volumen porque  $v_1$  tiene divergencia 0, necesariamente ha de existir una variedad invariante transversa a  $\Sigma$  que se expande exponencialmente desde  $L_1$ , lo que garantiza la hiperbolicidad del ciclo  $L_1$ .

Como consecuencia de la hiperbolicidad,  $L_1$  es una trayectoria periódica robusta. Más concretamente, por el teorema de permanencia hiperbólica cualquier campo  $u_1$  cercano a  $v_1$  en la norma  $C^p(N_1)$  posee una trayectoria periódica difeomorfa a  $L_1$ , y este difeomorfismo puede escogerse  $C^p$ -cercano a la identidad (y distinto de la identidad únicamente en  $N_1$ ). Aquí  $p$  es cualquier entero mayor o igual que 1.

PASO 3:

Repetiendo el argumento anterior con cada componente  $L_i$  del enlace  $L$ , obtenemos entornos tubulares  $N_i$  de cada nudo  $L_i$  y soluciones de Beltrami locales  $v_i$  en  $\overline{N_i}$ . Podemos asumir que  $\overline{N_i} \cap \overline{N_j}$  es vacío para todo  $i \neq j$ . Es obvio que esto define una solución de Beltrami local  $v$  en el conjunto cerrado

$$S := \bigcup_i \overline{N_i}.$$

La solución de Beltrami global se obtiene a través de un teorema tipo Runge para el operador  $\operatorname{rot} -\lambda$ . Este resultado, cuya demostración hace uso de un teorema de Lax y Malgrange para operadores elípticos [24], permite aproximar soluciones de Beltrami locales por soluciones globales. En vista de que el enlace  $L$  puede tener un número infinito de componentes, es fundamental que el teorema permita aproximación «mejor que uniforme». Con más precisión, lo que se prueba es que,

dada cualquier función positiva y continua  $\epsilon(x)$  en el conjunto cerrado  $S$ , existe una solución de Beltrami global  $u$  cuya diferencia con  $v$  satisface la cota  $C^p$

$$\sum_{|\alpha| \leq p} |D^\alpha u(x) - D^\alpha v(x)| < \epsilon(x)$$

en el conjunto  $S$ .

Para cerrar la demostración del teorema basta con escoger la función de error  $\epsilon(x)$  de tal manera que, por la permanencia hiperbólica discutida en el paso 2,  $u$  tenga una trayectoria periódica difeomorfa a cada  $L_i$  y que este difeomorfismo sea adecuadamente pequeño. Es decir, la permanencia hiperbólica garantiza que para cualquier índice  $i$  y cualquier  $\delta > 0$  existe  $\epsilon_i > 0$  tal que, si  $\|u - v_i\|_{C^p(\overline{N_i})} < \epsilon_i$ , entonces hay un difeomorfismo  $\Phi_i$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $\Phi_i(L_i)$  es una trayectoria periódica de  $u$  y  $\Phi_i - \text{id}$  está soportado en  $N_i$  y está acotado como  $\|\Phi_i - \text{id}\|_{C^p(\mathbb{R}^3)} < \delta$  (siendo  $\text{id}$  la transformación identidad). Por tanto, escogiendo cualquier función de error  $\epsilon(x)$  que sea menor que  $\epsilon_i$  en cada entorno  $N_i$  obtenemos que el difeomorfismo

$$\Phi(x) := \begin{cases} \Phi_i(x) & \text{si } x \in N_i \text{ para algún } i, \\ x & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

satisface la cota  $\|\Phi - \text{id}\|_{C^p(\mathbb{R}^3)} < \delta$  y transforma el enlace  $L$  en un conjunto de trayectorias periódicas del campo de Beltrami  $u$ .

## 7. ALGUNOS PROBLEMAS ABIERTOS

El teorema 6.1 resuelve la conjetura en hidrodinámica topológica sobre la existencia de soluciones estacionarias con trayectorias anudadas. Sin embargo, hay todavía un buen número de cuestiones abiertas muy atractivas sobre este tema, que son de gran interés físico y matemático.

Algunas de estas cuestiones tienen que ver con el comportamiento en infinito de las soluciones construidas en el teorema. Como cualquier solución de Beltrami satisface la ecuación  $\Delta u = -\lambda^2 u$  en todo  $\mathbb{R}^3$ , estos campos no pueden tener energía finita (es decir, no son de cuadrado integrable). De hecho, el argumento esbozado en este artículo no proporciona ninguna información sobre el comportamiento del campo de velocidades en el infinito, si bien un refinamiento de esta estrategia permite obtener soluciones que decaen adecuadamente (y, en particular, están en  $L^p(\mathbb{R}^3)$  para todo  $p > 3$ ) [10]. Sería muy deseable ser capaces de encontrar soluciones con energía finita; el caso de soluciones estacionarias en dominios acotados con condiciones de tangencia en el borde (o incluso en el 3-toro plano) es también de gran importancia.

Otras cuestiones abiertas tienen que ver con la complejidad de las líneas de corriente. Aunque, hasta la fecha, la práctica totalidad de la investigación se ha centrado en el estudio de trayectorias anudadas, la conjetura de Arnold es aún más amplia, pues considera que deberían existir soluciones estacionarias con la misma complejidad que cualquier sistema mecánico con dos grados de libertad, restringido a una hoja de energía [1, 2]. En particular, debería haber soluciones que presenten

los rasgos típicos del caos hamiltoniano, en el que coexisten toros invariantes, órbitas periódicas elípticas y regiones caóticas. Esperamos tratar algunas de estas cuestiones en un futuro cercano [10].

