Hardy-Littlewood-Pólya y arbitraje

por

María J. González y Paul MacManus*

Resumen. El objetivo de este artículo es mostrar la relación que existe entre resultados de Hardy-Littlewood-Pólya sobre medias de funciones convexas y la existencia de arbitraje en la valoración de opciones. Comenzaremos con una revisión de la terminología y los fundamentos básicos sobre la valoración de opciones y su conexión con la teoría de martingalas.

1. Introducción

En el año 1934, Godfrey H. Hardy, John E. Littlewood y George Pólya publican el libro *Inequalities*, reeditado en 1952. En esta gran obra se encuentra un resultado sobre medias de funciones convexas que enunciamos a continuación.

Next, let
$$\phi(x) = 0 \quad (x \leqq a_\nu), \quad \phi(x) = x - a_\nu \quad (x > a_\nu).$$
Then $\phi(x)$ is continuous and convex in any interval, and $\phi(x) \geqq 0$, $\phi(x) \geqq x - a_\nu$. Hence
$$a_1' + a_2' + \ldots + a_\nu' - \nu a_\nu \leqq \Sigma\phi(a') \leqq \Sigma\phi(a) = a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu - \nu a_\nu,$$
which is (3.17.2).

(ii) *Condition* (2) *is sufficient.* If (a') is an average of (a), we have
$$a_\mu' = p_{\mu 1} a_1 + p_{\mu 2} a_2 + \ldots + p_{\mu n} a_n,$$
where
$$p_{\mu\nu} \geqq 0, \quad \sum_{\mu=1}^{n} p_{\mu\nu} = 1, \quad \sum_{\nu=1}^{n} p_{\mu\nu} = 1$$
for all μ and ν. If ϕ is convex, then

(3.17.3) $$\phi(a_\mu') \leqq p_{\mu 1}\,\phi(a_1) + \ldots + p_{\mu n}\,\phi(a_n),$$

and (3.17.1) follows by summation.

(iii) If there is equality in (3.17.1), there must be equality in each of (3.17.3).

If $\phi''(x) > 0$, *and every* $p_{\mu\nu}$ *is positive,* then it follows from Theorem **95** that all the a are equal, in which case all the a' are also equal and the common values are the same.

Figura 1: Extracto de *Inequalities*.

*Los autores desean expresar su agradecimiento a *José Luis Fernández* por su colaboración en este trabajo.

TEOREMA 1. *Consideremos dos sucesiones de números positivos* $(a_j)_{j=1}^n$ *y* $(a'_j)_{j=1}^n$. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Para toda función continua convexa* Φ *se verifica*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Phi(a'_i) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Phi(a_i).$$

2. *La sucesión* (a') *es un promedio de la sucesión* (a), *es decir, existen* n^2 *números positivos* $t_{i,j}$, $(i, j = 1, \ldots, n)$, *tales que*
   i) $\sum_{i=1}^n t_{i,j} = 1, \quad \sum_{j=1}^n t_{i,j} = 1,$
   ii) $a'_i = t_{i,1}a_1 + t_{i,2}a_2 + \cdots + t_{i,n}a_n, \quad (i = 1, \ldots, n).$

Por otro lado, en el *Diccionario de la Real Academia Española* se define *arbitraje* como operación de cambio de valores mercantiles, en la que se busca la ganancia aprovechando la diferencia de precios entre unas plazas y otras. En los mercados financieros el término arbitraje se usa para designar cualquier estrategia de inversión que con coste cero puede producir ganancias sin riesgo alguno de pérdida.

La pregunta es clara, ¿qué tiene que ver el arbitraje con Hardy-Littlewood-Pólya? Como veremos, ¡bastante!

Hasta no hace mucho los mercados financieros se concentraban básicamente en cuatro tipos de productos: deuda, acciones, divisas y futuros. Hacia 1970 experimentan un cambio estructural como consecuencia de la aparición de nuevos contratos, denominados *derivados*. Estos contratos ocasionan flujos de dinero contingentes, ligados al comportamiento futuro de otros objetos financieros, *activos subyacentes*, que pueden ser cualquiera de los cuatro básicos mencionados anteriormente.

Aunque actualmente existe una amplísima gama de derivados financieros y múltiples combinaciones entre ellos, los básicos, y más conocidos, siguen siendo las opciones vainilla, los *forwards*, los futuros y los *swaps*. Esencialmente se utilizan para cubrir el riesgo ante potenciales movimientos en un mercado variable, o para especular apostando acerca de la dirección futura de los mercados y tratar de obtener beneficio de esas tendencias *previstas*, o para aprovecharse de situaciones en las que, tomando posiciones compensatorias sobre diferentes activos o derivados, se intenta asegurar un beneficio sin riesgo. Estas situaciones se conocen como **oportunidades de arbitraje**.

En este trabajo nos limitaremos al estudio de las opciones vainilla. Una opción es un contrato que da a su comprador el derecho, pero no la obligación, a comprar (**opción *call***) o vender (**opción *put***) el activo subyacente, por ejemplo acciones, en una fecha futura (*fecha de vencimiento*) a un precio predeterminado (***strike*** o precio de ejercicio).

El concepto clave es el término opción. Por ejemplo, si en la fecha de vencimiento, T, la cotización del activo, S_T, es superior al *strike*, K, el poseedor de una *call* ejercerá su opción puesto que su contrato *call* le permite comprar a un precio inferior al del mercado. Por esta razón, y porque en los mercados actuales es posible vender inmediatamente las acciones a precio S_T, en esta operación obtendría una ganancia de $(S_T - K)$. Por el contrario, si la cotización del activo es inferior al *strike*, el poseedor de la *call* no ejercerá su opción, ya que estaría en este caso comprando a un precio superior al de mercado. Por tanto, poseer un contrato *call* nunca involucra pérdidas y puede que aporte beneficios, por tanto, en un mercado sin arbitraje, esta opción cuesta un precio, o sea una *prima*. Valorar dicha opción es equivalente a valorar un flujo en el futuro de $(S_T - K)^+$.

Si las expectativas sobre la evolución futura del mercado de valores son alcistas, comprar opciones *call* puede ser interesante ya que permite aprovechar las subidas del mercado y limita las pérdidas, que son exactamente el coste de la prima si la acción cotiza por debajo del precio de ejercicio. Por otra parte, como comprar opciones es más barato que comprar acciones, el apalancamiento (relación coste de la inversión/rendimiento) es muy alto y pequeñas inversiones pueden generar altas rentabilidades.

