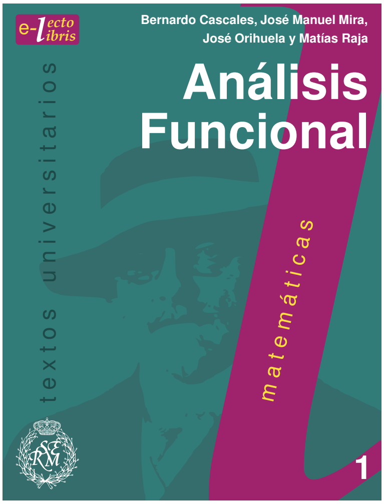
Reseña de libros

«Análisis Funcional», de Bernardo Cascales, José Manuel Mira, José Orihuela y Matías Raja



Título: Análisis Funcional
Autores: Bernardo Cascales, José Manuel Mira, José Orihuela y Matías Raja
Editorial: Ediciones Electolibris, coedición con la RSME
Fecha de publicación: 2012
Páginas: viii+372
ISBN: 978-84-940688-1-2 (papel), 978-84-940688-2-9 (pdf)

Desde la aparición de los ordenadores personales y, más particularmente, desde la aparición del programa TEX como editor de textos matemáticos a finales de los años 70, los profesionales de la enseñanza de las Matemáticas han estado elaborando una gran cantidad de monografías, manuales, textos, etcétera, de casi todas las disciplinas imaginables, como se puede apreciar fácilmente sin más que navegar un poco por internet. Actualmente todo profesor de matemáticas tiene a su disposición una innumerable colección de *pdf*, tanto elaborados por él como descargados de la *web*, que puede utilizar para dar cursos o estudiar casi cualquier tema. Por eso, la aparición de un nuevo texto suele ser acogida con recelo e inmediatamente surge la pregunta: ¿qué novedad aporta este libro?

En las siguientes líneas voy a tratar de explicar lo que ofrece de nuevo el libro cuya reseña me han encargado los directores de *La Gaceta*.

El libro «Análisis Funcional», de B. Cascales, J. M. Mira, J. Orihuela y M. Raja, es un libro de texto de introducción al Análisis Funcional, que es una parte del Análisis Matemático aparecida en el siglo XX.

Hay muchas opiniones sobre lo que esta materia trata o debería tratar, que han ido evolucionando a través de los años, aunque con diferentes enfoques y perspectivas a veces contrapuestas. Por ejemplo, por irnos de un extremo a otro, ya en los años 70 para Jean Dieudonné el Análisis Funcional era *la parte de las Matemáticas que estudia las aplicaciones lineales y continuas entre subconjuntos de espacios vectoriales topológicos* (tomado de la introducción del libro), mientras que para Einar Hille (véase [1]) *un analista funcional era un analista y no una especie degenerada de topólogo*. Por ir a visiones más actuales, Joan Cerdà, en su reciente libro [2], comenta que *el Análisis Funcional estudia y presenta aspectos y estructuras comunes relacionados principalmente con las ecuaciones diferenciales e integrales, el análisis armónico, la teoría de funciones y el cálculo de variaciones. Los objetos fundamentales en esta teoría son los espacios de funciones y los operadores que actúan entre ellos*; y también Vitali Milman, en el prólogo de [3], dice que *el Análisis Funcional ha llegado a ser el lenguaje del Análisis Matemático y de la Física Teórica del siglo XX. Incluso artículos de divulgación o de ciencia ficción utilizan los términos «operadores» y su «espectro»*.

El libro que estamos comentando es, en primer lugar, un libro de texto ajustado a lo que se estudia de esta materia, Análisis Funcional, en el grado y los másteres de Matemáticas en las universidades españolas. Sus autores son profesores de la Universidad de Murcia y expertos en el tema, pues poseen un amplio y profundo currículum investigador, además de una extensa experiencia docente sobre la materia. Hasta hace poco esta disciplina era troncal, y por tanto obligatoria, en la licenciatura de Matemáticas. Ahora ha desaparecido su obligatoriedad, aunque sigue estando presente en muchos grados con carácter optativo y en másteres de investigación y aplicaciones de las Matemáticas. Comentan los autores que es un texto para una asignatura *larga*, pero que puede adaptarse a todo tipo de necesidades, seleccionando los temas convenientemente. Considero que este libro contiene el Análisis Funcional que debe adquirir un matemático durante su formación en los principios de este siglo XXI y que también es muy recomendable para los estudiantes de Física que deseen iniciarse en el estudio de la teoría espectral, básica para la Mecánica Cuántica.

