Un encuentro entre las matemáticas y la teoría de escalas musicales: Escalas bien formadas

por

Marco Castrillón y Manuel Domínguez

Resumen. En este artículo se presenta un nuevo punto de encuentro entre las matemáticas y la música, más concretamente entre la teoría de escalas musicales, la aritmética, la geometría del círculo y la combinatoria algebraica de palabras. En primer lugar se formaliza la noción de escala. A continuación se muestra cómo muchas de las escalas que más se utilizan pertenecen todas al mismo tipo: las *escalas bien formadas*. El objetivo último del artículo es mostrar tres caracterizaciones distintas de este tipo de escalas que conectan nociones matemáticas tales como desarrollos en fracción continua simple, líneas poligonales estrelladas regulares y palabras de Christoffel.

Preliminares

Desde que la escuela Pitagórica estableció la relación entre los intervalos musicales de *octava, quinta y cuarta* con las fracciones $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$ y $\frac{4}{3}$, los encuentros a lo largo de la historia entre Música y Matemáticas han sido numerosos. En esta línea, el presente trabajo pretende conectar nociones de distintas ramas de las matemáticas con la teoría de las escalas musicales. Como se justificará en la sección 1, las escalas pueden pensarse como subconjuntos finitos de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq [0,1)$ y, por tanto, quedan representadas geométricamente como líneas poligonales inscritas en el círculo unidad. En la sección 2 se analizan las propiedades de un tipo importante de escalas, *las escalas generadas*, que se corresponden con la idea intuitiva de líneas poligonales *regulares*. El principal resultado de la sección nos lo ofrece el *teorema de los tres pasos*, que clasifica los tipos de estas escalas generadas: toda escala generada divide a la circunferencia en arcos que pueden ser, o todos iguales, o de dos o tres longitudes distintas. El primer caso sólo se da si el generador es racional y se corresponde con los polígonos regulares estrellados. El segundo caso —la línea poligonal regular determina arcos de dos longitudes distintas— coincide, esencialmente, con las *escalas bien formadas*. El ejemplo más importante de este tipo de escala es la determinada por las teclas blancas del piano (escala de Do Mayor), que tiene dos tipos de intervalos distintos: *tono y semitono*.

En la parte central del artículo (sección 3), presentamos las bases de la teoría de escalas bien formadas: se ofrecen distintas caracterizaciones de estas escalas en términos de las líneas poligonales estrelladas regulares inscritas en el círculo (secciones 3.1 y 3.2) y del desarrollo en fracción continua simple del generador (sección 3.3).

Se probará por último que el patrón de una escala bien formada (sucesión de intervalos largos y cortos) es un tipo de palabra finita de dos letras muy especial, llamada *palabra de Christoffel* (sección 3.4). Por último, la sección 4 resume los resultados esenciales descritos en este artículo.

A lo largo de este trabajo se hará uso de ciertas nociones aritméticas básicas que presentamos a continuación.

DEFINICIÓN. *Se llama fracción continua a toda expresión del tipo*

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

donde, en principio, los a_i pueden ser números arbitrarios. Si los a_i, para $i = 1, 2, \ldots$, son enteros positivos, la expresión suele denominarse fracción continua simple.

Como es bien sabido, todo número irracional puede escribirse de manera única como desarrollo en fracción continua simple infinita. Si el número es racional, admite dos desarrollos finitos distintos, pues $[a_0; a_1, \ldots, a_n + 1] = [a_0; a_1, \ldots, a_n, 1]$. Se llama k-ésimo **convergente** del desarrollo $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ al número racional $\frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$ y **semiconvergente** a todo número del tipo $[a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, j]$, con $0 < j < a_k$, siendo $a_k > 1$.

Los (semi-)convergentes (convergentes o semiconvergentes) de un número pueden calcularse de forma recursiva (ver [16, Teorema 1]):

PROPOSICIÓN 1. *Dado $\theta = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$, usemos $\frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, \ldots, a_k]$ para denotar el k-ésimo convergente de θ, $k \geq 0$, como fracción irreducible. Entonces, se verifica:*

$$[a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, r] = \frac{p_{k-2} + p_{k-1}r}{q_{k-2} + q_{k-1}r} \quad \textit{con } 0 < r \leq a_k \textit{ y } k \geq 2.$$

La siguiente propiedad ofrece una interpretación geométrica de los coeficientes del desarrollo en fracción continua simple de un número real $\theta \in (0, 1)$. Puede deducirse fácilmente a partir del cálculo recursivo de los coeficientes de la fracción continua (ver [15, Teorema 161]).

PROPOSICIÓN 2. *Sea $0 < \theta < 1$ irracional y sea $[0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$ su desarrollo en fracción continua. Se verifica que a_1 es el número de veces que cabe un intervalo de longitud $\theta_1 = \theta$ en el intervalo $[0, 1]$ dejando de resto al final un intervalo de longitud θ_2, que a su vez cabe a_2 veces en el intervalo de longitud θ_1, dejando un intervalo de longitud θ_3, y así indefinidamente para θ_k y a_k.*

Otra noción que resultará de gran utilidad al analizar ciertas propiedades de las escalas es la familia de las **series de Farey**. Se llama serie de Farey $\mathfrak{F}_N$ de orden N a la sucesión creciente de fracciones irreducibles, comprendidas entre 0 y 1 y cuyo denominador es menor o igual a N. Por ejemplo, el siguiente conjunto ordenado es la serie de Farey de orden 5:

$$\mathfrak{F}_5 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\}.$$

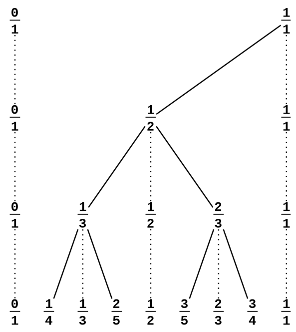


Figura 1: Árbol de Stern-Brocot.

Puede observarse cómo el determinante formado por los numeradores y denominadores de dos fracciones consecutivas de $\mathfrak{F}_5$ vale -1. Esta propiedad caracteriza a las fracciones consecutivas de una serie de Farey:

Proposición 3. *Si dos fracciones irreducibles* $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}$ *son consecutivas en una serie de Farey* $\mathfrak{F}_N$ *(*$N \geq \text{máx}(q_1, q_2)$*), entonces*

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = -1.$$

Se llama **mediación** (ver [5]) de dos fracciones $\frac{a_1}{b_1}$ y $\frac{a_2}{b_2}$ a la fracción $\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}$. En el ejemplo de $\mathfrak{F}_5$ puede observarse cómo, para cada tres fracciones consecutivas, la del medio es la mediación de las otras dos. Ésta es también una propiedad esencial de las ternas de fracciones consecutivas en una serie de Farey $\mathfrak{F}_N$:

Proposición 4. *Si las fracciones irreducibles* $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_2}{q_2}$ *son consecutivas en* $\mathfrak{F}_N$ *(*$N \geq \text{máx}(q_1, q_2, q_3)$*), entonces*

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2}.$$

Los anteriores resultados nos ofrecen una forma de representar al conjunto de racionales comprendidos entre 0 y 1 sobre los nodos de un árbol binario, llamado árbol de Stern-Brocot (ver figura 1). En él, cada fracción es la mediación de las fracciones a izquierda y derecha en el nivel inmediato superior. Entonces, si en la fila N no se tienen en cuenta las fracciones de denominador mayor que N, aparece la serie de Farey $\mathfrak{F}_N$ (en la figura, de la última fila se obtendría $\mathfrak{F}_4$).