En la venta de una opción *call*, el vendedor recibe la prima (el precio de la opción) que genera un flujo monetario inmediato. A cambio, tiene la obligación de vender la acción al precio de ejercicio, en el caso de que el comprador de la opción *call* ejerza su opción de compra. En consecuencia, el precio de la opción ha de ser fijado de tal forma que el vendedor no pierda dinero sistemáticamente si el precio es muy bajo, pero sin elevarlo demasiado para mantener competitividad, siempre teniendo en cuenta que es necesario medir y controlar en todo momento el riesgo que corre en base a los contratos que están en activo, ya que su riesgo es ilimitado si no ha cubierto sus posiciones.

La teoría de la **valoración de opciones** sufrió una gran transformación con la publicación del trabajo de Fisher Black y Myron Scholes (1973) en el que presentaron su conocida fórmula para determinar el valor teórico de una opción, aceptado desde entonces como uno de los trabajos matemáticos más influyentes en el campo de las finanzas. El argumento clave es que, en ausencia de arbitraje, los inversores pueden crear carteras que, ajustadas continuamente en función de la evolución de la cotización de la acción, compensan el riesgo. Disponer de una buena estimación del valor teórico impulsó enormemente el mercado de opciones. Más recientemente, las técnicas y modelos de valoración de opciones, desarrollados muchos de ellos a partir del sugerente modelo Black-Scholes rebajando alguno de sus supuestos simplificadores, han sido aplicados a una gran variedad de situaciones que van más allá del mercado de opciones.

Este artículo tiene como propósito introducir algunas de las herramientas matemáticas utilizadas en la valoración de opciones y, en particular, mostrar el papel que en su teoría desempeña el resultado de Hardy, Littlewood y Pólya sobre funciones convexas mencionado anteriormente, que nos parece de gran interés en este contexto.

2. Cotización de opciones vainilla

En esta sección desarrollamos las ideas de cobertura y valoración por no arbitraje, inicialmente en el contexto discreto de los árboles binomiales donde aparecerán los conceptos probabilísticos inherentes al modelo continuo de Black-Scholes ([6], [13]). Una excelente exposición es el libro de Baxter y Rennie ([3]).

Para fijar ideas, y entender mejor las diferencias entre los razonamiento de valoración de los casinos y los mercados financieros, consideremos el siguiente juego: se lanza una moneda al aire, si sale cara nos pagan un euro, y si sale cruz no nos pagan nada. En este juego no tenemos riesgo de pérdida y existe la posibilidad de obtener beneficio. Es por tanto lógico que se nos exija una cierta cantidad por el derecho a jugar, es decir, una prima. Probablemente coincidamos en que ha de ser de 50 céntimos si la moneda no está trucada. La política de fijación de precios de los casinos, al igual que la de las compañías aseguradoras se fundamenta en la ley de los grandes números. La homogeneidad y las múltiples repeticiones compensan la incertidumbre.

Si modificamos levemente la situación anterior sustituyendo la moneda por una acción, de nuevo existen dos posibles escenarios, la acción puede subir su cotización o no. Más concretamente, supongamos que la acción cotiza hoy a 1 euro, y que su cotización mañana es o 3 euros o 50 céntimos de euro. Nos pagan un euro si la acción sube y nada en caso contrario. Éste sería un ejemplo de una opción *call* con precio de ejercicio a 2 euros.

Puede parecer, a simple vista, que el precio se debe fijar de modo análogo al ejemplo de la moneda. Se estudia la probabilidad p de que la acción suba, y el pago es simplemente p euros. Es sorprendente que, si fijamos el precio de esta manera probabilística, nos encontraremos con curiosas irregularidades. La ley de los grandes números no es aplicable, de hecho si el precio de la opción no es exactamente 0.2 euros, veremos a continuación que uno de los jugadores podría beneficiarse del juego sin riesgo alguno, es decir se crearía una situación de **arbitraje**.

Las expectativas de ganancia del comprador A son 1 o 0 euros, supongamos que por ello acuerda pagar una prima de 0.10 euros. Para obtener este dinero pide prestadas 0.4 acciones que vende inmediatamente por 0.4 euros (las acciones se pueden prestar siempre que se devuelvan). Paga la prima y guarda los 0.30 euros restantes en un cajón. Al día siguiente, si la acción ha subido recibe 1 euro de B, y con 0.20 euros del cajón, puede comprar las 0.4 acciones que debe. Ha pagado sus deudas y ha ganado 0.10 euros. Si la acción ha bajado, con 0.20 euros del cajón compra las 0.4 acciones que debe y de nuevo obtiene un beneficio neto de 0.10 euros. Como el comprador siempre sale beneficiado, acuerdan aumentar la prima a 0.30 euros. En este caso, el vendedor B recibe de A 0.30 euros, y en vista de los posibles pagos a los que se enfrenta, pide prestados 0.10 euros más para comprar 0.4 acciones. Al día siguiente B vende la acción. Si ésta ha subido a 3 euros, B recibe 1.2 euros, devuelve el dinero prestado, paga 1 euro a A y todavía le quedan 0.10 euros de ganancia. Si por el contrario la acción baja, B recibe 0.2 euros por la venta de la acción, cancela su préstamo y de nuevo obtiene un beneficio de 0.10 euros.

La estrategia seguida por el vendedor es lo que se denomina una **estrategia de cobertura**. En ausencia de arbitraje, el precio de la opción debería coincidir con el coste de construir hoy una cartera que cubra los pagos futuros. En el caso analizado, esta cartera constaría de 0.4 acciones y -0.2 euros, y por tanto su valor actual sería de 0.2 euros. Si éste hubiera sido el coste de la prima acordado, ni comprador ni vendedor obtendrían beneficio a coste cero. Como veremos en la próxima sección este cálculo no es nada más que el resultado de un sistema de ecuaciones.

2.1. Árbol binomial

Consideremos la situación más simple posible, y nada realista, que iremos complicando progresivamente para acercarnos al mundo real. Supongamos que sólo existen dos instantes de tiempo: hoy y la fecha de vencimiento. En este contexto, la notación y términos que utilizaremos son los siguientes:

- *Activo con riesgo*, que será el activo subyacente, por ejemplo, la acción. Supongamos que su cotización actual es S_0, y que en la fecha de vencimiento únicamente puede alcanzar dos valores conocidos *a priori* S_1 y S_2 tales que $S_1 < S_0 < S_2$.
- *Activo sin riesgo*, al que nos referiremos como dinero, cuya evolución viene determinada por el tipo de interés continuo anual r, que suponemos constante. Utilizaremos los términos *capitalizar* (llevar a valor de un tiempo posterior una cantidad de dinero de tiempo anterior) y *descontar* (llevar a valor de un tiempo anterior una cantidad de dinero de tiempo posterior) para comparar valores en diferentes instantes de tiempo.
- *Derivado* del activo con riesgo, por ejemplo una opción (*call* o *put*) con *strike* K. Denotamos por $f(1)$ y $f(2)$ los pagos futuros del derivado que dependerán de la cotización del subyacente. Por ejemplo, en el caso de una opción *call* $f(i) = (S_i - K)^+$, $i = 1, 2$. Nuestro objetivo es calcular su valor V.