Matemáticamente, estas cuestiones están a caballo entre la teoría de ecuaciones en derivadas parciales y la teoría geométrica de sistemas dinámicos, y presentan un gran desafío para las matemáticas actuales. Físicamente son también muy relevantes por sus conexiones con los fenómenos de turbulencia, por lo que es de esperar que estos problemas continúen atrayendo un considerable interés por parte de la comunidad científica en los años venideros.

#### AGRADECIMIENTOS

Los autores están agradecidos a Boris Khesin por sus valiosos comentarios sobre la historia del estudio de trayectorias anudadas en hidrodinámica y a David Martín de Diego por su cuidadosa lectura de una versión preliminar de este artículo. Este trabajo está financiado parcialmente por el MICINN mediante los proyectos FIS2011-22566 (A.E.) y MTM2010-21186-C02-01 (D.P.S.) y por el proyecto Banco Santander-UCM GR58/08-910556 (A.E.). Los autores están financiados mediante contratos Ramón y Cajal del MICINN.

#### REFERENCIAS

- [1] V. I. ARNOLD, Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits, *C. R. Acad. Sci. Paris* **261** (1965), 17–20.
- [2] V. I. ARNOLD, Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits, *Ann. Inst. Fourier* **16** (1966), 319–361.
- [3] V. I. ARNOLD, *Arnold's problems*, Springer, Berlín, 2004.
- [4] V. I. ARNOLD Y B. KHESIN, *Topological methods in hydrodynamics*, Springer, Nueva York, 1999.
- [5] M. A. BERGER Y R. L. RICCA, Topological ideas and fluid mechanics, *Phys. Today* **49** (1996), 28–34.
- [6] D. CÓRDOBA, M. A. FONTELOS Y J. L. RODRIGO, Las matemáticas de los fluidos: torbellinos, gotas y olas, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **8** (2005), 565–595.
- [7] T. DOMBRE ET AL., Chaotic streamlines in the ABC flows, *J. Fluid. Mech.* **167** (1986), 353–391.
- [8] B. A. DUBROVIN, A. T. FOMENKO Y S. P. NOVIKOV, *Geometría moderna 2*, Editorial URSS, Moscú, 2000.
- [9] A. ENCISO Y D. PERALTA-SALAS, Knots and links in steady solutions of the Euler equation, *Ann. of Math.* **175** (2012), 345–367.
- [10] A. ENCISO Y D. PERALTA-SALAS, Existence of knotted vortex tubes in steady fluid flows, en preparación.
- [11] J. ETNYRE Y R. GHRIST, Stratified integrals and unknots in inviscid flows, *Contemp. Math.* **246** (1999), 99–111.

- [12] J. ETNYRE Y R. GHRIST, Contact topology and hydrodynamics III. Knotted orbits, *Trans. Amer. Math. Soc.* **352** (2000), 5781–5794.
- [13] L. EULER, Principes généraux du mouvement des fluides, *Mémoires de l'Académie des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin* **11** (1757), 274–315.
- [14] M. H. FREEDMAN Y Z. X. HE, Divergence-free fields: energy and asymptotic crossing number, *Ann. of Math.* **134** (1991), 189–229.
- [15] H. VON HELMHOLTZ, Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen, *J. Reine Angew. Math.* **55** (1858), 25–55.
- [16] M. HÉNON, Sur la topologie des lignes de courant dans un cas particulier, *C. R. Acad. Sci. Paris* **262** (1966), 312–314.
- [17] L. KELVIN, On vortex motion, *Trans. Roy. Soc. Edin.* **25** (1869), 217–260.
- [18] B. KHESIN, Topological fluid dynamics, *Notices Amer. Math. Soc.* **52** (2005), 9–19.
- [19] S. G. KRANTZ Y H. R. PARKS, *A primer of real analytic functions*, Birkhäuser, Boston, 2002.
- [20] P. LAURENCE Y E. W. STREDULINSKY, Two-dimensional magnetohydrodynamic equilibria with prescribed topology, *Comm. Pure Appl. Math.* **53** (2000), 1177–1200.
- [21] J. MARSDEN Y A. WEINSTEIN, Coadjoint orbits, vortices, and Clebsch variables for incompressible fluids, *Phys. D* **7** (1983), 305–323.
- [22] H. K. MOFFATT, The degree of knottedness of tangled vortex lines, *J. Fluid Mech.* **35** (1969), 117–129.
- [23] H. K. MOFFATT, Magnetostatic equilibria and analogous Euler flows of arbitrarily complex topology I, *J. Fluid Mech.* **159** (1985), 359–378.
- [24] R. NARASIMHAN, *Analysis on real and complex manifolds*, North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [25] L. PERKO, *Differential equations and dynamical systems*, Springer, Nueva York, 2006.
- [26] S. STERNBERG, On differential equations on the torus, *Amer. J. Math.* **79** (1957), 397–402.
- [27] E. WITTEN, Quantum field theory and the Jones polynomial, *Comm. Math. Phys.* **121** (1989), 351–399.

ALBERTO ENCISO, INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS (CSIC-UAM-UC3M-UCM), C/ NICOLÁS CABRERA 13-15, 28049 MADRID, ESPAÑA

Correo electrónico: [aenciso@icmat.es](mailto:aenciso@icmat.es)

Página web: <http://www.icmat.es/miembros/aenciso>

DANIEL PERALTA-SALAS, INSTITUTO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS (CSIC-UAM-UC3M-UCM), C/ NICOLÁS CABRERA 13-15, 28049 MADRID, ESPAÑA

Correo electrónico: [dperalta@icmat.es](mailto:dperalta@icmat.es)

Página web: <http://www.icmat.es/dperalta>