Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri Ramírez y José Luis Díaz Barrero

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@dmc.unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 30 de septiembre de 2013.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco ($\star$) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 217. *Propuesto por Pedro H. O. Pantoja (estudiante), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Brasil.*

Sea $S(n)$ la suma de los dígitos de un entero positivo n. Probar que, para cada entero positivo m, la ecuación

$$2 + S(n) + S(n^2) + \cdots + S(n^m) = S(n^{m+1})$$

admite infinitas soluciones enteras.

Problema 218. *Propuesto por Larry Glasser, Clarkson University, Postdam, Nueva York, Estados Unidos.*

Sean a, d y $b = a^2 - 2d$ números reales positivos. Probar que

$$\int_0^\infty \frac{x^4 + ax^2 - d}{x^8 + bx^4 + d^2}\, dx = 0.$$

PROBLEMA 219. *Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Universidad Complutense, Madrid.*

Probar que, para $x, y > 0$ y $t > -1/4$,

$$\frac{xy(x^2+xy+y^2)}{3} \leq \frac{(x^2+y^2)^2+4txy(x^2+xy+y^2)}{4+12t} \leq x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4.$$

PROBLEMA 220. *Propuesto por Yagub N. Aliyev, Qafqaz University, Khyrdalan, Azerbaiyán.*

Sean O, A y B tres puntos en el plano tales que $\angle AOB = \pi/2$, y sean C y D dos puntos arbitrarios situados, respectivamente, en los segmentos OA y OB. Si E es el punto de intersección de los segmentos AD y BC y $\angle DEB = \alpha$, probar que

$$|BD|^2 \cdot \cot\alpha + |AC| \cdot (|BO| + |OD|) \geq 2\sqrt{|OD| \cdot |OB| \cdot (|AC|^2 + |BD|^2)}.$$

PROBLEMA 221. *Propuesto por Panagiote Ligouras, "Leonardo da Vinci" High School, Noci, Italia.*

En un triángulo ABC denotamos por a, b y c las longitudes de los lados BC, CA y AB, respectivamente, y por p su semiperímetro. Sea D el punto de intersección de la bisectriz interior del ángulo CAB con el lado AB, y sean P y Q, respectivamente, los pies de las perpendiculares desde D a los lados AB y CA. Probar que

$$PQ = \frac{2p(p-a)}{b+c}\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{bc}}.$$

PROBLEMA 222. *Propuesto por Cristobal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.*

Dos circunferencias c_1 y c_2 de centros O_1 y O_2, respectivamente, y radios R y r, con $R > r$, son tangentes interiormente en A. En la recta t tangente común a ambas circunferencias en A, se toma un punto variable P y se trazan las otras dos rectas tangentes PS y PT (puntos de tangencia S y T) a las circunferencias c_1 y c_2, respectivamente.

a) Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias c_3 que son tangentes en S a c_1 y en T a c_2 cuando P varía en t.

b) Determinar una circunferencia ortogonal a todas las circunferencias c_3 y probar que su radio es la media armónica de R y r.

Soluciones

Problema 193. *Propuesto por Cristobal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.*

Sean ABC un triángulo en el que las longitudes de sus lados verifican $a \leq b \leq c$ y están en progresión aritmética. Si para dicho triángulo S denota su área y r_a, r_b y r_c sus exinradios, probar que la magnitud

$$\frac{(r_a - r_c)S}{(a-c)b^2}$$

es constante y hallar su valor.

Solución enviada por Tanausu Aguilar Hernández (estudiante), Universidad de La Laguna.

Siendo s el semiperímetro del triángulo ABC, se tiene que

$$r_a = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$$

y las expresiones análogas para r_b y r_c. Así, usando la fórmula de Herón para el área de un triángulo y denotando por K la magnitud a evaluar, se verifica que

$$K = \frac{s(s-b)}{b^2}.$$

Ahora, como los lados del triángulo están en progresión aritmética y $a \leq b \leq c$, se tendrá que $b = a + \alpha$ y $c = a + 2\alpha$, para algún $\alpha \geq 0$, y

$$K = \frac{\left(\frac{3a+3\alpha}{2} - (a+\alpha)\right)\frac{3a+3\alpha}{2}}{(a+\alpha)^2} = \frac{3}{4}.$$

También resuelto por M. Amengual, R. Barroso, J. Bosco, A. Castaño, D. Lasaosa, J. Mir, J. Nadal, R. Peiró, A. Sáez, N. Stanciu y T. Zvonaru (conjuntamente), V. Vicario y el proponente.

