Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri Ramírez y José Luis Díaz Barrero

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@dmc.unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 31 de diciembre de 2013.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

In Memoriam
Juan Bosco Romero Márquez (1945–2013)

El pasado 19 de enero falleció inesperadamente el profesor Juan Bosco Romero Márquez. Juan Bosco era colaborador habitual de nuestra columna, en la que participaba enviándonos nuevos problemas y soluciones a las propuestas publicadas. Siempre era un placer recibir en la sección algunas de sus originales propuestas. Pensamos que la mejor manera de rendirle un homenaje era dedicarle una columna completa de la sección en la que tantas veces había participado. Todas las propuestas de este número han sido elaboradas expresamente en recuerdo de su trabajo; sirvan pues como nuestro sincero homenaje al profesor Romero Márquez.

Problema 223. *Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.*

Sean x, y y z tres números reales no negativos. Demostrar que

$$\left(\sum_{\text{cíclico}} \frac{3x+1}{(2x+1)(4x+1)}\right)\left(\sum_{\text{cíclico}} \frac{(x+y+1)(2x+y+z+1)}{3x+2y+z+2}\right) \geq \frac{9}{2}.$$

PROBLEMA 224. *Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.*

Sea ABC un triángulo circunscrito a una circunferencia de radio r. Trazamos tres tangentes a la circunferencia paralelas a cada uno de los lados del triángulo ABC, de tal forma que se generan tres triángulos semejantes al inicial.

Probar que la media geométrica de las áreas de los tres triángulos así definidos y del triángulo ABC es constante e independiente del triángulo ABC elegido.

PROBLEMA 225. *Propuesto por Francisco Bellot Rosado, Valladolid.*

Sean AHD, BHE y CHF las tres alturas de un triángulo ABC ($D \in BC$, etc.), H su ortocentro y G su baricentro. Demostrar que las circunferencias circunscritas a los triángulos AGD, BGE y CGF se cortan, además de en G, en un segundo punto que es la intersección de la recta de Euler de ABC con el eje radical de la circunferencia circunscrita a ABC y la circunferencia de los nueve puntos de ABC.

PROBLEMA 226. *Propuesto por Ricardo Barroso Campos, Sevilla.*

Sea ABC un triángulo y $[ABC]$ su área. Sean r una recta paralela a BC que corta a AB en U, a AC en V y tal que $[ABC] = 3[AUV]$; s una recta paralela a CA que corta a BC en W, a BA en X y tal que $[ABC] = 3[BWX]$; y t una recta paralela a AB que corta a CA en Y, a CB en Z y tal que $[ABC] = 3[CYZ]$. Sean $T = r \cap s$, $R = s \cap t$ y $S = t \cap r$. Demostrar que la razón $[TRS]/[ABC]$ es constante y hallar su valor.

PROBLEMA 227. *Propuesto por Francisco Javier García Capitán, I. E. S. Álvarez Cubero, Priego de Córdoba, Córdoba.*

Sean ABC un triángulo rectángulo en A y D un punto sobre la recta BC distinto de B y C. Sean E y F las proyecciones ortogonales de D sobre las rectas AB y AC, respectivamente. Consideramos además los puntos de intersección $U = AD \cap EF$, $V = BF \cap DE$ y $W = CE \cap DF$. Probar que el triángulo UVW es isósceles, con $UV = UW$, si y solo si AD es una de las bisectrices trazadas por A.

PROBLEMA 228. *Propuesto por Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Logroño, y Emilio Fernández Moral, I. E. S. Práxedes Mateo Sagasta, Logroño.*

En la figura siguiente, las circunferencias de centros O_1 y O_2, que son tangentes a las semicircunferencias de diámetros AC y AB, CB y AB respectivamente, son también tangentes en los puntos N y M, respectivamente, a la tangente común CD a las semicircunferencias de diámetros AC y CB. Los segmentos NQ y MP son diámetros de las circunferencias pequeñas. La recta MQ corta además en R a la circunferencia de centro O_1, y la recta NP corta además en S a la circunferencia de centro O_2. Y resulta que $RMSN$ es un cuadrado. ¿Cuál es la razón entre los diámetros AC y AB?