Además de ser un libro de texto, tiene unas características nuevas que merece la pena comentar. B. Cascales, durante la presentación del libro en el Congreso de la Real Sociedad Matemática Española 2013 de Santiago de Compostela, dijo que junto al texto, o en su lugar, se puede conseguir una versión en formato *pdf* utilizable en ordenador, tableta digital e incluso *smartphone*. Gentilmente la editorial del libro me ha dado acceso libre al material digital y he comprobado que los hipervínculos permiten navegar de una manera muy cómoda por el documento: índices, referencias cruzadas, referencias bibliográficas con *backref*, citas, etcétera. Además hay hiperenlaces externos a una aplicación *web* que proporcionan acceso abierto a la solución de los dos primeros problemas de cada capítulo. También se tienen hiperenlaces de acceso por subscripción para las soluciones de todos los problemas, algunos con comentarios en versión audio, y otros con acceso al programa de cálculo *Maxima* en la *web* para ilustrar aspectos numéricos del libro: funcionan bien y permiten cambiar datos y comprobar los resultados. El libro, en su edición digital en *pdf*, contiene un botón a través del cual se puede comprobar si la versión que el lector tiene es la más actual. No sabemos cómo serán los libros de texto para las nuevas generaciones de estudiantes, pero después de haber estado utilizando todos estos resortes digitales podemos preguntarnos: ¿es este el formato de los libros de texto adaptados a las nuevas tecnologías? El futuro lo dirá, pero el esfuerzo realizado por los autores y la editorial en esta dirección es encomiable.

Conocía una versión preliminar del libro, escrita por B. Cascales y J. M. Mira, por haberla utilizado hace algunos años al explicar la asignatura «Análisis Funcional» en la Universidad de Zaragoza; se aprecia que el nuevo texto es distinto en el fondo y la forma. Además de que la presentación del texto en papel ha mejorado, sin contar con las nuevas aportaciones digitales, el contenido matemático es más completo. Los autores se han esforzado en aumentar el número de aplicaciones de la teoría, con lo que no solo podemos ver de dónde surgieron algunos de los problemas abstractos que se estudian, sino que se puede comprobar la potencia de los resultados obtenidos para tratar otros problemas. También han completado los temas e incorporado una colección muy extensa de problemas con los que el lector puede verificar la comprensión de los conceptos y las técnicas que estudia.

Pasaré a continuación a comentar el contenido del libro. Como dicen los autores en su introducción, en la exposición *se pretende ir de lo concreto al planteamiento general de los problemas, para después de un estudio riguroso volver al mundo de las aplicaciones.* El núcleo central lo constituyen los espacios de Hilbert, que son la versión infinito-dimensional de los espacios euclídeos, con su teoría espectral para operadores compactos autoadjuntos. Esto ocupa los dos primeros capítulos. El tercero está dedicado a los teoremas clásicos del Análisis Funcional en espacios de Banach, cuyas aplicaciones han sido la causa de su extraordinario desarrollo. Todo ello es, según mi opinión, el Análisis Funcional mínimo que debe conocer un matemático profesional e incluso un físico teórico actual.

El primer capítulo es *Espacios de Hilbert, principio de Dirichlet y series de Fourier*. Ya en el propio título se aprecia que los autores no se han limitado a exponer la estructura característica del espacio de Hilbert, ortogonalidad, mejor aproximación, dualidad y bases, sino que además desarrollan los orígenes de la teoría y algunas aplicaciones. Comienza con las propiedades básicas y los ejemplos clásicos de espacios de Banach, que muy posiblemente el estudiante ya ha visto en otras disciplinas, para luego adentrarse en la ortogonalidad, teorema del vector minimizante y dualidad de Riesz-Fréchet. Inmediatamente exponen el teorema de Lax-Milgram, que les permite abordar el estudio de problemas variacionales cuadráticos. Con la idea de presentar aplicaciones tratan la convolución de funciones, los teoremas de densidad y aproximación de los espacios de funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto y estudian la justificación analítica funcional del principio de Dirichlet y los espacios de Sobolev, presentando el teorema de Malgrange-Ehrenpreis sobre la solución en L^2 de ecuaciones en derivadas parciales elípticas con coeficientes constantes. Hacen también una incursión en el método de elementos finitos, con el teorema de Galerkin-Ritz. Luego desarrollan un estudio pormenorizado sobre las bases y sumas hilbertianas. Terminan el capítulo con una introducción a las series de Fourier en $L^2([-\pi,\pi])$, demostrando previamente el teorema de aproximación de Weierstrass, con los polinomios de Bernstein. Además, presentan una introducción a la teoría de polinomios ortogonales, con su aplicación a las fórmulas de cuadratura gaussianas, y finalizan el primer capítulo tratando el espacio de Bergman sobre un abierto del plano complejo, obteniendo una base hilbertiana cuando el dominio es simplemente conexo. En este capítulo hay planteados 53 problemas, cada uno de los cuales está marcado según su dificultad, para guiar a los lectores.