Nota. Bruno Salgueiro nos informa de que la propuesta ha aparecido previamente en un artículo del proponente que se puede consultar en `http://www.oei.es/oim/revistaoim/numero40/TringulosPACristobalagosto2010.pdf`.

Problema 194. *Propuesto por Juan Manuel Urbano Blanco, Universidad de Granada, Granada.*

Para cada entero $n \geq 1$, definimos la función

$$f_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \left(\cos^{2^{k+1}} x + \operatorname{sen}^{2^{k+1}} x\right).$$

Determinar el mínimo de cada $f_n(x)$ y el conjunto de valores de x en el que se alcanza.

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Para cada entero k, con $1 \leq k \leq n$, por la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica aplicada a $\cos^{2^{k+1}} x$ y $\operatorname{sen}^{2^{k+1}} x$, se tiene

$$\begin{aligned} \cos^{2^{k+1}} x + \operatorname{sen}^{2^{k+1}} x &\geq 2\sqrt{\cos^{2^{k+1}} x \cdot \operatorname{sen}^{2^{k+1}} x} \\ &= 2\cos^{2^k} x \cdot \operatorname{sen}^{2^k} x = 2^{1-2^k} \operatorname{sen}^{2^k}(2x), \end{aligned}$$

con igualdad si y solo si $\cos^{2^{k+1}} x = \operatorname{sen}^{2^{k+1}} x$, esto es si $\cos x = \pm \operatorname{sen} x$; es decir, si

$$x \in A = \left\{ (2m+1)\frac{\pi}{4} : m \in \mathbb{Z} \right\},$$

en cuyo caso $\operatorname{sen}^{2^k}(2x) = 1$.

Multiplicando miembro a miembro las n desigualdades anteriores, resulta

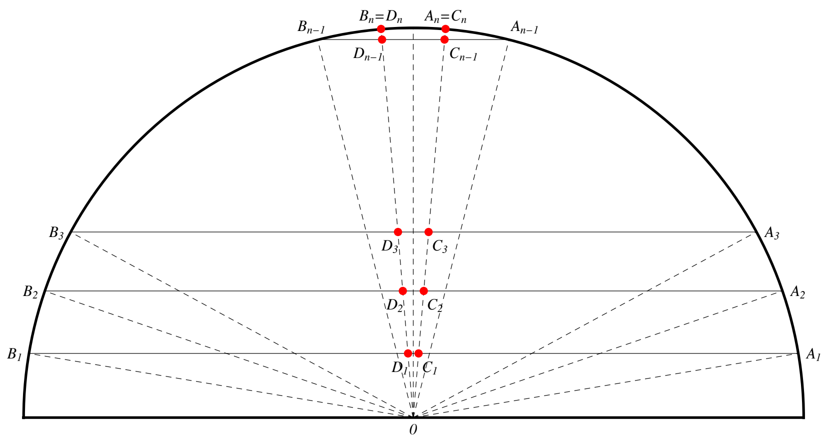
$$f_n(x) \geq 2^{n+2-2^{n+1}},$$

alcanzándose la igualdad, y por tanto el mínimo de $f_n(x)$, si y solo si $x \in A$.

También resuelto por A. Castaño, R. de la Cruz, D. Lasaosa, J. Nadal, A. M. Oller y el proponente.

PROBLEMA 195. *Propuesto por Manuel Prieto Alberca, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid.*

Dividamos en un número impar de partes iguales una semicircunferencia de centro O y radio a, tal y como se muestra en la figura adjunta.



Esquema que ilustra el Problema 195.

Sean $A_1, \ldots, A_n$ y $B_1, \ldots, B_n$ los puntos de división. Tracemos las rectas paralelas al diámetro pasando por los puntos A_i y B_i, para $i = 1, \ldots, n$. Estas rectas cortan a las rectas OA_n y OB_n en los puntos C_i y D_i, para $i = 1, \ldots, n$. Probar que

$$\overline{C_1 D_1} + \cdots + \overline{C_n D_n} = a.$$

Solución enviada por Joaquim Nadal Vidal, I. E. S. de Cassà de la Selva, Girona.