La evolución temporal de cada uno de ellos viene representada en el cuadro 1, donde Δt denota el tiempo transcurrido medido en años.

	Hoy	Fecha de vencimiento
Árbol de la acción	S_0	$\nearrow S_1$ $\searrow S_2$
Árbol del dinero	x	$\longrightarrow xe^{r\Delta t}$
Árbol del derivado	Prima = V	$\nearrow f(1)$ $\searrow f(2)$

Cuadro 1: Árbol de evolución de los activos.

El vendedor del contrato tiene la obligación de efectuar los pagos $f(i)$, $i = 1, 2$, a la otra parte firmante, y por ello ha cobrado una prima. Su estrategia se basa en construir una cartera que constará de Φ acciones y Ψ euros, donde (Φ, Ψ) son dos incógnitas que pretendemos determinar de forma que esta cartera replique los pagos futuros.

La evolución del valor de la cartera dependiendo de que las acciones suban o bajen es la siguiente:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & \Phi S_1 + \Psi e^{r\Delta t} \\ \Phi S_0 + \Psi \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \Phi S_2 + \Psi e^{r\Delta t} \end{tikzcd}$$

La idea clave es que, **si no hay arbitraje**, *el valor del derivado ha de coincidir con el coste de construir la cartera replicante*, es decir $V = \Phi S_0 + \Psi$ donde (Φ, Ψ) satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\Phi S_1 + \Psi e^{r\Delta t} = f(1),$$
$$\Phi S_2 + \Psi e^{r\Delta t} = f(2).$$

Resolviéndolo obtenemos el valor del derivado o equivalentemente el coste de la prima:

$$V = e^{-r\Delta t}(f(1)p + f(2)(1-p)), \tag{1}$$

donde p viene dada por la ecuación

$$pS_1 + (1-p)S_2 = S_0 e^{r\Delta t}. \tag{2}$$

Podemos suponer además que $S_2 < S_0 e^{r\Delta t} < S_1$, de lo contrario invertir en el activo con riesgo siempre sería más rentable o menos rentable que invertir en el activo sin riesgo. Esto implica que $0 < p < 1$, es decir p representa una probabilidad que se denomina **probabilidad riesgo neutro.**

Observemos que tanto S_1, S_2 como $S_0 e^{r\Delta t}$ representan valores de los activos en el futuro. Es una regla básica que todos los valores han de ser cuantificados en el mismo instante de tiempo. Teniendo esto en cuenta podemos extraer de las fórmulas (1) y (2) algunas consecuencias que son de gran interés en la valoración de opciones:

- La probabilidad relevante al valorar opciones no son las probabilidades reales de evolución de la acción, sino la probabilidad riesgo neutro.
- La probabilidad riesgo neutro es la que hace que la rentabilidad esperada de la acción coincida con la rentabilidad del activo sin riesgo. En términos probabilísticos es la que convierte el árbol del precio descontado de la acción en una **martingala** (2), en este caso de un solo paso.
- El valor de la opción es el *promedio* de sus posibles valores futuros descontados, promediando con la probabilidad riesgo neutro. De esta forma el árbol del precio descontado de la opción representa también una martingala (1).

En este trabajo consideramos únicamente lo que se denominan opciones europeas, es decir, aquéllas que sólo se pueden ejercer en la fecha de vencimiento. Si la opción puede ejercerse en cualquier momento durante la vida del contrato, se llama opción americana. Aunque europea y americana son las más populares, el desarrollo del mercado ha generado otros tipos de opciones, cuyo precio depende del camino seguido por la cotización del subyacente, por ejemplo una opción que dependa de la cotización media alcanzada hasta vencimiento (opción asiática). Para valorar estas opciones *path-dependent* no hay fórmulas cerradas y es necesario simular posibles escenarios. En cualquier caso, los árboles resultan ser herramientas muy útiles, sencillos en su planteamiento y fáciles de implementar.

2.2. Del árbol binomial a la fórmula de Black-Scholes

El modelo de un solo salto que acabamos de construir es una aproximación demasiado simple de la realidad de los mercados financieros. La diferencia más importante con el mundo real es el hecho de que el número de posibles cotizaciones de cada acción no es dos, sino un número grande que incluso podríamos considerar infinito.

La idea es que la estrategia de cobertura se debe hacer de manera más o menos continuada en el tiempo, comprando y vendiendo continuamente acciones y posiblemente tomando préstamos. Para ello dividimos el tiempo hasta fecha de vencimiento en diferentes períodos, y en los nodos de cada período aplicamos el árbol de evolución anterior de forma que sea recombinante (figura 2). En el instante 0 nos enfrentamos únicamente a los dos valores que el precio de la acción puede tomar en el instante siguiente Δt y construiremos una cartera replicante adecuada. En el instante Δt el precio de la acción habrá subido o bajado respecto de su cotización anterior, esto nos colocará en uno de los posibles nodos y de nuevo adecuamos la cartera a la nueva situación. Repitiendo este proceso, hasta la fecha de vencimiento de la opción, conseguiremos que el modelo aproxime mejor una negociación continua, donde el precio del subyacente pueda tomar cualquier valor razonable.

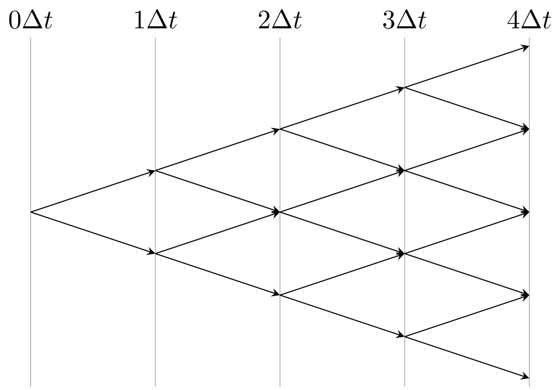

Figura 2: Árbol binomial recombinante.

El problema ahora es determinar el valor de la acción en cada nodo con una única condición: el árbol del precio descontado de la acción ha de ser martingala. Para simplificar *fijaremos* las probabilidades de transición tomando $p = 1/2$. Partiendo de un nodo S_0, para determinar los dos posibles valores S_1 y S_2 en el instante siguiente, la condición de martingala (2) no es suficiente. Necesitamos otra condición, podríamos por ejemplo fijar la varianza del precio del activo en el siguiente instante, sin embargo resulta más conveniente considerar la desviación típica de los logaritmos de los rendimientos del activo, es decir, la **volatilidad**. La volatilidad mide los cambios en el precio del activo, y se usa normalmente para cuantificar el riesgo.