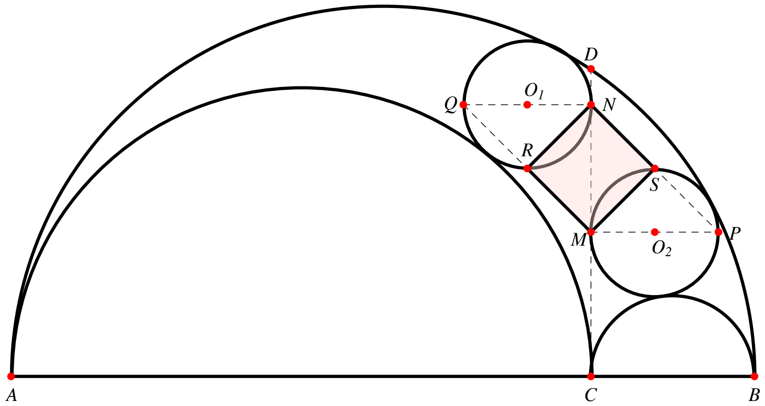

Figura correspondiente al Problema 228.

Soluciones

Problema 199. *Propuesto por Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Rumanía.*

Evaluar los siguientes límites:

a)

$$\lim_{n\to\infty} a^n(n-\zeta(2)-\zeta(3)-\cdots-\zeta(n)), \qquad a>0;$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-\zeta(2)-\zeta(3)-\cdots-\zeta(n)}{n-1-\zeta(2)-\zeta(3)-\cdots-\zeta(n-1)}.$$

Solución enviada por Alberto Castaño Domínguez, Universidad de Sevilla, Sevilla.

Probaremos que

$$n-\zeta(2)-\zeta(3)-\cdots-\zeta(n) \sim 2^{-n}. \tag{1}$$

Es claro que esto nos da la respuesta a las dos preguntas. Concretamente,

$$\lim_{n\to\infty} a^n\left(n-\zeta(2)-\zeta(3)-\cdots-\zeta(n)\right) = \begin{cases} \infty, & \text{si } a>2,\\ 1, & \text{si } a=2,\\ 0, & \text{si } 0<a<2,\end{cases}$$

y, por otro lado,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-\zeta(2)-\zeta(3)-\cdots-\zeta(n)}{n-1-\zeta(2)-\zeta(3)-\cdots-\zeta(n-1)} = \frac{1}{2}.$$

Procedamos ahora con la demostración de (1). Resulta sencillo comprobar que

$$\begin{aligned} n-\zeta(2)-\zeta(3)-\cdots-\zeta(n) &= 1-\sum_{k=2}^{n}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m^k} = 1-\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{m^k} \\ &= 1-\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m(m-1)}+\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m^n(m-1)}, \end{aligned}$$

donde en el último paso se ha utilizado la suma de los términos de una progresión geométrica. Teniendo en cuenta que $\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m(m-1)}=1$, se tiene

$$n-\zeta(2)-\zeta(3)-\cdots-\zeta(n)=2^{-n}+\sum_{m=3}^{\infty}\frac{1}{m^n(m-1)}=:2^{-n}+s_n.$$

Finalmente, con la estimación

$$0<s_n<\sum_{m=3}^{\infty}\frac{1}{m^n}<\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^n}=\frac{2^{-n+1}}{n-1}$$

se concluye que

$$1<2^n\left(n-\zeta(2)-\zeta(3)-\cdots-\zeta(n)\right)<1+\frac{2}{n-1},$$

de donde se deduce la equivalencia (1).

También resuelto por A. Kotronis, D. Lasaosa, P. Perfetti, B. Salgueiro, J. Vinuesa y el proponente.