1. Aproximación matemática a la noción de escala

En el mundo que nos rodea, todo sonido —esto es, toda vibración del aire (fluctuación de la presión del aire)— puede descomponerse, en buena medida, como una combinación de «sonidos puros». En estos sonidos puros la presión del aire viene determinada por una función periódica del tiempo del tipo $p(t) = A\,\mathrm{sen}(2\pi f t)$, donde A es la presión máxima de la onda y f la *frecuencia* o número de ciclos (ondas de presión o periodos) por segundo. La presión máxima de la onda determina la **intensidad** del sonido, o volumen con el que lo percibimos, mientras que la frecuencia, que suele medirse en *Herzios* (Hz) o ciclos por segundo, determina su **altura**: las frecuencias altas se corresponden con sonidos agudos, mientras que las frecuencias bajas se corresponden con sonidos graves. Otra propiedad esencial del sonido es el **timbre**: dos instrumentos musicales distintos que *toquen una misma nota* de frecuencia f producirán sonidos muy diferentes. Esto es así debido a que la combinación de «sonidos puros» que producen ambos instrumentos al reproducir una misma nota es también muy diferente.

De entre toda la posible gama *continua* de frecuencias, a menudo nos limitamos a un conjunto discreto dentro de cada tesitura (rango de alturas propio de cada voz o instrumento). Por ejemplo, en un piano hay doce teclas, doce posible sonidos, en cada octava. Al delimitar nuestro ambiente de trabajo, estamos determinando una **escala**. Podemos definir una escala, grosso modo, como un conjunto fijo de frecuencias que se puede transportar a las distintas tesituras. Dado que el presente artículo analiza las propiedades matemáticas de un cierto tipo de escala musical, de los cuatro aspectos fundamentales de un sonido, intensidad, timbre, altura y duración, a partir de ahora nos vamos a centrar sólo en la altura, dejando de lado los otros tres. Diremos que estamos trabajando con **tonos**.

Un tono musical queda, pues, completamente determinado por la frecuencia de la onda sonora que produce el sonido. Al estudiar tonos, tan importante es considerar su frecuencia absoluta como la frecuencia relativa respecto de otro tono (razón de frecuencias). Esto es debido a que la mayor parte de las personas no distinguimos las frecuencias absolutas (no tenemos oído absoluto), pero sí la relación entre las frecuencias de ciertos sonidos; si unas son más graves que otras. A la razón entre las frecuencias se le llama *intervalo*.

Dado un tono de frecuencia f, el tono de frecuencia $2f$ se dice que está *una octava por encima* del primero. Por lo general resulta complicado distinguir dos tonos cuya distancia es de una octava. De hecho, si se hace cantar a la vez una misma melodía a una mujer, a un hombre y a un niño, se obtendrá una sola línea melódica en la que las voces de los tres cantantes se fundirán casi por completo. En términos musicales esto se expresa diciendo que el intervalo $2 \in \mathbb{R}^+$ es el más *consonante*. El subgrupo $\langle 2\rangle \subset \mathbb{R}^+$ de las octavas, $\langle 2\rangle = \{2^k;\, k \in \mathbb{Z}\}$, establece una relación de equivalencia sobre el conjunto de frecuencias $\mathcal{F}$: $f \sim f' \Leftrightarrow f = 2^k f'$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ (f y f' determinan la misma nota módulo octavas).

Definición. *Se llama* ***octava*** *$\mathcal{O}$ al conjunto cociente $\mathcal{F}/\langle 2\rangle$. A los elementos de $\mathcal{O}$ se les llama* ***notas*** *musicales.*

Una vez fijada una frecuencia $f \in \mathcal{F}$, podemos identificar $\mathcal{F}$ con el conjunto de intervalos $\mathbb{R}^+$ mediante el morfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\phi_f} & \mathbb{R}^+ \\ g & \longmapsto & g/f \end{array}$$

que asigna a cada frecuencia $g \in \mathcal{F}$ la distancia —el **intervalo**— que separa g de f.

Según esto, la órbita del elemento f respecto de la acción del grupo $\langle 2 \rangle$ en el conjunto $\mathbb{R}^+$ se identifica con las progresiones geométricas de primer término 1 y razones 2 y $\frac{1}{2}$. Es decir, las octavas que se obtienen a partir de una frecuencia fija f se representan en $\mathbb{R}^+$ como intervalos de longitudes potencias enteras de 2. Si queremos que cada octava con la que trabajemos tenga la misma *longitud*, tendremos que tomar $\log_2$ y obtendremos octavas de longitud 1. Hay un segundo motivo por el que interesa trabajar con logaritmos de frecuencias: el oído humano aprecia las distancias entre dos tonos no por la diferencia de sus frecuencias, sino por la razón entre las mismas. Esta es la conocida como *ley de Weber-Fechner*, según la cual la relación entre estímulo y percepción es logarítmica. Por ejemplo, la distancia entre dos tonos de frecuencias 200 Hz y 500 Hz será percibida similar a la existente entre los tonos de frecuencias 500 Hz y 1250 Hz.

Podemos resumir todas las consideraciones anteriores mediante el siguiente cuadro conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\phi_f"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{R}^+ \arrow[r, "\log_2"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{R} \arrow[d, "\pi"] \\
\mathcal{F}/\langle 2 \rangle \arrow[r] & \mathbb{R}^+/\langle 2 \rangle \arrow[r, "\log_2"] & \mathbb{R}/\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Ejemplo 1. *Supongamos que fijamos la frecuencia* $f = 440\,\mathrm{Hz}$ *(que corresponde con la frecuencia estándar de la nota La por encima del Do central del piano). Veamos cómo se recorre el anterior diagrama en uno y otro sentido. La frecuencia* $f \in \mathcal{F}$ *se corresponde con* $0 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *vía* $\pi \circ \log_2 \circ \phi_f$*. Si tomamos otra frecuencia cualquiera, por ejemplo* $g = 500$*, se le asignará* $\log_2(\frac{500}{440}) \simeq 0.184\,42$ *en* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$*. Recíprocamente se puede calcular la frecuencia que corresponde a cualquier valor de* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *dentro de la escala que determinan dos notas La consecutivas,* $440\,\mathrm{Hz}$ *y* $880\,\mathrm{Hz}$*. Por ejemplo, la nota a la que corresponde* $0.25 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *es* $2^{0.25} \cdot 440 \simeq 523.25\,\mathrm{Hz}$*.*

Así pues, una vez fijada una frecuencia, el conjunto de intervalos de la octava $\mathcal{O}$ se identifica con la circunferencia $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ vía $\log_2$. Podemos concluir que:

> «*... el estudio de la octava es equivalente al estudio de la geometría intrínseca de una circunferencia orientada.*» [20]

Damos, por fin, una definición rigurosa de escala:

Definición. *Se llama* ***escala de*** N ***notas*** *a todo subconjunto ordenado* Σ *de* N *elementos de la circunferencia* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$*:*

$$\Sigma = \{0 \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < 1\} \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

Llamaremos ***paso*** *a la distancia* $x_{i+1} - x_i$ *entre notas consecutivas* x_i*,* x_{i+1} *de la escala.*

El paso al cociente $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ equivale a la toma de la parte decimal de un número, $\{x\} = x - [x]$ donde $[x]$ es la parte entera de x, y por ello es posible también estudiar la octava mediante las partes decimales de números reales.

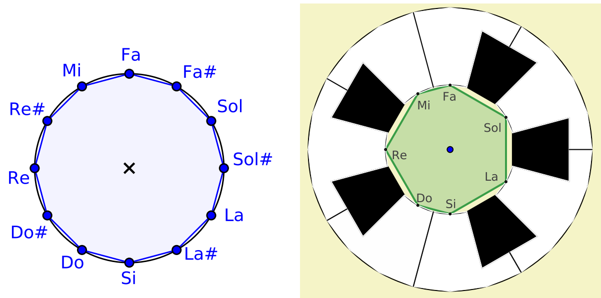


Figura 2: Dos escalas importantes: la cromática y la diatónica.