Denotemos por σ la volatilidad anual, es decir, si S_0 representa el valor del activo hoy,

$$\sigma = \sqrt{\operatorname{Var}\left(\ln \frac{S_T}{S_0}\right)},$$

donde T =1 año, y S_T es la variable aleatoria que describe los posibles valores del activo en 1 año.

Observemos que a un período de tiempo Δt medido en años le corresponde una volatilidad $\sigma_{\Delta t} = \sigma\sqrt{\Delta t}$, ya que

$$\ln \frac{S_T}{S_0} = \sum_{k=0}^{N-1} \ln \frac{S_{k+1}}{S_k}, \qquad N\Delta t = 1, \tag{3}$$

y suponemos además que los rendimientos $\ln \frac{S_{k+1}}{S_k}$ en cada período $(k\Delta t, (k+1)\Delta t)$ son variables independientes idénticamente distribuidas. En particular, podemos decidir que cada una de estas variables sólo toma dos valores equiprobables de media $r\Delta t$ (ver la ecuación (2)) y varianza $\sigma^2\Delta t$. Así pues, una posible especificación para la distribución de $\ln \frac{S_{k+1}}{S_k}$ es

$$\ln \frac{S_{k+1}}{S_k} = r\Delta t \pm \sigma\sqrt{\Delta t}.$$

El problema es que, manteniendo las probabilidades de transición $p = 1/2$, el árbol descontado de la acción $\hat{S}_k = e^{-rk\Delta t} S_k$ no es una martingala ya que $\hat{S}_{k+1} = \hat{S}_k e^{\pm\sigma\sqrt{\Delta t}}$, pero sí lo sería si ajustamos los posibles estados futuros con el factor $1/\cosh(\sigma\sqrt{\Delta t}) \approx \exp(-\frac{\sigma^2}{2}\Delta t)$ (los términos de error en la aproximación desaparecerán al hacer $\Delta t \to 0$). El resultado final es el modelo binomial equiprobable descrito en la figura 3, que especifica la evolución de la cotización del activo.

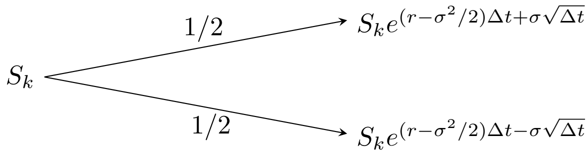

Figura 3: Árbol binomial equiprobable.

Observemos que el árbol obtenido es automáticamente recombinante. Para obtener un modelo continuo necesitamos un paso al límite. Por (3) y la figura 3, $\ln \frac{S_T}{S_0}$ se puede expresar como suma de $N = T/\Delta t$ variables independientes idénticamente distribuidas de media $(r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t$ y varianza $\sigma^2\Delta t$. Aplicando el Teorema Central del Límite tenemos que, si $\Delta t \to 0$,

$$\frac{\ln \frac{S_T}{S_0} - (r - \frac{\sigma^2}{2})N\Delta t}{\sigma\sqrt{N\Delta t}} \to \mathcal{N}(0,1).$$

La distribución de $\ln \frac{S_T}{S_0}$ es por tanto una normal de media $(r-\sigma^2/2)T$ y desviación típica $\sigma\sqrt{T}$. Equivalentemente, la distribución que rige la evolución del activo S_T viene dada por

$$S_T = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\,\mathcal{Z}\right), \tag{4}$$

donde $\mathcal{Z}$ es una normal $\mathcal{N}(0,1)$.

Los lectores familiarizados con el cálculo estocástico y el Lema de Itô, reconocerán que el modelo propuesto para S_T es el modelo de evolución log-normal siguiente, donde μ y σ son constantes y W_t representa un movimiento browniano:

$$dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dW_t).$$

Para que el proceso descontado $\hat{S}_t = S_t e^{-rt}$ que se rige por la ecuación

$$d\hat{S}_t = \hat{S}_t((\mu - r)\, dt + \sigma\, dW_t)$$

sea martingala, la tendencia μ ha de ser igual a r. De esta forma obtenemos

$$dS_t = S_t(r\, dt + \sigma\, dW_t),$$

cuya solución viene dada por (4).

Estamos ya en condiciones de valorar una opción *call* $C(K,T)$ con *strike* K y fecha de vencimiento T. Sabemos que los pagos de esta *call* en la fecha de vencimiento son $(S_T - K)^+$.

En el contexto discreto, el árbol de flujos del derivado ha de ser equiprobable, $p = 1/2$, igual que el utilizado para la evolución del precio de la acción. A partir de los nodos correspondientes al instante T, que rellenamos con los valores $(S_T - K)^+$, completamos hacia atrás todos los nodos de forma que en cada uno de ellos se verifique la condición de martingala (ver la ecuación (1)). Podemos entonces establecer la estrategia de cobertura basada en la construcción de carteras dinámicas que repliquen, en cada instante de tiempo, los flujos correspondientes al instante posterior, igual que hacíamos en el árbol de un solo paso. El coste de construir estas carteras coincidirá con el valor de la *call* (nodo correspondiente a $T = 0$). Al igual que en el caso de la acción, el precio de la *call* a día de hoy es el promedio bajo la probabilidad de riesgo neutro de los flujos futuros descontados de la opción, es decir:

$$C(K,T) = \mathbf{E}\left(e^{-rT}(S_T - K)^+\right).$$

En la versión continua, como acabamos de determinar, S_T/S_0 es la exponencial de una variable que sigue una distribución $\mathcal{N}\left((r - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma\sqrt{T}\right)$; un cálculo explícito nos lleva a la conocida **fórmula de Black-Scholes** para la valoración de opciones *call*:

$$C(K,T) = S_0\Phi(d_+) - Ke^{-rT}\Phi(d_-),$$

donde Φ denota la función de distribución de una distribución normal $\mathcal{N}(0,1)$, y

$$d_{\pm} = \frac{\ln \frac{S_0}{Ke^{-rT}}}{\sigma\sqrt{T}} \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}.$$

En la ecuación todos los parámetros son conocidos, excepto la volatilidad. Si se conoce el precio de la opción *call*, la ecuación nos permite calcular la volatilidad estimada por el mercado, también llamada ***volatilidad implícita***. La volatilidad es, en general, casi la única información que proporciona el mercado sobre la distribución futura del subyacente, y es la referencia que se usa al valorar derivados más complejos, generalmente por medio de la calibración del modelo. Es también un indicador del riesgo que el mercado está asignando al activo, en este sentido y puesto que el mercado cotiza directamente con volatilidad, la volatilidad implícita permite comparar precios de diferentes opciones.