PROBLEMA 200. *Propuesto por Manuel Benito Muñoz, Logroño, La Rioja.*

Hallar todos los números con seis divisores y para los que la suma de sus partes alícuotas es 1516.

Solución compuesta con las enviadas por Antonio M. Oller Marcén, Centro Universitario de la Defensa, Zaragoza, y Joaquín Rivero Rodríguez, I. E. S. Antonio de Nebrija, Zalamea de la Serena, Badajoz.

Sea $N=p_1^{r_1}\cdots p_s^{r_s}$ el número buscado (donde los p_j son primos distintos). El número de divisores de N es $(r_1+1)\cdots(r_s+1)=6$, por lo que sólo tenemos dos posibilidades: $N=p^5$ o $N=pq^2$, para ciertos números primos distintos p y q.

Si $N=p^5$, obtenemos la ecuación

$$1+p+p^2+p^3+p^4=1516,$$

la cual carece de soluciones puesto que los últimos cuatro sumandos del término de la izquierda tienen la misma paridad y por tanto éste es siempre impar.

Si $N = pq^2$, tenemos que

$$1 + p + pq + q + q^2 = 1516 \iff (1 + q)(p + q) = 1515.$$

Como $1 + q$ debe ser impar y q primo, deducimos que $q = 2$ y, de manera inmediata, $p = 503$. De esta forma, el número buscado es $N = pq^2 = 503 \cdot 2^2 = 2012$.

También resuelto por A. Castaño, R. de la Cruz, D. Fernández, J. Nadal, J. Vinuesa y el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.

Problema 201. *Propuesto por Manuel Prieto Alberca, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid.*

Cinco rectas del plano de las que tres no son concurrentes definen cinco cuadriláteros completos si se toman de cuatro en cuatro. Demostrar que las cinco rectas que pasan por los puntos medios de las tres diagonales de cada uno de esos cuadriláteros (rectas de Gauss) concurren en un punto.

Con seis rectas tangentes a una misma cónica se pueden definir quince cuadriláteros completos al tomarlas de cuatro en cuatro. Demostrar que las quince rectas de Gauss concurren en un punto.

Solución enviada por Saturnino Campo Ruiz (profesor jubilado de matemáticas), Salamanca.

Con cinco rectas en las condiciones del enunciado hay una única cónica tangente a todas ellas. Denotamos por rG_i la recta de Gauss del cuadrilátero completo obtenido excluyendo la recta r_i (véase la figura 1). La cuestión enunciada se reduce a demostrar que si tenemos una cónica y cuatro tangentes a ella, la recta de Gauss del cuadrilátero definido por esas tangentes es un diámetro de esa cónica. Ya que, como es sabido, todos los diámetros concurren en el centro de la cónica, o en el punto del infinito en la dirección del eje de simetría cuando la cónica sea una parábola. (Recordemos que los diámetros de una parábola son las rectas paralelas al eje de simetría.)

En el caso de tener seis tangentes a una misma cónica, las rectas de Gauss de los quince cuadriláteros completos son quince diámetros de la cónica y por tanto son concurrentes. En general con n tangentes dispondríamos de $\binom{n}{4}$ cuadriláteros y otros tantos diámetros de la cónica con idéntica propiedad.

Para resolver la cuestión reducida vamos a establecer una propiedad de los haces de cónicas: primero de los constituidos por las cónicas que pasan por cuatro puntos y después de sus duales, los formados por las cónicas tangentes a cuatro rectas prefijadas.