A partir de ahora supondremos que la primera nota de cada escala está situada en el cero ($x_0 = 0$). De otro modo bastaría con rotar el círculo hasta hacer coincidir la primera nota con el punto correspondiente al 0 de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

EJEMPLO 2. *Se llama* ***escala de temperamento igual de*** N ***notas*** *a la escala* $\Sigma = \{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}\}$. *Estas escalas se representan geométricamente mediante vértices de polígonos regulares inscritos en la circunferencia* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. *En la figura 2 (izquierda) se muestra la escala de temperamento igual de* 12 *notas, que se corresponde con los sonidos que producen* 12 *teclas consecutivas del piano.*

EJEMPLO 3. *La escala diatónica de Do Mayor (figura 2, derecha), formada por* 7 *teclas blancas del piano consecutivas a partir de un Do, se corresponde con el siguiente subconjunto de la escala de temperamento igual de* 12 *notas:*

$$\left\{0, \frac{2}{12}, \frac{4}{12}, \frac{6}{12}, \frac{7}{12}, \frac{9}{12}, \frac{11}{12}\right\}.$$

2. ESCALAS GENERADAS. TEOREMA DE LOS 3 PASOS

El intervalo más consonante, *la octava*, nos sirve para pasar al cociente e identificar sonidos *módulo octavas*. El segundo intervalo más *consonante*, la quinta justa *pura*, que se corresponde con la razón de frecuencias $\frac{3}{2}$, nos puede servir para construir una escala mediante múltiplos enteros de $\log_2\left(\frac{3}{2}\right) = \{\log_2 3\}$. Esta escala generada por quintas se denomina *escala pitagórica* (ver figura 7):

$$\{0, \{\log_2 3\}, \{2\log_2 3\}, \ldots, \{(N-1)\log_2 3\}\}.$$

Dado que 3^k nunca es una potencia de 2, ninguna escala generada por quintas coincide con la escala de temperamento igual. Sin embargo, hay ocasiones en las que la escala de temperamento igual puede ser una buena aproximación de la escala generada por quintas. Esto es así cuando $\left(\frac{3}{2}\right)^N$ está cerca de algún número entero; o bien, en notación logarítmica, cuando $\{N\log_2 3\} \simeq 0$. Por ejemplo, $\{7\log_2 3\} \simeq 0.094$, por lo que la escala diatónica de 7 notas (ejemplo 3) aproxima a la de 7 notas

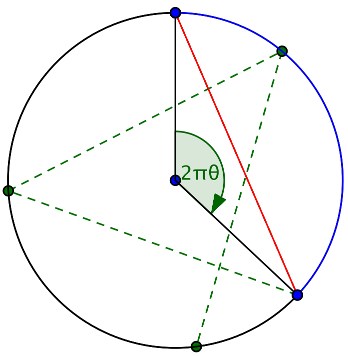


Figura 3: La escala generada por θ se reproduce en la circunferencia como un polígono estrellado cuyos arcos tienen una amplitud $2\pi\theta$.

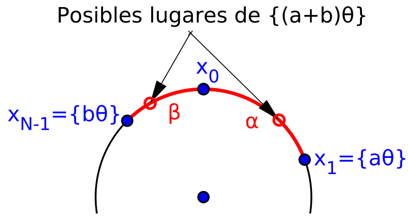


Figura 4: Primera y última nota de la escala $\Gamma(\theta, N)$.

pitagórica (figura 7). Mejor aproximación es la que ofrece la escala pitagórica de 12 notas con respecto a la de temperamento igual de 12 notas, puesto que $\{12 \log_2 3\} \simeq 0.0195$. Puede encontrarse un completo análisis del *problema de los temperamentos musicales* en [6].

La noción de escala pitagórica puede generalizarse a la de escala generada por un generador $\theta \in [0, 1)$ y un número de notas $N > 1$ arbitrarios:

Definición. *Se llama* ***escala generada de*** N ***notas*** *y* ***generador*** θ *a la escala*

$$\Gamma(\theta, N) = \{\{k\theta\}, k = 0, 1, \ldots, N-1\}.$$

Geométricamente, la construcción de escalas generadas por θ equivale al trazado de líneas poligonales estrelladas en la circunferencia de longitud 1 (ver figura 3). Si dibujamos líneas poligonales de este tipo, podremos observar cómo los arcos en los que queda dividida la circunferencia siempre tienen como máximo tres longitudes distintas. En términos musicales: *toda escala generada tiene como mucho* 3 *pasos distintos*. Por ejemplo, en los cuadros 1 y 2 se muestran cómo las escalas de 4 y 5 notas generadas por $\{e\} = 0.718\ldots$ tienen, respectivamente, 2 y 3 pasos distintos.

Este hecho, llamado *conjetura de Steinhaus* o *de los tres pasos*, fue demostrado simultáneamente por Sós [23] y Świerczkowski [24] en 1958. Desde entonces se han realizado numerosas formulaciones equivalentes del problema y de su demostración, unas desde un punto de vista aritmético ([22], [21]), otras dentro de la combinatoria algebraica de palabras (ver [3]).

Ofrecemos a continuación una demostración basada en ideas generales de N. B. Slater en [22], pero adaptada a la notación y lenguaje de las escalas musicales.

Teorema 1 (de los tres pasos). *El número de pasos distintos de la escala* $\Gamma(\theta, N)$ *es* 1, 2 *o* 3.

Demostración. Sean a y $b \in \{1, \ldots, N-1\}$ tales que

$$x_1 = \{a\theta\} = \min_{1 \le k \le N-1} \{k\theta\}, \qquad x_{N-1} = \{b\theta\} = \max_{1 \le k \le N-1} \{k\theta\},$$

Notas	Pasos
$x_0 = 0$	$x_1 - x_0 = 0.154$
$x_1 = 0.154$	$x_2 - x_1 = 0.282$
$x_2 = 0.436$	$x_3 - x_2 = 0.282$
$x_3 = 0.718$	$1 - x_3 = 0.282$

Cuadro 1: $\Gamma(\{e\}, 4)$.

Notas	Pasos
$x_0 = 0$	$x_1 - x_0 = 0.154$
$x_1 = 0.154$	$x_2 - x_1 = 0.282$
$x_2 = 0.436$	$x_3 - x_2 = 0.282$
$x_3 = 0.718$	$x_4 - x_3 = 0.154$
$x_4 = 0.872$	$1 - x_4 = 0.128$

Cuadro 2: $\Gamma(\{e\}, 5)$.

de modo que $\alpha = \{a\theta\}$ y $\beta = 1 - \{b\theta\}$ son el primero y último paso de la escala (figura 4). Según $\{a\theta\} + \{b\theta\}$ sea ≤ 1 o ≥ 1, tendremos:

$$\{(a+b)\theta\} = \begin{cases} \{a\theta\} + \{b\theta\} \leq 1 & \Rightarrow \ \{b\theta\} < \{(a+b)\theta\} \leq 1, \\ \{a\theta\} + \{b\theta\} - 1 \geq 0 & \Rightarrow \ 0 \leq \{(a+b)\theta\} < \{a\theta\}. \end{cases}$$

Se deduce que $\{(a+b)\theta\}$ está en el arco que determinan x_{N-1} y x_1, como se muestra en la figura 4.