A pesar de que la fórmula de Black-Scholes es, y ha sido, mundialmente utilizada en el mercado de opciones, tiene serias limitaciones. Un problema importante es que sistemáticamente se puede observar que *las volatilidades implícitas tienden a estar relacionadas con el precio de ejercicio* (figura 4), lo cual contradice las hipótesis del modelo si se asume volatilidad constante. Sin embargo, la fórmula de Black-Scholes sigue usándose como diccionario de paso entre el precio de la opción y su volatilidad, que es lo que el mercado cotiza en la mayoría de los casos. La relación empírica que se observa entre la volatilidad implícita y el precio de ejercicio se conoce como **sonrisa de volatilidad**.

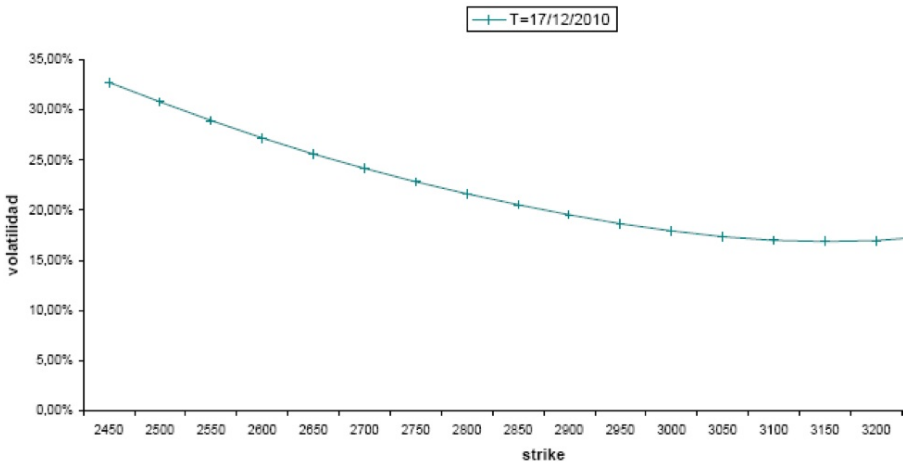

Figura 4: Volatilidades implícitas sobre el *EuroStoxx* que cotiza a 2867.96 el 08/11/2010.

Nuestro objetivo es crear un modelo alternativo que calibre correctamente los precios de mercado, y por tanto que capture la sonrisa de volatilidad. Ahora bien, diseñar un modelo requiere asumir como hipótesis que el mercado de opciones es lo suficientemente líquido y eficiente para no generar arbitrajes. El problema es que, como veremos en la siguiente sección, determinar la existencia o no de arbitraje en el precio de las opciones es un problema complejo.

3. Arbitraje

Un razonamiento clave en la sección anterior para deducir el precio de la opción es que su valor es, exactamente, el coste de construir una cartera de activos que, invertida dinámicamente, replique los pagos de la opción en la fecha de vencimiento. Este razonamiento se puede generalizar. Partimos de una serie de activos básicos S_j, $1 \leq j \leq n$, que podemos comprar y vender sin restricción en cada instante de tiempo t, $0 \leq t \leq T$. De entre ellos seleccionamos uno que denotamos por N y que se denomina el *numerario*, cuyo único requisito es que su valor en cada instante t es positivo. El ejemplo más tradicional, y también el nuestro en el razonamiento anterior, es la cuenta bancaria, capitalización a interés fijo r: $N(t) = e^{rt}$. El numerario sirve de unidad de referencia, por ejemplo expresar el valor en tiempo t de un activo $S_j(t)$ en unidades de cuenta bancaria $N(t)$ equivale a descontar, es decir expresarlo en su valor actual $\hat{S}_j(t) = \frac{S_j(t)}{N(t)}$. Existen muchas elecciones naturales y convenientes de numerario dependiendo del problema a estudiar.

El **Teorema Fundamental de Valoración** establece que la ausencia de oportunidades de arbitraje es esencialmente equivalente a la existencia de una medida de probabilidad $\mathbf{P}$ tal que los activos expresados en unidades de numerario son $\mathbf{P}$-martingalas ([11], [12], [1]).

Por consiguiente, al igual que en el ejemplo de la *call* analizado en la sección anterior, si asumimos que no hay arbitraje, existe una probabilidad $\mathbf{P}$, probabilidad riesgo neutro, de manera que los activos expresados en unidades del numerario son martingalas. Entonces, cualquier estrategia de inversión autofinanciada en estos activos, expresada en unidades de numerario, también es martingala. Es decir, si $C(t)$ es el valor de la cartera en tiempo t que replica los pagos del derivado, $\frac{C(t)}{N(t)}$ es martingala. En particular,

$$\frac{C(0)}{N(0)} = \mathbf{E_P}\left(\frac{C(T)}{N(T)}\right).$$

Si el precio de la opción no coincide con el valor de la cartera replicante, o bien el comprador o el vendedor, construyendo la cartera, podrían obtener beneficio a coste cero, y por tanto existiría arbitraje.

Determinar si existe o no arbitraje en los precios de mercado puede resultar complicado. Para simplificar los argumentos, en el resto del trabajo supondremos que los intereses son nulos. Consideremos por ejemplo la matriz de precios de opciones *call* representada en el cuadro 2.

Si no hay arbitraje, existe una medida de probabilidad $\mathbf{P}$ de forma que el proceso S_t es martingala y

$$C(K,t) = \mathbf{E_P}\left((S_t - K)^+\right).$$

Podemos deducir entonces las siguientes propiedades:

T/K	80	100	120
1 mes	–	12	–
3 meses	–	–	1
6 meses	21	–	–

Cuadro 2: Precios de opciones *call*.

- $C(K,t)$ es no-creciente en K;
- $C(K,t)$ es convexa en K;
- $C(K,t)$ es no-decreciente en t, como consecuencia de la desigualdad de Jensen.

Intuitivamente la primera y tercera propiedad son obvias: si el *strike* aumenta, los posibles beneficios futuros disminuyen y por tanto el precio de la opción. Por otro lado, si la fecha de vencimiento se alarga, la incertidumbre aumenta y el precio de cubrir ese riesgo también debe aumentar. No es complicado comprobar que la matriz de precios dada no satisface estas condiciones; basta observar que si se cumplen las desigualdades $C(80,3) \leq 21, C(100,3) \geq 12$, entonces la condición de convexidad $C(100,3) - C(80,3) \leq C(120,3) - C(100,3)$ no se verifica, ya que $C(80,3) - C(100,3) \leq 21 - 12 = 9$ y $C(100,3) - C(120,3) \geq 12 - 1 = 11$.

La cuestión ahora es determinar si estas propiedades son suficientes, pero no en el contexto continuo sino en el discreto ya que así son los datos de mercado. El siguiente teorema de Carr y Madan ([4]) muestra la conexión entre este problema y ciertos resultados de la teoría de probabilidad.