Teorema. *El haz de las cónicas que pasan por cuatro puntos P, Q, R y S hace corresponder, a un punto T cualquiera del plano distinto de los anteriores, un único punto $T^\star$ que es conjugado[1] de T respecto de cada cónica del haz (la propiedad descrita aparece ilustrada en la figura 2).*

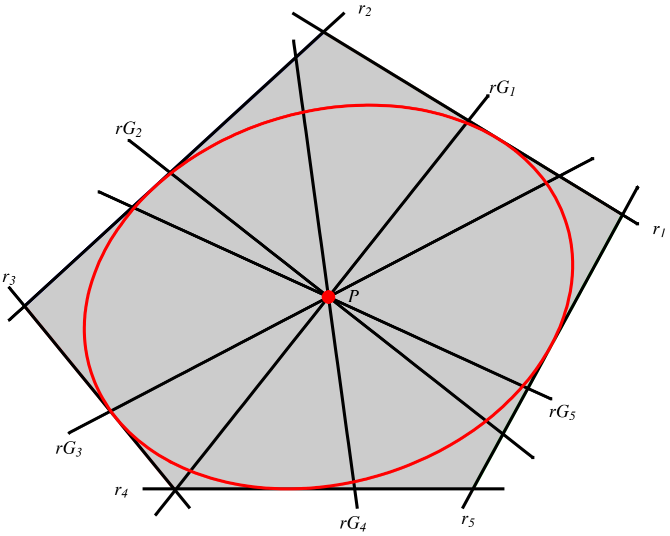

Figura 1: Las rectas de Gauss asociadas con cinco rectas y la cónica de la que son diámetros.

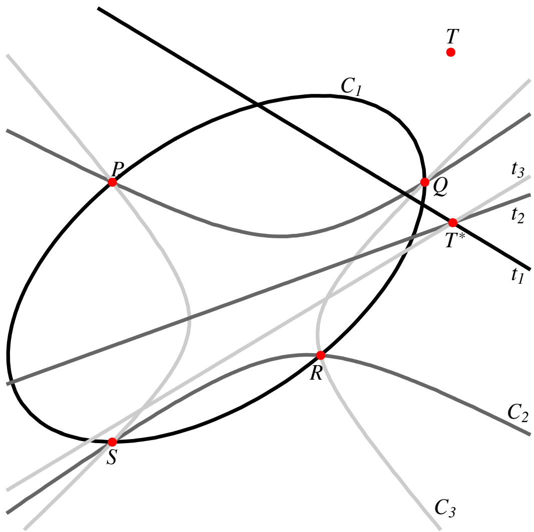

Figura 2: Esquema ilustrativo de la propiedad descrita en el Teorema.

[1] Cuando un punto Q está en la recta p polar del punto P respecto de una cónica, este punto P está asimismo en la recta q polar de Q. Los puntos P y Q se llaman conjugados respecto de la cónica, y sus polares p y q se llaman también conjugadas.

Demostración. Supongamos C_1 y C_2 dos cónicas diferentes del haz, t_1 y t_2 las polares de T respecto de ellas y $T^\star$ su punto de corte. Estos dos puntos son conjugados, tanto respecto de C_1 como de C_2. Teniendo en cuenta que todas las cónicas del haz se pueden obtener a partir de estas dos en la forma $C = C_1 + \lambda C_2$, resulta inmediato que estos puntos son conjugados para todas las cónicas del haz.

O también se podría razonar, de forma más geométrica, como sigue: consideremos la recta t que pasa por T y $T^\star$. Según el teorema del cuadrivértice inscrito en una cónica de Desargues, los pares de puntos en los cuales una recta dada t corta a cualquiera de las cónicas del haz son homólogos en una misma involución, que es la determinada en t por los tres pares de lados opuestos del cuadrivértice.