Calculemos a continuación la longitud del intervalo determinado por dos notas arbitrarias $\{r\theta\} > \{s\theta\}$ de la escala:

$$\{r\theta\} - \{s\theta\} = \begin{cases} \{(r-s)\theta\} \geq \min\{k\theta\} = \alpha & \text{si } r > s, \\ 1 - \{(s-r)\theta\} \geq 1 - \max\{k\theta\} = \beta & \text{si } s > r. \end{cases}$$

En el primer caso, si $\{(r-s)\theta\} = \alpha$, entonces $\{r\theta\}$ y $\{s\theta\}$ deben ser notas consecutivas. En efecto, si existiese $t \in \{1, \dots, N-1\}$ tal que $\{r\theta\} > \{t\theta\} > \{s\theta\}$, o bien $t > s$, y entonces $\{t\theta\} - \{s\theta\} = \{(t-s)\theta\} \geq \alpha$ que es imposible; o bien $t < s$, y entonces $r > t$ con lo que $\{(r-t)\theta\} \geq \alpha$, otra vez imposible. Del mismo modo se prueba que, si $1 - \{(s-r)\theta\} = \beta$, $\{s\theta\}$ y $\{r\theta\}$ son notas consecutivas. Por todo ello, tenemos $N - a$ pasos de longitud α:

$$\{(r+a)\theta\} - \{r\theta\} = \alpha \quad \forall r = 0, 1, \dots, N-a-1 \tag{1}$$

y $N - b$ pasos de longitud β:

$$1 - \{b\theta\}, \{(r-b)\theta\} - \{r\theta\} = \beta \quad \forall r = b+1, \dots, N-1. \tag{2}$$

Queda por determinar la longitud de $N - (N-a) - (N-b) = a + b - N$ pasos. Obsérvese que, por definición de a y b, $\{(a+b)\theta\}$ no puede ser una nota de la escala, con lo que $a + b \geq N$. Si $N = a + b$, todos los pasos son de los **dos** tipos anteriores, α y β, que se reducen a **uno** sólo en caso de que $\alpha = \beta$.[1] Supongamos por último que $a + b > N$. Vamos a demostrar que la longitud de los $N - (a+b)$ pasos restantes es $\alpha + \beta$. Puesto que quedan por computar los $a+b-N$ pasos cuyos extremos inferiores son las notas

$$\{k\theta\}, \text{ con } k \in \{N-a, N-a+1, \dots, b-1\},$$

[1]Si $\theta = \frac{p}{q}$ y $N \geq q$, entonces la escala coincide con un q-gono regular estrellado cuyos pasos miden todos $\frac{1}{q}$.

determinemos cuándo se hace mínima la longitud de los intervalos con extremo inicial dichas notas, $\{\nu\theta\} - \{k\theta\}$, siendo $\{\nu\theta\} > \{k\theta\}$.

- Si $\nu > k$, dado que $\nu - k < N - (N - a) = a$, se tiene que $\{\nu\theta\} - \{k\theta\} = \{(\nu - k)\theta\} > \alpha = \{a\theta\}$. Por tanto,

$$\{(\nu - k)\theta\} = \{a\theta - (a - \nu + k)\theta\} = \{a\theta\} + 1 - \{(a - \nu + k)\theta\} \geq \alpha + \beta$$

  y la igualdad se alcanza si y sólo si $a - \nu + k = b$, esto es, $\nu = a + k - b$.
- Un razonamiento análogo conduce al mismo resultado si $k > \nu$.

En resumen, si $k \in \{N - a, N - a + 1, \ldots, b - 1\}$, las notas $\{(k + a - b)\theta\}$ y $\{k\theta\}$ son consecutivas y el paso que determinan tiene longitud $\alpha + \beta$. □

La siguiente proposición profundiza el resultado del teorema de los tres pasos (teorema 1) al determinar los valores de N para los que $\Gamma(\theta, N)$ tiene dos pasos distintos. Para ilustrar su demostración, se recoge en la figura 5 el caso particular de $\theta = [0; 3, 2, 3, 4, \ldots] \simeq 0.2912\ldots$

Proposición 5. *Sea $0 < \theta < 1$ un número irracional. La escala $\Gamma(\theta, N)$ tiene exactamente dos intervalos si y sólo si N es el denominador de un semiconvergente M/N de θ. En ese caso, además, $x_M = \{\theta\}$.*

Demostración. Vamos a probar de forma recursiva que los valores de N y M para los que $\Gamma(N, \theta)$ tiene exactamente dos intervalos distintos y $x_M = \{\theta\}$ verifican las ecuaciones recurrentes dadas en la proposición 1 para los numeradores y denominadores de los (semi-)convergentes de θ.

Es obvio que, por la proposición 2, los valores $N = 2, \ldots, a_1 + 1$ determinan todos escalas con exactamente dos pasos distintos (ver figura 5(a)). En todos los casos $M = 1$. Nótese además que $N = a_1$ es el denominador del primer convergente y $M = 1$ su numerador. Para $N = 1 + a_1$ hay a_1 pasos de longitud $\theta_1 = \theta$ y uno de longitud $\theta_2 = 1 - a_1\theta_1$.

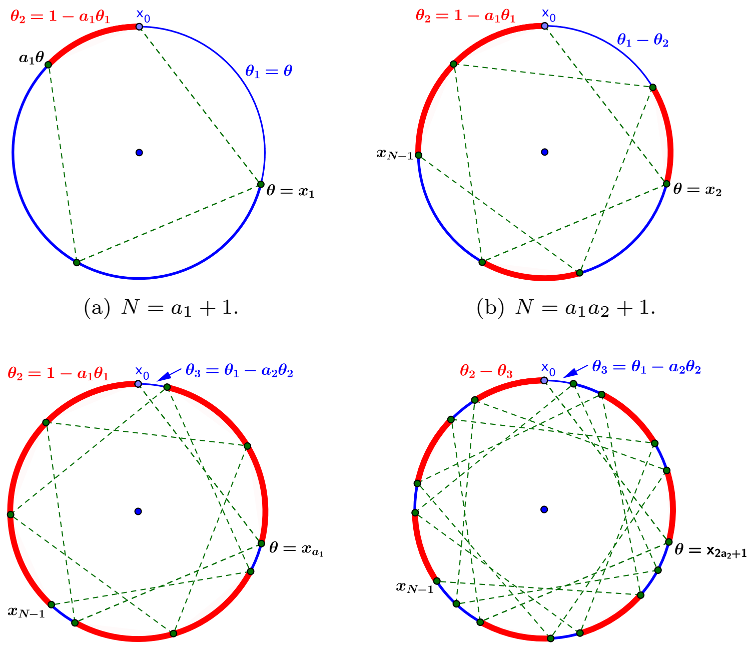
Si generamos una nota más, esto es, si tomamos $N = a_1 + 2$, el intervalo determinado entre las notas x_0 y $x_1 = \theta_1$ queda dividido en otros dos, de longitudes θ_2 y $\theta_1 - \theta_2$. Por ello, si queremos encontrar la siguiente escala con dos pasos, tendremos que dividir todos los pasos de longitud θ_1 en otros dos, de longitudes $\theta_1 - \theta_2$ y θ_2. Para ello se necesitan a_1 notas más, es decir, el siguiente N con exactamente dos pasos es $N = a_1 + 1 + a_1 = 2a_1 + 1$, por lo que ahora $x_1 = \theta_1 - \theta_2$ y $M = 2$ (ver figura 5(b)).

Según la proposición 2, el intervalo de longitud θ_2 cabe a_2 veces en el de longitud θ_1, por lo que las siguientes escalas con dos pasos tendrán $N = 1 + ra_1$ notas y $\theta = x_r$, siendo $r = 2, \ldots, a_2 + 1$. Nótese que para $r = a_2$ se recuperan el numerador y denominador del segundo convergente

$$p_2 = a_2, \qquad q_2 = 1 + a_1a_2;$$

y para $r = a_2 + 1$, es decir

$$M = 1 + a_2, \qquad N = 1 + a_1(a_2 + 1) = a_1 + q_2,$$



(a) $N = a_1 + 1$. (b) $N = a_1a_2 + 1$.

(c) $N = a_1a_2 + 1 + a_1$. (d) $N = 2(a_1a_2 + 1) + a_1$.

Figura 5: Cuatro escalas generadas por $\theta = [0; 3, 2, 3, 4, \ldots]$ de dos pasos.

tenemos $q_2 = 1 + a_1a_2$ intervalos de longitud θ_2 y $q_1 = a_1$ intervalos de longitud θ_3, de los cuales, entre x_0 y $x_M = \{\theta\}$ hay $p_2 = a_2$ intervalos de longitud θ_2 y $p_1 = 1$ intervalo de longitud θ_3 (ver figura 5(c)).