TEOREMA 2. *Supongamos que los intereses son nulos y que conocemos los precios $C_{i,j} = C(K_i, T_j)$ de opciones* call *para una colección de* strike*s que tienden a infinito $K_1 < K_2 < \cdots$, a diferentes fechas de vencimiento $T_1 < T_2 < \cdots < T_N$. Suponemos además que, para todo j, $C_{i,j} \to 0$ si $K_i \to \infty$. Si ampliamos la matriz de precios a $T_0 = 0$ y $K_0 = 0$ definiendo $C_{i,0} = (S_0 - K_i)^+$, $i > 0$, y $C_{0,j} = S_0$, $j > 0$, la colección de precios de opciones* call *$C_{i,j}$ es libre de arbitraje si y solo si para todo $i = 1, 2, \ldots, \infty$, $j = 0, 1, \ldots, N$ se cumple:*

i) $Q_{i,j} = \frac{C_{i-1,j} - C_{i,j}}{K_i - K_{i-1}} \geq 0$,

ii) $Q_{i,j} - Q_{i+1,j} = \frac{C_{i-1,j} - C_{i,j}}{K_i - K_{i-1}} - \frac{C_{i,j} - C_{i+1,j}}{K_{i+1} - K_i} \geq 0$,

iii) $C_{i,j+1} - C_{i,j} \geq 0$.

DEMOSTRACIÓN. Aunque la necesidad de i)–iii) es consecuencia de la observación anterior, nos parece interesante demostrarlo utilizando un argumento típico de ausencia de arbitraje.

Consideremos una cartera que consta de $1/(K_i - K_{i-1})$ *calls* compradas a *strike* K_{i-1} y de $1/(K_i - K_{i-1})$ *calls* vendidas a *strike* K_i, todas ellas a fecha de vencimiento T_j. Independientemente del valor del subyacente a fecha de vencimiento, los pagos de esta cartera están siempre comprendidos entre 0 y 1. Por tanto su valor hoy, que es exactamente $Q_{i,j}$, ha de estar comprendido entre 0 y 1, ya que por el principio de valoración su valor hoy ha de ser el promedio de sus valores futuros.

Para demostrar ii), consideramos la siguiente expresión para cada $j > 0$:

$$C_{i-1,j} - \frac{K_{i+1} - K_{i-1}}{K_{i+1} - K_i} C_{i,j} + \frac{K_i - K_{i-1}}{K_{i+1} - K_i} C_{i+1,j}, \quad i > 0.$$

Esta expresión es el coste hoy de una cartera que posee una *call* comprada a *strike* K_{i-1}, $(K_i - K_{i-1})/(K_{i+1} - K_i)$ *calls* compradas a *strike* K_{i+1} y $(K_{i+1} - K_{i-1})/(K_{i+1} - K_i)$ *calls* vendidas a *strike* K_i, todas ellas a fecha de vencimiento T_j. De nuevo los pagos de esta cartera son positivos independientemente de la evolución del activo, por tanto su coste hoy es positivo. Reescribiendo la expresión anterior obtenemos ii).

Por último, consideremos dos carteras A y B, la cartera A consta de una acción y una deuda de K euros, la cartera B consta de una *call* con *strike* K a fecha de vencimiento T. En tiempo T, los flujos de la primera son $(S_T - K)$ y los de la segunda $(S_T - K)^+$. Por tanto, en ausencia de arbitraje el valor hoy de la cartera B es positivo y superior al de la cartera A, es decir, $C(K, T) \geq (S_0 - K)^+$.

Observemos que $(C_{i,j+1} - C_{i,j})$ representa el valor hoy de una cartera que tiene una *call* comprada a *strike* K_i y vencimiento T_{j+1} y una *call* vendida del mismo *strike* con fecha de vencimiento T_j. Por el razonamiento anterior, en el instante T_j el valor de la primera *call* es superior a $(S_{T_j} - K_i)^+$, que son los pagos que ha de cubrir por la segunda. Por tanto, en ausencia de arbitraje el valor hoy de la cartera es positivo y iii) queda demostrado.

Es conveniente añadir que con los argumentos exhibidos se puede demostrar que, en el contexto de tipos de interés no nulos, las condiciones i) y ii) continúan verificándose, y, aunque en este caso no se verifica iii), su versión análoga se obtiene adaptando el argumento correspondiente.

La idea para demostrar el recíproco se basa en que si disponemos de la función de precios *call* $C(K, T)$, para todo *strike* $K > 0$, y ésta es decreciente y convexa en K, entonces es posible capturar la distribución del activo subyacente S_T a partir de la función $C(K, T)$. Si $f_T(S)$ denota la función de densidad del subyacente en el instante T,

- $C(K, T) = \int (S_T - K)^+ f_T(S)\, dS$,
- $\frac{\partial C(K,T)}{\partial K} = -\int_K^\infty f_T(S)\, dS$,
- $\frac{\partial^2 C(K,T)}{\partial^2 K} = f_T(K)$.

El argumento en el caso discreto es similar, suponiendo que los precios $C_{i,j}$ satisfacen i) y ii), definimos, para $j > 0$, $Q_{0,j} \equiv 1$ y

$$q_{i,j} = Q_{i,j} - Q_{i+1,j} = \frac{C_{i-1,j} - C_{i,j}}{K_i - K_{i-1}} - \frac{C_{i,j} - C_{i+1,j}}{K_{i+1} - K_i}, \quad i \geq 0.$$

Para cada j, $\sum_{i=0}^{\infty} q_{i,j} = 1$, por tanto la sucesión $(q_{i,j})_i$ define una medida de probabilidad $\mathbf{P_j}$ que podemos interpretar como la probabilidad de que el activo subyacente tome el valor K_i en tiempo T_j.