A cada arco A_iA_{i+1} le corresponde el mismo ángulo central $\alpha = \frac{\pi}{2n+1}$. Si denotamos por A_0 el extremo derecho del diámetro, es claro que $\angle A_0OA_k = k\alpha$. Además, tomando A'_k el pie de la perpendicular sobre el diámetro trazada desde A_k, tendremos

$$\overline{A_kA'_k} = a\,\mathrm{sen}(k\alpha).$$

Ahora, si M_k es el punto medio de C_kD_k, es evidente que

$$\overline{OM_k} = \overline{A_kA'_k} = a\,\mathrm{sen}(k\alpha)$$

y, por tanto,

$$\overline{C_kD_k} = 2a\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\mathrm{sen}(k\alpha).$$

De esta manera, teniendo en cuenta la relación $2\,\mathrm{sen}\,p\,\mathrm{sen}\,q = \cos(p-q) - \cos(p+q)$, se verifica que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\overline{C_kD_k} &= 2a\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\mathrm{sen}(k\alpha)\\ &= \frac{a}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(k\alpha-\frac{\alpha}{2}\right)-\cos\left(k\alpha+\frac{\alpha}{2}\right)\right) = a.\end{aligned}$$

Solución enviada por Cristóbal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.

La solución se apoya en la figura 1 en la que se visualiza la situación para 9 puntos, es decir $n = 4$, pero el razonamiento es válido para cualquier otro valor de n.

Los ángulos $\angle Q_iP_iA_i$, marcados en la figura en gris oscuro, son claramente iguales. Por ello tenemos las igualdades de triángulos

$$\triangle OC_iD_i = \triangle P_iA_iQ_i = \triangle A_iP_iP_{i-1}$$

(se han sombreado en gris claro los triángulos correspondientes a $i = 2$), ya que todos son isósceles con el mismo ángulo desigual y la misma altura correspondiente a ese vértice. De ahí que

$$\begin{aligned}\overline{C_1D_1} + \cdots + \overline{C_nD_n} &= \overline{A_1Q_1} + \cdots + \overline{A_nQ_n}\\ &= \overline{P_0P_1} + \cdots + \overline{P_{n-1}P_n} = \overline{P_0O} = a.\end{aligned}$$

También resuelto por M. Amengual, R. de la Cruz, D. Lasaosa, J. Mir, A. M. Oller, A. Plaza, J. Rivero, B. Salgueiro, V. Vicario, J. Vinuesa y el proponente.

Problema 196. *Propuesto por O. Furdui, Cluj, Rumanía, y H. Qin, Universidad de Tecnología de Shandong, Shandong, China.*

Para cada entero positivo $k \geq 2$, probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\log k - H_{kn} + H_n - \frac{k-1}{2kn}\right) = \frac{k-1}{2k} - \frac{\log k}{2} - \frac{\pi}{2k^2}\sum_{j=1}^{k-1} j\cot\left(\frac{j\pi}{k}\right),$$

donde $H_m = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}$.

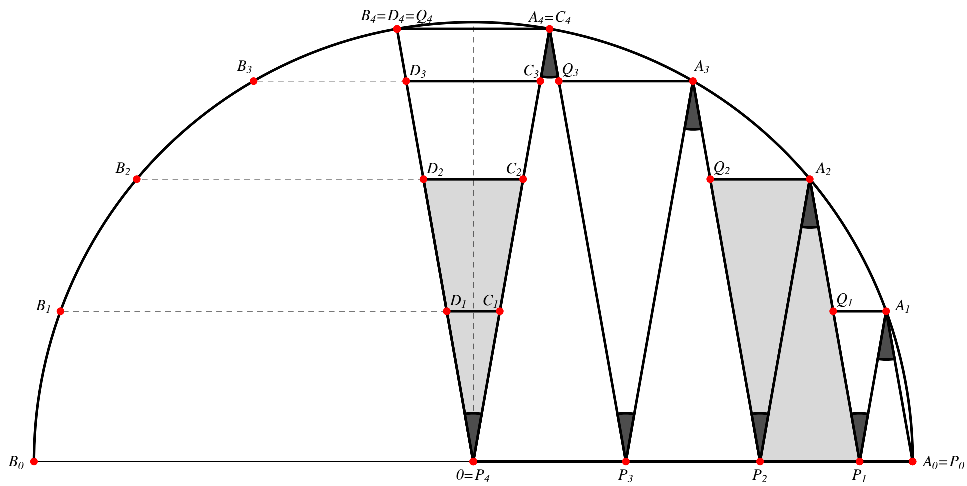


Figura 1: Esquema para la segunda solución del Problema 195.

Solución enviada por Alberto Stadler, Herrliberg, Suiza.