Al generar ahora una nota más, el intervalo de longitud θ_2 que va de x_{N-1} a $x_0 = 0$ queda dividido en dos, de longitudes θ_3 y $\theta_2 - \theta_3$. Por ello, la siguiente escala con dos pasos se obtiene al partir en dos todos los intervalos de longitud θ_2. Para ello se necesitan $1 + a_1a_2$ pasos más, es decir, el siguiente N con exactamente dos intervalos es $N = 1 + a_1(a_2 + 1) + 1 + a_1a_2 = a_1 + (1 + a_1a_2) \cdot 2$, y el correspondiente valor de M es $1 + a_2 + a_2 = 1 + a_2 \cdot 2$ (ver figura 5(d)). Así consecutivamente hasta que, por la proposición 2, se tiene $x_{N-1} = \theta_2 - a_3\theta_3$. Los valores $N = a_1 + (1 + a_1a_1)r$, con $r = 2, \ldots, a_3 + 1$ tienen exactamente dos intervalos, y además se tiene $M = 1 + a_2r$. Nótese que para $r = a_3$ se recuperan el numerador y el denominador del tercer convergente:

$$p_3 = 1 + a_2a_3 = p_1 + p_2a_3, \qquad q_3 = a_1 + (1 + a_1a_2)a_3 = q_1 + q_2a_3;$$

y para $r = a_3 + 1$, es decir,

$$\begin{aligned} M &= 1 + a_2(a_3 + 1) = a_2 + (1 + a_2a_3) = p_2 + p_3, \\ N &= a_1 + (1 + a_1a_1)(a_3 + 1) = (1 + a_1a_2) + (a_1 + (1 + a_1a_2)a_3) = q_2 + q_3, \end{aligned}$$

tenemos q_3 intervalos de longitud θ_3 y q_2 intervalos de longitud θ_4, de los cuales, entre x_0 y $\{\theta\}$ hay p_3 intervalos de longitud θ_3 y p_2 intervalos de longitud θ_4. Siguiendo el razonamiento anterior, los siguientes valores de N con exactamente dos intervalos son

$$N = q_2 + q_3 r, \qquad r = 2, \ldots, a_4 + 1,$$

para los cuales, además,

$$M = p_2 + p_3 r, \qquad r = 2, \ldots, a_4 + 1.$$

Y así, recurrentemente, se tiene que los valores N con exactamente dos intervalos son los de la forma

$$N = q_{k-2} + q_{k-1} r, \qquad r = 1, \ldots, a_k,$$

para los cuales, además,

$$M = p_{k-2} + p_{k-1} r, \qquad r = 1, \ldots, a_k,$$

como queríamos demostrar en virtud de la proposición 1. □

Si el generador es racional, la escala puede tener dos pasos sin que el número de notas sea el denominador de un (semi-)convergente:

Proposición 6. *Si $\Gamma(\theta, N)$ es una escala generada por $\theta = \frac{p}{q} = [0; a_1, \ldots, a_k] \in \mathbb{Q}$ siendo $a_k > 1$ y $\frac{p'}{q'} = [0; a_1, \ldots, a_k - 1]$ es el penúltimo (semi-)convergente de θ:*

1. *Γ tiene un único paso distinto si $N \geq q$.*
2. *Γ tiene dos pasos distintos si se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:*
   a) *N es el denominador de un convergente o semiconvergente de θ.*
   b) *$q' < N < q$.*
3. *Γ tiene tres pasos en cualquier otro caso.*

Obsérvese que, si $N = q'$, los pasos de la escala son del tipo α y 2α, por lo que todas las escalas $\Gamma(\theta, N)$ con $q' < N < q$ van a tener dos pasos distintos, mientras que, si $N \geq q$, se obtiene un polígono regular estrellado y la escala es de temperamento igual.

3. Introducción a la teoría de escalas bien formadas

A lo largo del último tercio del siglo XX un grupo de teóricos musicales han centrado su atención en analizar las propiedades que dan estructura a las escalas más frecuentes, desarrollando así un campo propio de la teoría de la música: *la teoría de conjuntos diatónicos*. Entre los principales objetivos de esta teoría podemos citar:

1. Identificar y generalizar las propiedades que caracterizan a las escalas más frecuentes.

2. Proponer modelos de escalas microtonales (con pasos menores que en la escala de temperamento igual de 12 notas) basados en las anteriores propiedades.
3. Analizar, desde un punto de vista estructural, los motivos por los que algunos tipos de escalas han tenido tanta importancia a lo largo de la historia y de las distintas culturas.

El núcleo de la teoría de conjuntos diatónicos está constituido por los trabajos de Gerald Balzano ([4]), Eytan Agmon ([1] y [2]) y John Clough ([12] y [13]). N. Carey y D. Clampitt ([9], [10] y [11]) lograron unificar gran parte de las nociones de la teoría de conjuntos diatónicos al introducir las escalas bien formadas (escalas WF, del inglés *well-formed scales*). Las definen a partir de dos propiedades que pueden verificar las escalas generadas por quintas ($\theta = \log_2\left(\frac{3}{2}\right)$): la *propiedad de clausura* y la *propiedad de simetría*.

Una escala generada $\Gamma(\theta, N)$ verifica la *propiedad de clausura* cuando, al generar una nota más ($\{N\theta\}$), ésta cae en el arco de circunferencia comprendido entre la última nota, x_{N-1}, y la primera, x_1 (figura 4). Como se vio implícitamente en la demostración del teorema 5, la propiedad de clausura está relacionada de modo directo con el hecho de que N sea el denominador de un convergente del generador de la escala θ.

Para describir la *propiedad de simetría*, N. Carey y D. Clampitt colocan las n primeras notas de la escala generada por quintas (Fa-Do-Sol-…) en n puntos equidistantes de la circunferencia y luego trazan la poligonal desde la nota más grave (Fa) hasta la más aguda. Si el polígono estrellado que resulta es regular, la escala verifica la propiedad de simetría (ver figuras 6(a) y 6(b)).

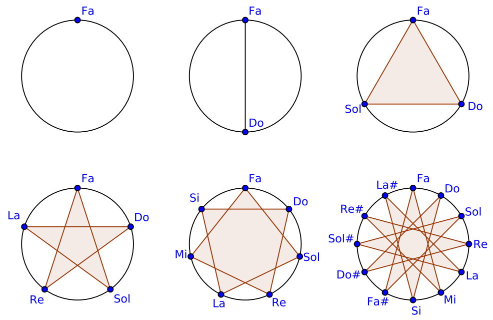
En la siguiente sección establecemos una definición formal de las escalas bien formadas para después (sección 3.2) proponer una definición equivalente de estas escalas que está estrechamente relacionada con la propiedad de simetría. A continuación (sección 3.3) se prueba que las escalas WF verifican la propiedad de clausura y están, por tanto, estrechamente ligadas con los semiconvergentes del generador elegido. En particular se probará que las escalas bien formadas de generador irracional tienen pasos de dos longitudes distintas. En la última sección (sección 3.4) se estudia la forma en la que estos dos pasos se distribuyen en la escala. Para ello se introducirán las nociones necesarias de teoría de palabras.

3.1. Escalas bien formadas

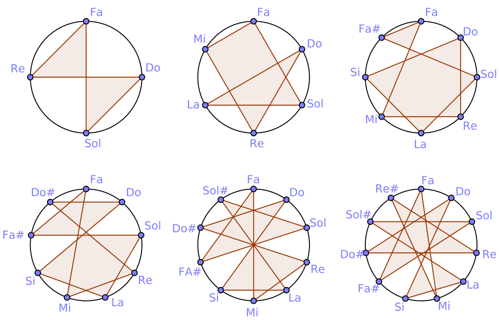
En un polígono estrellado regular como los de la figura 6(a), el orden de los vértices a medida que se recorre la poligonal y el orden según el sentido antihorario sobre la circunferencia, siempre empezando por el x_0, están relacionados de una manera muy particular. Esta idea es el punto de partida de la definición de escala bien formada.