A continuación definimos, para cada fecha de vencimiento T_j, el precio de la opción *call* $C(K, T_j)$ para cualquier *strike* $K \geq 0$ interpolando linealmente los datos observados $C_{i,j}$, es decir,

$$C(K, T_j) \equiv \sum_i (K_i - K)^+ q_{i,j} = \mathbf{E}_{\mathbf{P_j}} \left((S_{T_j} - K)^+ \right).$$

Y he aquí la observación clave en esta demostración: como los precios de las *call* para cualquier *strike* K son interpolación lineal de los observados, y estos satisfacen la condición iii) del teorema, podemos concluir que, para todo $K > 0$,

$$C(K, T_{j+1}) - C(K, T_j) \geq 0.$$

Puesto que toda función convexa se puede expresar como combinación lineal positiva de funciones del tipo $(x - a)^+$, tenemos que, si Φ es una función convexa,

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P_{j+1}}} \left(\Phi(S_{T_{j+1}}) \right) \geq \mathbf{E}_{\mathbf{P_j}} \left(\Phi(S_{T_j}) \right). \tag{5}$$

Por los resultados de Kellerer ([15]) entre otros (en [7] se puede encontrar una demostración debida a Strassen), la desigualdad (5) implica que existe un proceso de Markov de evolución de precios del activo S que interpola las distribuciones marginales de forma que es una martingala. Este proceso es consistente con los precios de las opciones *call* observados y, por el principio de valoración, es libre de arbitraje. □

Observemos que, por hipótesis, la colección de *strike*s es la misma para todas las fechas de vencimiento, situación muy diferente de la descrita en el cuadro 2. En la práctica esta hipótesis del teorema normalmente no se verifica, y además otras variables, por ejemplo los tipos de interés, se han de tener en cuenta. Extensiones de este teorema a contextos más generales se deben, entre otros, a Cousot ([5]) y Davis y Hobson ([7]). En cualquier caso, todos ellos se apoyan en resultados probabilísticos como el mencionado de Kellerer. Este resultado tiene una larga historia que comienza con Hardy, Littlewood y Pólya que consideran un caso muy particular que analizaremos en la próxima sección.

4. Árboles implícitos y funciones convexas

Regresemos a la cuestión de modelizar la evolución del precio de la acción de forma que incorpore los datos de mercado. En este contexto, los árboles que tratan de capturar la sonrisa de volatilidad, *árboles implícitos*, constituyen uno de los enfoques de valoración alternativos al modelo de Black-Scholes que ha conocido un mayor desarrollo en los últimos años ([8], [9], [16]). Por ejemplo, Derman y Kani proponen un algoritmo iterativo para construir un árbol binomial suponiendo que las funciones de valoración de opciones *call* $C(K, T)$ o *put* $P(K, T)$ son conocidas para todo *strike* K y fecha de vencimiento T. Este supuesto implica interpolar cuidadosamente los precios de mercado para no crear arbitraje, problema de interpolación complicado y ampliamente estudiado ([14]).

Nuestro objetivo en principio sería construir un árbol, *no necesariamente binomial*, pero que capturase *exactamente* los precios de las opciones observados. Desafortunadamente sólo lo podemos conseguir en un caso muy particular que detallamos a continuación.

Hemos visto en la sección anterior cómo recobrar la distribución del precio de la acción a partir del precio de la función *call*. Más concretamente, podemos obtener de los datos de mercado las distribuciones discretas S_1 y S_2, recogidas en las siguientes tablas, que representan respectivamente los precios de la acción en dos instantes de tiempo T_1 y T_2:

valor(S_1)	a'_1	a'_2	a'_3	$\dots$	a'_n
probabilidad	p'_1	p'_2	p'_3	$\dots$	p'_n

valor (S_2)	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_n
probabilidad	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

Por el principio de valoración, la no existencia de arbitraje es equivalente a que el proceso de evolución sea martingala, es decir a la existencia de una matriz de transición

$$\mathcal{T} = (t_{i,j})_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,n},$$

de forma que se cumplan las siguientes condiciones:

$$p_j = \sum_i p'_i t_{i,j}, \qquad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$a'_i = \sum_j t_{i,j} a_j, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

El primer conjunto de ecuaciones indica que la matriz de transición interpola las funciones de distribución marginales, lo cual nos da un proceso, y el segundo garantiza que el proceso es una martingala. Conviene observar que la solución no es necesariamente única.

Por los resultados de Kellerer y lo expuesto en (5), una matriz de transición existe si y solo si, para todo $K > 0$,

$$\sum_i (a'_i - K)^+ p'_i \leq \sum_i (a_i - K)^+ p_i.$$

Por consiguiente, si no hay arbitraje en los precios de las opciones, *construir* el árbol de evolución de la acción que capture estos precios es equivalente a determinar las matrices de transición correspondientes que interpolan las distribuciones marginales, ya que éstas como hemos visto se obtienen de los datos de mercado. El problema es que *las demostraciones de existencia de la martingala no son constructivas*, excepto cuando $p_i = p'_i = 1/n$. En este caso, Hardy-Littlewood-Pólya demuestran la existencia de la martingala construyendo un algoritmo que calcula las probabilidades de transición $t_{i,j} = P(S_{T_2} = a_j \mid S_{T_1} = a'_i)$ a partir de los valores a'_i y a_i, y de la especificación de las probabilidades $p_i = p'_i = 1/n$, sin necesidad de asignar un modelo a la evolución del precio de la acción. Ésta es la aplicación del resultado de Hardy-Littlewood-Pólya ([10]) con el que comenzamos y finalizamos esta exposición.

TEOREMA $1'$. *Consideremos dos sucesiones de números positivos* $(a_j)_{j=1}^n$ *y* $(a'_j)_{j=1}^n$, *y supongamos que están ordenadas en orden decreciente, es decir* $a_{j-1} \geq a_j$ *y* $a'_{j-1} \geq a'_j$, $j = 2, \ldots, n$. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Para toda función continua convexa* Φ *se verifica*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Phi(a'_i) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Phi(a_i).$$

2. *Los elementos de las sucesiones satisfacen*
   i) $a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_\nu \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu, \qquad (1 \leq \nu < n),$
   ii) $a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$
3. *La sucesión* (a') *es un promedio de la sucesión* (a), *es decir, existen* n^2 *números positivos* $t_{i,j}$, $(i, j = 1, \ldots, n)$, *tales que*
   i) $\sum_{i=1}^n t_{i,j} = 1, \qquad \sum_{j=1}^n t_{i,j} = 1,$
   ii) $a'_i = t_{i,1}a_1 + t_{i,2}a_2 + \cdots + t_{i,n}a_n, \qquad (i = 1, \ldots, n).$

Observemos que el orden decreciente de los elementos de las sucesiones (a) y (a') únicamente afecta a la condición 2 del teorema.

DEMOSTRACIÓN. La implicación $1 \Rightarrow 2$ es simple. Las funciones x y $-x$ son continuas y convexas, por tanto se verifica 2ii).

De forma similar, la condición 2i) es consecuencia de aplicar la hipótesis a la función convexa $\Phi(x) = (x - a_\nu)^+$. Puesto que $\Phi(x) \geq 0$ y $\Phi(x) \geq x - a_\nu$ para todo x, obtenemos

$$a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_\nu - \nu a_\nu \leq \sum_{i=1}^{n} \Phi(a'_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \Phi(a_i) = a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu - \nu a_\nu,$$

que es equivalente a 2i).

La implicación $3 \Rightarrow 1$ se deduce inmediatamente de la desigualdad de Jensen. Por tanto únicamente queda por demostrar $2 \Rightarrow 3$.