Sean $k \geq 2$ y $a_n = \log k - H_{kn} + H_n - \frac{k-1}{2kn}$. Puesto que

$$H_n = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} + O(n^{-2}),$$

tenemos que $a_n = O(n^{-2})$ y la serie es convergente. Además

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 x^{k-1}\, dx = \int_0^1 \frac{x^n - 1}{x - 1}\, dx = k \int_0^1 \frac{y^{kn} - 1}{y^k - 1} y^{k-1}\, dy,$$

$$\int_0^1 \left(\frac{kx^{k-1}}{x^k - 1} - \frac{1}{x - 1} \right) dx = \lim_{t \to 1} \log \left(\frac{1 - t^k}{1 - t} \right) = \log k$$

y $\frac{k-1}{2kn} = \frac{k-1}{2} \int_0^1 t^{kn-1}\, dt$. Con las expresiones previas podemos escribir

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 \left(\frac{kx^{k-1}}{x^k - 1} - \frac{1}{x - 1} - \frac{x^{kn} - 1}{x - 1} + \frac{x^{kn} - 1}{x^k - 1} kx^{k-1} - \frac{k-1}{2} x^{kn-1} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{x^{kn}}{x - 1} + \frac{x^{kn}}{x^k - 1} kx^{k-1} - \frac{k-1}{2} x^{kn-1} \right) dx \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} a_n &= \int_0^1 \left(-\frac{x^k (x^{kN} - 1)}{(x - 1)(x^k - 1)} + \frac{x^{kN} - 1}{(x^k - 1)^2} kx^{2k-1} - \frac{(k-1) x^{k-1} (x^{kN} - 1)}{2(x^k - 1)} \right) dx \\ &= I_k(N) + J_k(N), \end{aligned}$$

donde

$$I_k(N) = \int_0^1 \left(\frac{1}{(x-1)(x^k-1)} - \frac{1}{k(x-1)^2} + \frac{k-1}{2k(x-1)} \right) (1 - x^{kN})\, dx$$

y

$$J_k(N) = \int_0^1 \left(\frac{k+1}{2k(x-1)} + \frac{1}{k(x-1)^2} - \frac{kx^{k-1}}{(x^k-1)^2} - \frac{(k+1)x^{k-1}}{2(x^k-1)} \right) (1 - x^{kN})\, dx.$$

Usando manipulaciones algebraicas sencillas se puede comprobar que se verifica la siguiente descomposición en fracciones:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-1)(x^k-1)} &= \frac{1}{k(x-1)^2} - \frac{k-1}{2k(x-1)} + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{e^{2\pi i j/k}}{(e^{2\pi i j/k}-1)(x - e^{2\pi i j/k})} \\ &= \frac{1}{k(x-1)^2} - \frac{k-1}{2k(x-1)} + \frac{1}{2k} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{x+1}{x^2 - 2x\cos\left(\frac{2\pi j}{k}\right) + 1}. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} I_k(N) &= \frac{1}{2k} \sum_{j=1}^{k-1} \int_0^1 \frac{x+1}{x^2 - 2x\cos\left(\frac{2\pi j}{k}\right) + 1}\, dx + \int_0^1 O(x^{kN})\, dx \\ &= \frac{1}{2k} \sum_{j=1}^{k-1} \int_0^1 \frac{x+1}{x^2 - 2x\cos\left(\frac{2\pi j}{k}\right) + 1}\, dx + O(N^{-1}). \end{aligned}$$

Con la identidad

$$\int \frac{x+1}{x^2 - 2x\cos y + 1}\, dx = -\cot\left(\frac{y}{2}\right) \arctan\left(\frac{\cos y - x}{\operatorname{sen} y}\right) + \frac{1}{2}\log(x^2 - 2x\cos y + 1) + C,$$

se deduce que

$$\int_0^1 \frac{x+1}{x^2 - 2x\cos\left(\frac{2\pi j}{k}\right) + 1}\, dx = -\cot\left(\frac{\pi j}{k}\right)\left(\frac{\pi j}{k} - \frac{\pi}{2}\right) + \log\left(2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi j}{k}\right)\right).$$

Además,

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to 1} \frac{x^k - 1}{x - 1} = \prod_{j=1}^{k-1} (1 - e^{2\pi i j/k}) \\ &= e^{\pi i (k-1)/2} \prod_{j=1}^{k-1} (e^{-\pi i j/k} - e^{\pi i j/k}) = \prod_{j=1}^{k-1} 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi j}{k}\right). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, resulta

$$\begin{aligned}
I_k(N) &= \frac{1}{2k}\sum_{j=1}^{k-1}\left(-\cot\left(\frac{\pi j}{k}\right)\left(\frac{\pi j}{k}-\frac{\pi}{2}\right)+\log\left(2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi j}{k}\right)\right)\right)+O(N^{-1})\\
&= -\frac{\pi}{2k^2}\sum_{j=1}^{k-1} j\cot\left(\frac{\pi j}{k}\right)+\frac{\log k}{2k}+O(N^{-1}),
\end{aligned}$$

donde en el último paso se ha usado también la identidad $\sum_{j=1}^{k-1}\cot\left(\frac{\pi j}{k}\right)=0$.