Dado $k \in \mathbb{Z}_N^* = \{x \in \mathbb{Z}_N \text{ tales que } (x, N) = 1\}$, denotemos por τ_k el automorfismo del grupo aditivo $\mathbb{Z}_N$ definido como

$$\begin{array}{rccl} \tau_k : & \mathbb{Z}_N & \longrightarrow & \mathbb{Z}_N \\ & i & \longmapsto & ki \mod N. \end{array}$$



(a) Las escalas pitagóricas de $\{1,2,3,5,7,12\}$ notas cumplen el principio de simetría.



(b) Las escalas pitagóricas de $\{4,6,8,9,10,11\}$ notas no lo cumplen.

Figura 6: Escalas generadas por quintas de $\{1,2,\ldots,12\}$ notas.

Definición. *Sea $\Gamma(\theta,N)=\{0=x_0<x_1<\cdots<x_{N-1}\}$ una escala de N notas generada por θ. Se dice que Γ está* ***bien formada****, o que Γ es una* ***escala WF****, si existe un $M\in\mathbb{Z}_N^*$, llamado* ***multiplicador de la escala****, tal que*

$$\{k\theta\}=x_{\tau_M(k)}\quad \forall k=0,1,\ldots,N-1.$$

La condición anterior puede plantearse del siguiente modo equivalente:

$$\{k\theta\}=x_{\tau_M(k)}\quad \forall k\in\mathbb{Z}_N \;\Leftrightarrow\; \{\tau_{M^*}(k)\theta\}=x_k\quad \forall k\in\mathbb{Z}_N,$$

siendo $M^*=M^{-1}$ mód N. Así, una escala es WF de multiplicador M si y sólo si la secuencia ordenada de notas es

$$0=\{0M^*\theta\}<\{M^*\theta\}<\{2M^*\theta\}<\cdots<\{(N-1)M^*\theta\}<1,$$

donde los coeficientes de θ están reducidos mód N.

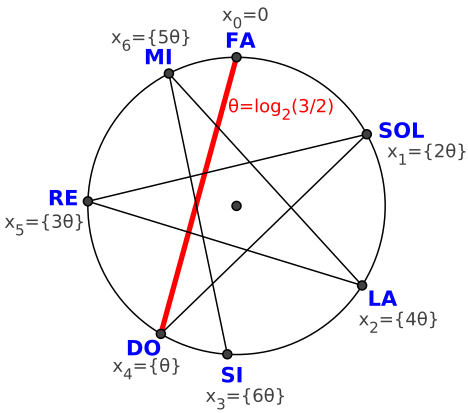


Figura 7: Escala de 7 notas generada por $\{\log_2(3)\}$ (quintas justas). Puede observarse que el multiplicador de la escala es 4, esto es $x_{\tau_4(i)} = \{i\theta\}\ \forall i \in \mathbb{Z}_N$.

En una escala bien formada, la k-ésima nota generada es la $\tau_M(k)$-ésima en orden natural; τ_M transforma el orden de generación en el orden natural de la escala y, por tanto, $\{\theta\} = x_M$. Al revés, τ_{M^*} transforma el orden natural en el de generación y, en particular, $x_1 = \{M^*\theta\}$.

El ejemplo más sencillo de escala WF es el de las escalas de temperamento igual:

EJEMPLO 4. *Si $\theta = \frac{p}{N} < 1$ es una fracción irreducible, entonces la escala $\Gamma(\frac{p}{N}, N)$ se denomina* ***escala bien formada degenerada*** *de N notas. Obsérvese que $x_1 = \{p^* \frac{p}{N}\} = \frac{1}{N}$ y, por tanto,*

$$\{k\theta\} = \left\{\frac{kp}{N}\right\} = x_{kp} = x_{\tau_p(k)}.$$

En consecuencia, $\Gamma(\frac{p}{N}, N)$ es una escala WF de multiplicador p con un solo paso de longitud $\frac{1}{N}$.

Un segundo ejemplo importante de escala bien formada es la generada por quintas justas:

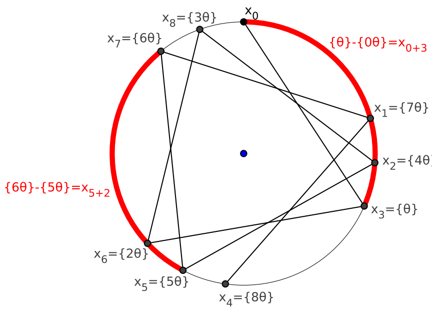
EJEMPLO 5. $\Gamma(\{\log_2 3\}, 7)$ *es una escala WF de multiplicador* 4 *(ver figura 7).*

Y un último ejemplo importante de escala WF es la escala que producen las teclas blancas de un piano afinado cromáticamente a temperamento igual (escala de Do Mayor):

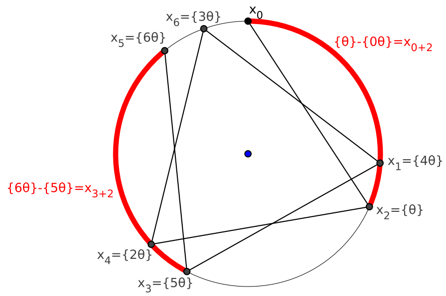
EJEMPLO 6. $\Gamma\left(\frac{7}{12}, 7\right) = \left\{0, \frac{2}{12}, \frac{4}{12}, \frac{6}{12}, \frac{7}{12}, \frac{9}{12}, \frac{11}{12}\right\}$ *es WF de multiplicador* 4.

3.2. ESCALAS WF Y GENERADOR UNIFORME

Sea $\Gamma(\theta, N) = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1}\}$ una escala generada y consideremos $(n_i)_{i\in\mathbb{Z}_N}$ tal que $\{i\theta\} = x_{n_i}$. Esto es, (n_i) es la permutación que transforma el orden de generación $(\{k\theta\})$ en el orden natural (x_i).



(a) $\Gamma(\{\log_2 5\}, 9)$ *no* tiene generador uniforme.



(b) $\Gamma(\{\log_2 5\}, 7)$ *sí* tiene generador uniforme.

Figura 8: Dos ejemplos de escalas generadas por la tercera mayor «justa» (el intervalo cuya relación de frecuencias es $\frac{5}{4}$).

Definición. *La escala generada* $\Gamma(\theta, N)$ *tiene* ***generador uniforme*** *si existe una constante* $k \in \mathbb{Z}_N$*, llamada* ***salto*** *del generador, tal que* $n_{i+1} = n_i + k \mod N$*,* $\forall i = 0, 1, \ldots, N-2$.

Geométricamente, $\Gamma(\theta, N)$ tiene generador uniforme si entre cada par de notas generadas consecutivamente hay el mismo número de notas. Esta condición equivale a que el polígono estrellado que se construiría de forma análoga a los que aparecen en la figura 6 sea regular. Puede darse, por tanto, una definición formal de la *propiedad de simetría* a partir de la noción de *generador uniforme*.

Ejemplo 7. *En la figura 8(a) se muestra cómo el salto del generador de la escala* $\Gamma(\{\log_2 5\}, 9)$ *se descompone, según los casos, en* 2 *o* 3 *pasos. No es, por tanto, uniforme. Sin embargo en la figura 8(b) se muestra cómo* $\Gamma(\{\log_2 5\}, 7)$ *sí tiene generador uniforme, pues entre cada par de notas generadas consecutivamente hay siempre exactamente otra nota.*

El siguiente resultado muestra la equivalencia entre las nociones de escala bien formada y escala con generador uniforme:

Proposición 7. *La escala* $\Gamma(\theta, N)$ *es WF de multiplicador* M *si y sólo si* $\Gamma(\theta, N)$ *tiene generador uniforme de salto* M.