Comenzamos introduciendo una nueva notación: denotamos por $(a') \prec (a)$ a las sucesiones (a) y (a') cuyos elementos ordenados en orden decreciente satisfacen las condiciones 2i) y 2ii) del teorema. Definimos también un determinado tipo de transformación lineal que denotamos por T de la forma siguiente: supongamos que α_k y α_l son dos elementos de una sucesión de números positivos (α) donde $\alpha_k \gneqq \alpha_l$. Podemos entonces escribir

$$\alpha_k = \rho + \tau, \qquad \alpha_l = \rho - \tau, \qquad (0 < \tau \leq \rho).$$

Fijado un número σ, $0 \leq \sigma < \tau \leq \rho$, la transformación lineal $\alpha' = T\alpha$ viene definida por

$$\begin{aligned} \alpha'_k &= \rho + \sigma = \frac{\tau+\sigma}{2\tau}\alpha_k + \frac{\tau-\sigma}{2\tau}\alpha_l, \\ \alpha'_l &= \rho - \sigma = \frac{\tau-\sigma}{2\tau}\alpha_k + \frac{\tau+\sigma}{2\tau}\alpha_l, \\ \alpha'_j &= \alpha_j, \qquad (j \neq k,\, j \neq l). \end{aligned}$$

Observemos que la sucesión α' así definida es un promedio de la sucesión α. Puesto que la relación *«ser promedio»* es transitiva, para demostrar el teorema es suficiente probar el siguiente lema:

Lema 1. *Si $(a') \prec (a)$, y (a') no es idéntica a (a), entonces (a') se obtiene como resultado de aplicar sucesivamente una cantidad finita de transformaciones T.*

La demostración es por inducción en el *orden de discrepancia* de las sucesiones definido por el número de diferencias $a_k - a'_k$ que no son idénticamente nulas. Supongamos que la afirmación es correcta si el orden de discrepancia es menor que r y que entre las sucesiones (a) y (a') es igual a r. Puesto que, por 2ii), $\sum(a_j - a'_j) = 0$, y no todas las diferencias son cero, algunas serán positivas y otras negativas. Ahora bien, 2i) implica que la primera no nula ha de ser positiva. Podemos por tanto encontrar k y l tales que

$$a'_k < a_k, \qquad a'_{k+1} = a_{k+1}, \ldots, a'_{l-1} = a_{l-1}, \qquad a'_l > a_l.$$

Como anteriormente, escribimos $a_k = \rho + \tau$, $a_l = \rho - \tau$ y en este caso definimos σ como

$$\sigma = \max\left(|a'_k - \rho|, |a'_l - \rho|\right).$$

Es fácil comprobar que $0 \leq \sigma < \tau \leq \rho$. Definimos entonces una sucesión intermedia $a'' = Ta$,

$$a''_k = \rho + \sigma, \qquad a''_l = \rho - \sigma, \qquad a''_j = a_j \quad (j \neq k, j \neq l).$$

El orden de discrepancia entre (a'') y (a') es, ahora, o bien $r-1$ o $r-2$. Además, aunque laborioso, no es difícil verificar que $a' \prec a''$. Aplicando la hipótesis de inducción concluimos que (a') se obtiene a través de sucesivas transformaciones de (a''). Puesto que $a'' = Ta$, el lema, y por tanto el teorema, quedan demostrados. □

Por último, mencionar que el algoritmo de Hardy, Littlewood y Pólya se puede adaptar fácilmente al caso en el que las probabilidades $(p'_i)_i$ y $(p_i)_i$ tienen una cantidad finita de dígitos decimales. Sin embargo, si éste no es el caso, distintas aproximaciones dan lugar a matrices de transición muy diferentes, y no sabemos realmente cómo adaptar estas ideas al caso general. Aunque en la práctica se han propuesto métodos alternativos para buscar soluciones numéricas aproximadas, algunos basados en conceptos de entropía ([2]), sería muy interesante disponer de un algoritmo estándar que determinara de forma exacta las matrices de transición. De esta forma, en ausencia de arbitraje en los precios de las opciones, sería posible construir un árbol de evolución de la acción que, al ser martingala, permitiría valorar derivados, y que calibraría exactamente los datos de mercado.

REFERENCIAS

[1] M. AVELLANEDA, *Quantitative Modeling of Derivatve Securities: From Theory to Practice*, Chapman-Hall/CRC, 2000.

[2] M. AVELLANEDA, R. BUFF, C. FRIEDMAN, N. GRANDECHAMP, L. KRUK Y J. NEWMAN, Weighted Montecarlo: A new technique for calibrating asset-pricing models, *International Journal of Theoretical and Applied Finance* **4** (2000), 91–119.

[3] M. BAXTER Y A. RENNIE, *Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[4] P. CARR Y D. B. MADAN, A note on sufficient conditions for no arbitrage, *Finance Research Letters* **2** (2005), 125–130.

[5] L. COUSOT, Conditions on option prices for absence of arbitrage and exact calibration, *Journal of Banking and Finance* **31** (2007), 3377–3397.

[6] J. C. COX, S. A. ROSS Y M. RUBINSTEIN, Option Pricing: A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics* **7** (1979), 229–263.

[7] M. H. DAVIS Y D. G. HOBSON, The range of traded option process, *Mathematical Finance* **17** (2007), 1–14.

[8] E. DERMAN Y I. KANI, The Volatility Smile and Its Implied Tree, *Quantitative Strategies Research Notes*, January 1994.

[9] B. DUPIRE, Pricing with a smile, *Risk Magazine* **7** (1994), 32–39.

[10] G. HARDY, J. LITTLEWOOD Y G. POLYA, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, 1934.

[11] J. HARRISON Y D. KREPS, Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets, *Journal of Economic Theory* **20** (1979), 381–408.

[12] M. HARRISON Y S. PLISKA, Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading, *Stochastic Processes and Their Aplications* **11** (1981), 215–260.

[13] R. JARROW Y A. RUDD, Aproximate option valuation for arbitrary stochastic processes, *Journal of Financial Economics* **10** (1982), 347–369.

[14] N. KAHALÉ, An arbitrage-free interpolation of volatilities, *Risk Magazine* **5** (2004), 102–106.

[15] H. KELLERER, Markov-Komposition und eine Anwendung auf Martingale, *Math. Annalen* **198** (1972), 99–122.

[16] M. RUBINSTEIN, Implied binomial trees, *J. Finance* **49** (1994), 771–818.

MARÍA JOSÉ GONZÁLEZ, DPTO. DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE CÁDIZ
Correo electrónico: `majose.gonzalez@uca.es`

PAUL MACMANUS, ANALISTAS FINANCIEROS INTERNACIONALES, MADRID
Correo electrónico: `pmacmanus@afi.es`