Ahora bien, como T y $T^\star$ son armónicos con respecto a los dos pares de puntos de intersección de la recta t con C_1 y C_2, son los puntos fijos de la involución. Por tanto, son armónicos con respecto a todos los pares de puntos homólogos en la involución, es decir, son conjugados respecto de todas las cónicas del haz. □

Y dualmente podemos afirmar:

Teorema Dual. *El haz de las cónicas tangentes a cuatro rectas hace corresponder a cada recta s del plano distinta de las anteriores una única recta t que es conjugada de s respecto de cada una de las cónicas del haz.*

Volviendo finalmente a nuestra proposición reducida: la recta de Gauss rG_i del cuadrilátero completo obtenido excluyendo la recta r_i, $i = 1, 2, \dots, 5$, es la recta que pasa por los puntos medios de los segmentos diagonales, que son precisamente los centros de las tres cónicas degeneradas pertenecientes al haz de cónicas tangentes al cuadrilátero correspondiente. La polar de esos centros es la recta del infinito. Por consiguiente, si t es la recta del infinito, entonces su recta conjugada respecto del haz, s, es la recta de Gauss del cuadrilátero y es la recta que contiene los centros de todas las cónicas del haz (o bien es un diámetro en el caso de que la cónica sea una parábola), y viceversa.

Con esto concluye nuestra solución.

También resuelto por D. Lasaosa y el proponente.

Problema 202. *Propuesto por Panagiote Ligouras, "Leonardo da Vinci" High School, Noci, Italia.*

Para un triángulo ABC denotaremos por r su inradio, por r_a, r_b y r_c sus exinradios, por I su incentro, y por I_a, I_b e I_c sus exincentros. Probar o refutar la desigualdad

$$\frac{\cos A}{1-\cos^2 A} + \frac{\cos B}{1-\cos^2 B} + \frac{\cos C}{1-\cos^2 C} \geq \frac{1}{4r}\sqrt{\frac{II_a \cdot II_b \cdot II_c}{r_a r_b r_c}(r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a)}.$$

Solución enviada por Kee-Wai Lau, Hong Kong, China.

Probaremos que la desigualdad propuesta, que denotaremos por $(*)$, es cierta.

Siendo R el circunradio del triángulo ABC, son bien conocidas las identidades

$$r = 4R\,\mathrm{sen}(A/2)\,\mathrm{sen}(B/2)\,\mathrm{sen}(C/2), \qquad r_a = 4R\,\mathrm{sen}(A/2)\cos(B/2)\cos(C/2)$$

y las correspondientes para r_b y r_c. Además, $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$. Puesto que $\angle IBI_a = \pi/2$, se tiene

$$II_a = \sqrt{IB^2 + I_aB^2} = \sqrt{\left(\frac{r}{\mathrm{sen}(B/2)}\right)^2 + \left(\frac{r_a}{\mathrm{sen}(\pi/2 - B/2)}\right)^2} = 4R\,\mathrm{sen}(A/2),$$

y las igualdades análogas para II_b y II_c. De este modo, el lado derecho de $(*)$ se convierte en R/r.

Ahora, por el teorema del coseno y usando la relación $abc = 2rR(a+b+c)$, deducimos que

$$\frac{\cos A}{1-\cos^2 A} = \frac{\cos A}{\mathrm{sen}^2 A} = \frac{4R^2\cos A}{a^2} = \frac{2R^2(b^2+c^2-a^2)}{a^2bc} = \frac{R(b^2+c^2-a^2)}{ra(a+b+c)}.$$

Razonando de un modo similar, obtenemos expresiones del mismo tipo para las fracciones involucrando $\cos B$ y $\cos C$, y el lado izquierdo de $(*)$ lo reescribimos como

$$\frac{R}{r(a+b+c)}\left(\frac{b^2+c^2}{a} + \frac{c^2+a^2}{b} + \frac{a^2+b^2}{c} - a - b - c\right).$$

Entonces, para probar $(*)$ basta usar la desigualdad

$$\frac{b^2+c^2}{a} + \frac{c^2+a^2}{b} + \frac{a^2+b^2}{c} \geq 2(a+b+c)$$

que se sigue inmediatamente de la identidad

$$\begin{aligned}\frac{b^2+c^2}{a} &+ \frac{c^2+a^2}{b} + \frac{a^2+b^2}{c} - 2(a+b+c)\\ &= \frac{(a-b)^2(c^2+ab) + (b-c)^2(a^2+bc) + (c-a)^2(b^2+ca)}{abc},\end{aligned}$$

y la demostración está completa.