Demostración. Por definición, $\Gamma(\theta, N)$ es WF de multiplicador M si $x_{\tau_M(k)} = \{k\theta\}$ $\forall k \in \mathbb{Z}_N$; pero, a su vez,

$$\begin{aligned} x_{\tau_M(k)} = \{k\theta\} \quad \forall k \in \mathbb{Z}_N &\Leftrightarrow n_k = \tau_M(k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}_N \\ &\Leftrightarrow n_{k+1} = Mk + M = n_k + M \quad \forall k \in \mathbb{Z}_N, \end{aligned}$$

y esto último equivale a que la escala tiene generador uniforme de salto M. □

En resumen, en una escala bien formada de N notas y multiplicador M, el salto del generador se descompone siempre en M pasos.

3.3. Escalas WF y desarrollo en fracción continua simple del generador

TEOREMA 2. *Sea $0 < \theta < 1$ un número irracional. La escala $\Gamma(\theta, N)$ está bien formada y tiene multiplicador $M \in \mathbb{Z}_N^*$ si y sólo si $\frac{M}{N}$ es un (semi-)convergente del generador θ.*

DEMOSTRACIÓN. $\boxed{\Longrightarrow}$ Bastará probar, por la proposición 5, que la escala WF $\Gamma(\theta, N)$ de multiplicador M tiene dos pasos. Obsérvese que, al ser la escala bien formada, $x_{i+1} - x_i = \{(M^*(i+1) \mod N) \cdot \theta\} - \{(M^* i \mod N) \cdot \theta\}$. Esta expresión alcanza exactamente dos posibles valores, $\{M^*\theta\}$ y $1 - \{(N - M^*)\theta\}$, que son distintos por ser θ irracional y M^* primo con N.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea $\frac{M}{N}$ (irreducible) un (semi-)convergente de θ; probemos que la escala $\Gamma(\theta, N)$ está bien formada y su multiplicador es M. Por la proposición 5, la escala tiene dos pasos. Siguiendo la notación de la demostración del teorema de los tres pasos, $N = a + b$ siendo $x_1 = \{a\theta\}$ y $x_{N-1} = \{b\theta\}$ la primera y última notas de la escala. A partir de las ecuaciones (1) y (2) de la demostración de dicho teorema, es posible escribir x_{i+1} en función de $x_i = \{r\theta\}$ del siguiente modo:

$$x_{i+1} = \begin{cases} \{(r+a)\theta\} \Leftrightarrow r + a \leq N - 1, \\ \{(r-b)\theta\} = \{(r+a-N)\theta\} \Leftrightarrow N \leq r + a < 2N. \end{cases}$$

Esto equivale a que $x_j = \{\tau_a(j)\theta\}$ $\forall j = 1, \ldots, N-1$ y, por definición, la escala $\Gamma(\theta, N)$ está bien formada y tiene multiplicador $a^* = a^{-1} \mod N$. Hemos concluido pues, según la proposición 5, $x_M = \{\theta\}$, por lo que $a^* = M$. □

COROLARIO 1. *Si θ es irracional, la escala generada $\Gamma(\theta, N)$ es WF si y sólo si tiene 2 pasos distintos.*

Puede probarse que, si el generador es racional, las escalas WF son exactamente las recogidas en los apartados 1) y 2a) de la proposición 6.

OBSERVACIÓN. M. J. Garmendia y J. A. Navarro definen en [19] las *escalas pitagóricas* como aquellas escalas generadas por quintas que tienen únicamente dos pasos distintos. Demuestran que esto ocurre precisamente si el número de notas generadas coincide con el denominador de un (semi-)convergente del generador $\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$. Es interesante apreciar cómo estos autores apuntan a la noción de escala bien formada de una forma totalmente independiente a la de N. Carey y D. Clampitt.

3.4. Escalas WF y palabras de Christoffel

Con mucha frecuencia es necesario estudiar las propiedades aritméticas y combinatorias de ciertas cadenas de caracteres: por ejemplo, al presentar los elementos de un grupo no conmutativo finito-generado, o las fórmulas que pueden generarse a partir de una gramática formal, o los posibles caminos en un digrafo (autómata finito), o también las codificaciones de ciertas trayectorias de puntos en sistemas dinámicos... La combinatoria de palabras surge de este modo como resultado de la búsqueda de un camino común a todos estos problemas, que provienen de campos tan diversos como la teoría de números, la teoría de grupos, la geometría diferencial… A partir de los años 80, la combinatoria de palabras se consolida como rama de la matemática discreta, al recopilarse una serie de trabajos sobre el análisis de las propiedades de ciertos tipos de cadenas de caracteres, bajo el pseudónimo de M. Lothaire, primero en [17], y más adelante en [18].

La escala diatónica es una sucesión de semitonos (intervalo entre las teclas blancas y negras de un piano) y tonos (dos semitonos) y, por tanto, puede pensarse como una secuencia de dos letras T y S, es decir, una palabra de alfabeto $\{T, S\}$, más concretamente la palabra $TTTSTTS$, ver figura 7. En esta sección veremos cómo esta palabra, así como la palabra asociada a cualquier escala bien formada, es de un tipo muy particular: una **palabra de Christoffel**. Estas palabras toman el nombre del físico y matemático alemán Elwin B. Christoffel (1829–1900), aunque los primeros ejemplos de palabras de Christoffel son algo anteriores: aparecen en el trabajo del astrónomo Jean Bernoulli [7], quien estudió estas palabras en conexión con las fracciones continuas. Actualmente, las palabras de Christoffel tienen numerosas aplicaciones en otras ramas de las matemáticas: caracterizan los elementos primitivos del grupo libre generado por dos elementos (ver [8, capítulo 5]), codifican la superposición de dos sucesos periódicos (ver [5] y [8, capítulo 6])… y, como veremos en la proposición 8, codifican también los patrones de escalas bien formadas.

Definición. *Se llama palabra de Christoffel de pendiente $\frac{M}{N}$ a la palabra binaria w de longitud N,*

$$\mathbb{Z}_N \xrightarrow{w} \{0, 1\},$$

definida del siguiente modo:

$$w(i) = \left[\frac{(i+1)M}{N}\right] - \left[\frac{iM}{N}\right].$$

Geométricamente las palabras de Christoffel pueden construirse a partir de la recta $y = \frac{M}{N}x$ (ver figura 9). Los puntos de coordenadas enteras que más se aproximan por defecto a la recta son $P_n = \left(n, \left[\frac{M}{N}n\right]\right)$. Dos puntos consecutivos P_n y P_{n+1} están unidos por un segmento horizontal (resp., diagonal) si $w(n) = 0$ (resp., si $w(n) = 1$). De este modo, la palabra de Christoffel aparece como «discretización» de una recta de pendiente arbitraria, al aproximarla al camino en zig-zag que une los puntos de coordenadas enteras más cercanos a ella. Toda palabra de Christoffel w de pendiente $0 < \frac{M}{N} < 1$ se descompone de la forma $w = 0u1$, siendo u otra palabra de alfabeto $\{0, 1\}$. Además, dada la simetría que se aprecia en su interpretación geométrica, la palabra central u es un palíndromo (se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda).

Se llama *patrón* de una escala a la palabra que codifica la sucesión de los distintos tipos de pasos de la escala. Más formalmente:

Definición. *Sea $\Sigma = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1}\}$ una escala de N notas con k pasos distintos $\alpha_0 < \cdots < \alpha_{k-1}$ (es decir, $x_{i+1} - x_i \in \{\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}\}$ $\forall i$). Se llama patrón de Σ a la palabra w_Σ de k letras definida como*

$$w_\Sigma(i) = j \iff x_{i+1} - x_i = \alpha_j \quad \forall i = 0, \ldots, N-1,$$

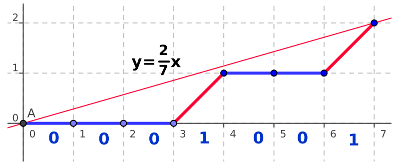


Figura 9: Palabra de Christoffel de pendiente $\frac{2}{7}$.

donde se ha supuesto que $x_N = 1$ *para poder dar sentido al último paso que aparece.*

De igual forma se puede definir el patrón del intervalo determinado por dos notas arbitrarias $x_i < x_k$.