El segundo capítulo está dedicado a describir la *Teoría espectral de operadores compactos normales.* Todo este tema está repleto de ejemplos donde aparecen los operadores clásicos más relevantes del Análisis que dieron lugar al desarrollo de esta teoría: las matrices infinitas de cuadrado sumable o de Hilbert-Schmidt, operadores de multiplicación por funciones acotadas o con núcleo integral en L^2, operadores de desplazamiento, etcétera. Introducen las nociones clásicas de espectro y función resolvente para operadores en espacios de Banach y prueban que el espectro es compacto y no vacío en este contexto. Para ello tienen que utilizar resultados que se ven en el capítulo siguiente, lo que no es óbice pues los autores, con buen criterio, prefieren anteponer al desarrollo formal la utilidad de los resultados. A continuación introducen el adjunto de un operador y sus propiedades, para pasar al estudio de los operadores compactos, primero en general y luego en espacios de Hilbert, viendo cómo es el espectro en esta situación. Luego estudian el teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos, compactos normales y la alternativa de Fredholm para los mismos. Como aplicación estudian el problema de Sturm-Liouville y los casos particulares del problema de la cuerda vibrante y la solución del problema de Dirichlet en un rectángulo. Este capítulo finaliza con el planteamiento de 40 problemas, con las mismas características que en el capítulo precedente.

El tercer capítulo, *Los principios fundamentales del Análisis Funcional: aplicaciones*, constituye el núcleo central de la teoría de los espacios de Banach. Comienzan los autores con la forma analítica del teorema de Hahn-Banach o de extensión de formas lineales conservando la acotación, en sus diferentes versiones, planteándose también el problema de la unicidad de la extensión. Tratan en general la propiedad de extensión en los espacios de Banach y su equivalencia con la propiedad de intersección y proyección. A continuación se centran en los teoremas de categoría, presentando el teorema de Baire, el principio de la acotación uniforme de Banach y el teorema de Banach-Steinhaus con sus aplicaciones a la teoría de las funciones holomorfas vectoriales, los métodos de sumabilidad y la convergencia puntual de la serie de Fourier de funciones continuas. Luego incluyen los teoremas de la aplicación abierta y de la gráfica cerrada y lo aplican al estudio de las bases de Schauder en espacios de Banach. Esta es la parte básica de este capítulo; el resto contiene una colección de resultados que son necesarios para los estudiantes que quieran especializarse en el Análisis Funcional. Los autores, a continuación, estudian los espacios vectoriales topológicos y los espacios localmente convexos; los teoremas generales de separación, pares duales, la topología débil con el teorema de Alaoglu-Bourbaki y el teorema de completitud de Grothendieck; reflexividad en espacios de Banach y la propiedad de Schur sobre las sucesiones convergentes en el espacio ℓ^1. En este capítulo plantean 43 problemas en condiciones similares a los capítulos anteriores.

Al final presentan un apéndice titulado *Introducción a la integral de Lebesgue*, con los siguientes apartados: *Medida e integración abstracta, Espacios L^p, La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, Relación con la integral de Riemann*, donde se recogen sin demostraciones los resultados básicos más importantes de la teoría de integración, necesarios para poder seguir el material presentado en los otros capítulos.

En la bibliografía aparecen 74 entradas que contienen las monografías más importantes del tema y las referencias obligadas a los resultados que aparecen en el texto.

Para terminar esta recensión, es claro para mí que nos encontramos con un buen libro de texto, utilizable por los profesores, los alumnos y los estudiosos del tema. Está escrito con gran precisión y muy rigurosamente expuesto. Además abre y ofrece posibilidades nuevas de cara a la enseñanza en el siglo XXI, utilizando los recursos de las nuevas tecnologías. Esperemos que sea el primero, ¡y no el último!, de una colección de libros de texto universitarios de matemáticas pensados de una manera diferente.

Referencias

[1] E. Hille, *Methods in classical and functional analysis*, Addison-Wesley Series in Mathematics, Addison-Wesley Publ. Co., 1972.

[2] J. Cerdà, *Linear functional analysis*, Graduate Studies in Mathematics, 116, American Mathematical Society y Real Sociedad Matemática Española, 2010.

[3] Y. Eidelman, V. Milman y A. Tsolomitis, *Functional analysis. An introduction*, Graduate Studies in Mathematics, 66, American Mathematical Society, 2004.

Jesús Bastero, Dpto. de Matemáticas, Universidad de Zaragoza
Correo electrónico: bastero@unizar.es