También resuelto por M. Amengual, I. V. Codreanu, R. de la Cruz, D. Lasaosa, J. Nadal, B. Salgueiro, N. Stanciu y T. Zvonaru (conjuntamente) y el proponente.

PROBLEMA 203. *Propuesto por Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Logroño.*

Evaluar

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2k}\log\left(\frac{n+k}{n}\right)\right).$$

Solución enviada por Anastasios Kotronis, Atenas, Grecia.

Tomando $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2k}\log\left(\frac{n+k}{n}\right)\right)=:\exp(A_n)$, se tiene

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}\frac{1}{2\frac{k}{n}}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2n}\left(1-\frac{1}{\frac{k}{n}}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)+O(n^{-2})\right)\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\frac{k}{n}}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)+O(n^{-1})
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\exp(A_n) &= \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{\log(1+x)}{x}\right)dx\right)\\
&= \exp\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{n}\,dx\right)\\
&= \exp\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{n}\,dx\right)\\
&= \exp\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right)=\exp\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi^2}{24}\right).
\end{aligned}$$

También resuelto por R. de la Crurz, Kee-Wai Lau, D. Lasaosa, P. Perfetti, B. Salgueiro, J. Vinuesa y el proponente.

Problema 204. *Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Universidad Complutense de Madrid, Madrid.*

Sea ABC un triángulo y, con las notaciones usuales, definimos la cantidad

$$d = rr_a + r_br_c - 2m_ah_a.$$

Establecer condiciones suficientes sobre los ángulos del triángulo ABC para que la cantidad d sea, respectivamente, positiva, negativa o nula.

Solución enviada por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona.

Es conocido (o fácilmente demostrable usando semejanzas entre triángulos) que $r_a=\frac{rs}{s-a}$, donde s es el semiperímetro de ABC, con lo que usando la fórmula de Herón para el área $S=rs$ de ABC, se cumple que

$$rr_a+r_br_c=\frac{S^2}{s(s-a)}+\frac{S^2}{(s-b)(s-c)}=(s-b)(s-c)+s(s-a)=bc.$$

Luego usando que $abc = 4RS$, donde R es el circunradio de ABC, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{ad(R+m_a)}{S} &= \frac{a(bc-2m_ah_a)(R+m_a)}{S}\\ &= 4R^2 - 4{m_a}^2 = 4R^2 - 2b^2 - 2c^2 + a^2\\ &= 4R^2 - a^2 - 4bc\cos A = 4R^2\cos A(\cos A - 4\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C)\\ &= -4R^2\cos A(\cos B\cos C + 3\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C).\end{aligned}$$

Luego, si A es obtuso, entonces $d > 0$, si A es recto entonces $d = 0$, y si A es agudo, entonces el signo de d es el opuesto al signo de $\cos B\cos C + 3\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C$. Para que esta última cantidad sea negativa, es necesario que B o C sea obtuso, y que $\tan B\tan C > -\frac{1}{3}$.

Por tanto:

a) $d = 0$ si y solo si $\tan B\tan C = -\frac{1}{3}$, o $A = \pi/2$.

b) $d > 0$ si y solo si $A > \pi/2$, o $A < \pi/2$ y $\tan B\tan C > -\frac{1}{3}$.

b) $d < 0$ si y solo si $A < \pi/2$ y $\tan B\tan C < -\frac{1}{3}$.

También resuelto por R. de la Cruz, Kee-Wai Lau, J. Nadal, B. Salgueiro, N. Stanciu y T. Zvonaru (conjuntamente) y el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.

Nota. Tanto en la solución del proponente, como en varias de las recibidas, se obtiene la relación $d = 2h_a(R - m_a)$ y se remite a la solución del Problema 3113, del mismo proponente que el que nos ocupa, de la revista *Crux Mathematicorum* aparecida en el vol. 33, n.º 1, de 2007.