Si Σ es una escala generada, por el teorema de los tres pasos, $w_\Sigma \in \{0,1,2\}^*$ (conjunto de palabras finitas de alfabeto $\{0,1,2\}$). El patrón de una escala WF de N notas será $0\dots0 = 0^N$ si la escala es degenerada, o, en caso contrario, una palabra ω_Γ del conjunto de palabras finitas $\{0,1\}^*$ de alfabeto $\{0,1\}$. El siguiente resultado, extraído de [14], identifica los patrones de escalas WF no degeneradas con las palabras de Christoffel y abre las puertas a la formulación de los resultados de escalas WF desde el punto de vista y la terminología de la combinatoria de palabras.

PROPOSICIÓN 8. *El patrón de una escala bien formada no degenerada, de* N *notas y multiplicador* M*, es la palabra de Christoffel de pendiente* $\frac{M^*}{N}$*.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\Gamma(\theta, N) = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1}\}$ una escala bien formada no degenerada de multiplicador M, y sean α y β sus dos pasos distintos. Según la definición de multiplicador de la escala,

$$x_{k+1} - x_k = \{\tau_{M^*}(k+1)\theta\} - \{\tau_{M^*}(k)\theta\} = \{(\tau_{M^*}(k+1) - \tau_{M^*}(k))\theta\}.$$

Por tanto,

$$x_{k+1} - x_k = \begin{cases} \alpha \Leftrightarrow \tau_{M^*}(k+1) - \tau_{M^*}(k) = M^* & \Leftrightarrow \left[\frac{(k+1)M^*}{N}\right] - \left[\frac{kM^*}{N}\right] = 0, \\ \\ \beta \Leftrightarrow \tau_{M^*}(k+1) - \tau_{M^*}(k) = M^* - N & \Leftrightarrow \left[\frac{(k+1)M^*}{N}\right] - \left[\frac{kM^*}{N}\right] = 1, \end{cases}$$

donde el lado derecho de las dobles implicaciones se obtiene dividiendo por N la igualdad central. Se concluye que w_Γ es la palabra de Christoffel de pendiente $\frac{M^*}{N}$.

$\square$

OBSERVACIÓN. Dada $\Gamma(\theta, N)$ una escala WF de multiplicador M, consideremos las fracciones $\frac{M_1}{N_1}$ y $\frac{M_2}{N_2}$ de la serie de Farey $\mathfrak{F}_N$ de modo que $\frac{M_1}{N_1} < \frac{M}{N} < \frac{M_2}{N_2}$ sean consecutivas en $\mathfrak{F}_N$ (y por tanto $\frac{M}{N} = \frac{M_1+M_2}{N_1+N_2}$). Sean $\alpha = x_1 - x_0$ y $\beta = 1 - x_{N-1}$ los dos pasos de la escala. Se puede demostrar lo siguiente:

1. N_1 y N_2 son las frecuencias de β y α respectivamente.
2. M_1 y M_2 son las frecuencias de β y α en el intervalo delimitado entre x_0 y $x_M = \theta$.

3. La escala $\Gamma(\theta', N)$ tiene el mismo patrón que $\Gamma(\theta, N)$ si y sólo si $\theta' \in \left(\frac{M_1}{N_1}, \frac{M_2}{N_2}\right)$ y $\theta' \neq \left\{\frac{M}{N}\right\}$.

4. Resumen de resultados

Las anteriores secciones han mostrado distintas caracterizaciones de las escalas WF; todas ellas quedan resumidas en el siguiente teorema:

Teorema 3 (Caracterización de las escalas bien formadas). *Una escala de N notas está bien formada y tiene por multiplicador $M \in \mathbb{Z}_N^*$ si y sólo si verifica alguna de las siguientes condiciones equivalentes:*

1. *Está generada por un generador uniforme de salto M.*
2. *Está generada y la fracción $\frac{M}{N}$ es un (semi-)convergente del generador.*
3. *Su patrón es, o bien la palabra 0^N, o bien la palabra de Christoffel de pendiente $\frac{M^{-1} \bmod N}{N}$.*

Agradecimientos. Los autores agradecen al revisor sus sugerencias e indicaciones que han supuesto una mejora en la exposición del artículo.

Referencias

[1] E. Agmon, A Mathematical Model of the Diatonic System, *Journal of Music Theory* **40** (1989), no. 1, 39–59.

[2] E. Agmon, Music Theory as Cognitive Science: Some Conceptual and Methodological Issues, *Music Perception: An Interdisciplinary Journal* **7** (1990), no. 3, 285–308.

[3] P. Alessandri y V. Berthé, Three distance theorems and combinatorics on words, *L'Enseignement Mathématique* **44** (1998), 103–132.

[4] G. Balzano, The Group-Theoretic Description of 12-Fold and Microtonal Pitch Systems, *Computer Music Journal* **4** (1980), no. 4, 66–84.

[5] M. Benito y J. J. Escribano, *Sucesiones de Brocot*, Ed. Ochoa, Logroño, 1998.

[6] D. J. Benson, *Music: A Mathematical Offering*, Cambridge Univ. Press, 2006.

[7] J. Bernoulli, Sur une nouvelle espèce de calcul, *Recueil pour les Astronomes* **1** (1772), 255–284.

[8] J. Berstel, A. Lauve, C. Reutenauer y F. Saliola, *Combinatorics on words: Christoffel words and repetition in words*, CRM-AMS, 2008.

[9] N. Carey, *Distribution Modulo 1 and Musical Scales*, PhD, University of Rochester, 1998.

[10] N. Carey y D. Clampitt, Aspects of Well-formed scales, *Music Theory Spectrum* **11** (1989), no. 2, 187–206.

[11] N. CAREY Y D. CLAMPITT, Self-similar pitch structures, their duals and rhythmic analogues, *Perspectives of New Music* **34** (1996), 62–87.

[12] J. CLOUGH, Aspects of Diatonic Sets, *Journal of Music Theory* **23** (1979), no. 1, 45–61.

[13] J. CLOUGH Y G. MYERSON, Variety and Multiplicity in Diatonic Systems, *Journal of Music Theory* **29** (1985), no. 2, 249–270.

[14] M. DOMÍNGUEZ, D. CLAMPITT Y T. NOLL, Well-formed scales, maximally even sets and Christoffel Words, *Mathematics and Computation in Music* (International Conference, Berlin, 2007), Springer, CCIS 37 (2009), 477–488.

[15] G. H. HARDY Y E. M. WRIGHT, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford at the Clarendon Press, 1960.

[16] A. Y. KHINCHIN, *Continued Fractions*, The University of Chicago Press, Phoenix Books, 1964.

[17] M. LOTHAIRE, *Combinatorics on Words*, Cambridge University Press, 1983.

[18] M. LOTHAIRE, *Algebraic Combinatorics on Words*, Cambridge University Press, 2002.

[19] J. A. NAVARRO Y M. J. GARMENDIA, Musical Scales, *Irish Math. Soc. Bull.* **35** (1995), 24–41.

[20] J. A. NAVARRO Y M. J. GARMENDIA, Mathematical theory of musical scales, *Extracta Mathematicae* **11** (1996), no. 2, 369–374.

[21] T. VAN RAVENSTEIN, The Three Gap Theorem (Steinhaus Conjecture), *J. Aust. Math. Soc.* **45** (1988), 360–370.

[22] N. B. SLATER, Gaps and Steps for the Sequence Nr mod 1, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **63** (1967), 1115–1123.

[23] V. SÓS, On the distribution mod 1 of the sequence $n\alpha$, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **1** (1958), 127–134.

[24] S. P. ŚWIERCZKOWSKI, On successive settings of an arc on the circumference of a circle, *Fund. Math.* **46** (1958), 187–189.

MARCO CASTRILLÓN, DPTO. DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Correo electrónico: `mcastri@mat.ucm.es`

MANUEL DOMÍNGUEZ, DPTO. DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Correo electrónico: `mdrmanuel@gmail.com`