Para tratar $J_k(N)$ debemos comenzar observando que las funciones

$$\frac{1}{x-1}-\frac{kx^{k-1}}{x^k-1} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{k(x-1)^2}-\frac{kx^{k-1}}{(x^k-1)^2}$$

son acotadas cuando $x\in(0,1)$. De esta forma,

$$\begin{aligned}
J_k(N) &= \int_0^1\left(\frac{k+1}{2k(x-1)}+\frac{1}{k(x-1)^2}-\frac{kx^{k-1}}{(x^k-1)^2}-\frac{(k+1)x^{k-1}}{2(x^k-1)}\right)dx+O(N^{-1})\\
&= \lim_{x\to 1}\left(\frac{k+1}{2k}\log\left(\frac{1-x}{1-x^k}\right)+\frac{1}{k(1-x)}-\frac{1}{1-x^k}\right)-\frac{1}{k}+O(N^{-1})\\
&= -\frac{k+1}{2k}\log k+\frac{k-1}{2k}+O(N^{-1}).
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty}(I_k(N)+J_k(N)) = \frac{k-1}{2k}-\frac{\log k}{2}-\frac{\pi}{2k^2}\sum_{j=1}^{k-1} j\cot\left(\frac{j\pi}{k}\right).$$

También resuelto por D. Lasaosa y el proponente.

PROBLEMA 197. *Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.*

Sean a, b y c tres números reales positivos tales que $a^2+b^2+c^2=3$. Demostrar que

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{c}{\sqrt{b^2+3}}+\frac{a}{\sqrt{c^2+3}}\le\sqrt[4]{\frac{9(a+b+c)^2}{16abc}}.$$

Solución enviada por Kee-Wai Lau, Honl Kong, China.

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica, se tiene

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+3}}+\frac{c}{\sqrt{b^2+3}}+\frac{a}{\sqrt{c^2+3}}\right)^4\\
&\qquad\le\left((b^2+c^2+a^2)\left(\frac{1}{a^2+3}+\frac{1}{b^2+3}+\frac{1}{c^2+3}\right)\right)^2\\
&\qquad=9\left(\frac{1}{a^2+1+1+1}+\frac{1}{b^2+1+1+1}+\frac{1}{c^2+1+1+1}\right)^2\\
&\qquad\le 9\left(\frac{1}{4\sqrt[4]{a^2\cdot1\cdot1\cdot1}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{b^2\cdot1\cdot1\cdot1}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{c^2\cdot1\cdot1\cdot1}}\right)^2\\
&\qquad=\frac{9}{16abc}(\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab})^2\\
&\qquad\le\frac{9}{16abc}\left(\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}+\frac{a+b}{2}\right)^2\\
&\qquad=\frac{9(a+b+c)^2}{16abc}.
\end{aligned}$$

Además, la igualdad se cumple si y solo si $a=b=c=1$.

También resuelto por D. Lasaosa, P. Pefetti, B. Salgueiro, N. Stanciu y T. Zvonaru (conjuntamente) y el proponente.

Problema 198. *Propuesto por Pedro H. O. Pantoja (estudiante), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Brasil.*

Sean p y q dos números primos tales que $p>q$. Demostrar que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) p y q son primos gemelos,

b) $\sigma(p)+\sigma(q)=2p$,

c) $\phi(p)+\phi(q)=2q$,

donde $\sigma(n)$ es la suma de los divisores positivos de n y $\phi(n)$ es la función de Euler.

Solución enviada por Joaquín Rivero Rodríguez, I. E. S. Antonio de Nebrija, Zalamea de la Serena, Badajoz.

Demostraremos que la primera afirmación es equivalente a cada una de las otras dos. Para ello tan solo debemos tener en cuenta que, si n es un número primo, entonces $\sigma(n)=n+1$ y $\phi(n)=n-1$. Entonces, como p y q son números primos,

$$\sigma(p)+\sigma(q)=p+q+2=2p \iff p=q+2;$$

en otras palabras, b) equivale a a).

De la misma forma, tenemos

$$\phi(p) + \phi(q) = p + q - 2 = 2q \iff q = p - 2,$$

que nos muestra, esta vez, la equivalencia entre c) y a).

También resuelto por T. Aguilar, A. Castaño, R. de la Cruz, F. Gimeno, D. Lasaosa, J. Nadal, J. Rivero, B. Salgueiro, A. Stadler y el proponente.