Entrevista a María Pe Pereira, Premio José Luis Rubio de Francia 2012

por

Ann Lemahieu

La Real Sociedad Matemática Española ha concedido el premio José Luis Rubio de Francia 2012 a María Pe Pereira, que en breve se incorporará al ICMAT como postdoc. La argumentación del jurado destaca en especial sus contribuciones al problema de arcos de Nash para superficies de su tesis doctoral, dirigida por Javier Fernández de Bobadilla, y su trabajo conjunto con su director de tesis en el que resuelven de modo afirmativo la conjetura.

María Pe Pereira (Burgos, 1981) es licenciada en Matemáticas por la Universidad Complutense de Madrid y doctora en Matemáticas por la misma universidad desde 2011, con una tesis titulada *On Nash Problem for Quotient Surface Singularities* y dirigida por Javier Fernández de Bobadilla, con quien no ha dejado de colaborar desde entonces. Después de doctorarse pasó dos años en el Instituto de Matemáticas

de Jussieu en París con una beca de Caja Madrid. Actualmente es profesora invitada en la Universidad de Lille I y en septiembre se incorporará al ICMAT con un contrato postdoctoral *Severo Ochoa*.

Nos encontramos en una terraza en la Plaza Mayor de Lille, disfrutando de un café con *merveilleux*, especialidad local.

Ann Lemahieu: Antes de nada, enhorabuena por el premio, María. Como ves, hemos elegido el primer día con sol en lo que llevamos de primavera para hacer la entrevista.

María Pe: Muchas gracias Ann, ¡me hace mucha ilusión que seas tú la que me entreviste, y más con sol!

AL: La parte central de tu investigación, la que se ha destacado en la concesión de este galardón, ha sido en torno al problema de arcos de Nash. Este fue enunciado por John Nash en los años 60, ¿cuál fue el contexto histórico?, ¿en qué radica su importancia?

MP: En primer lugar conviene señalar que el problema está enmarcado en el estudio de singularidades de conjuntos analíticos (o algebraicos) complejos. Nosotros consideramos subconjuntos de $\mathbb{C}^n$ definidos como el lugar de ceros de una cantidad (finita) de funciones holomorfas, por ejemplo polinomios. Este conjunto será una variedad diferenciable salvo en un conjunto de codimensión mayor que 2. Los puntos donde no es variedad serán los puntos singulares, y el conjunto de todos ellos forma lo que se llama el *lugar singular*. Por ejemplo, el origen de $x^2 + y^3 + z^5 = 0$ en $\mathbb{C}^3$ es una singularidad de la superficie conocida como E_8. Nuestro problema es local, así que nos centramos en un entorno del lugar singular.

En los años 60, Hironaka acababa de demostrar que, para cualquier singularidad (definida sobre un cuerpo cerrado de característica cero), siempre existía lo que se llama *resolución de singularidades*, es decir, una variedad compleja lisa y una aplicación analítica propia (localmente polinómica, en el caso algebraico) de esta variedad lisa a la variedad singular que es un isomorfismo fuera del lugar singular. La preimagen del lugar singular se llama *lugar excepcional* de la resolución.

Este teorema es fundamental en Geometría Algebraica y Analítica, ya que permite reducir problemas acerca de variedades singulares a problemas sobre variedades lisas.

Hironaka demostró la existencia de resolución, pero su demostración, que además resultó muy complicada en un primer momento, dista mucho de dar una descripción satisfactoria de la resolución de una singularidad, de su lugar excepcional, así como de la relación entre todas las posibles resoluciones de una misma singularidad y sus lugares excepcionales. Fue en este contexto, con la demostración de Hironaka reciente, cuando Nash propuso estudiar la resolución mirando el espacio de arcos que pasan por la singularidad. Algo que resulta muy natural a posteriori: intentar entender la topología y geometría en torno a un punto singular considerando todas las curvas que pasan por él.

AL: ¿Nos puedes explicar de forma asequible para un matemático no especializado cuál es el enunciado del problema? ¿Por qué la conjetura se enuncia solo en dimensión 2?

MP: Dada una singularidad, el problema de Nash conjetura una relación precisa entre el lugar excepcional de una resolución y el espacio de arcos que pasan por el lugar singular.

Un arco no es más que una parametrización de una curva compleja. Por ejemplo, (t^4, t^5, t^6) parametriza una curva que vive en la superficie dada por la ecuación $xz - y^2 = 0$ en $\mathbb{C}^3$ y pasa en $t = 0$ por el origen, que es el único punto singular de la superficie.

Fijada una singularidad, podemos considerar todos los arcos que pasan por el origen. Esto será un espacio de dimensión infinita que tiene estructura de variedad algebraica, estando definido como el lugar de ceros de una cantidad numerable de ecuaciones polinómicas en los coeficientes de las series que definen los arcos.[1] Solo una idea acerca de la topología del espacio de arcos: las aplicaciones continuas de $\mathbb{C}$ al espacio de arcos consisten en deformaciones de arcos, es decir, dos arcos estarán cerca si existe una deformación que los conecta.

Como consecuencia de la existencia de resolución, Nash observó que el espacio de arcos se descompone en una cantidad finita de componentes irreducibles[2] y definió lo que hoy se conoce como aplicación de Nash: a cada componente irreducible del espacio de arcos le asoció, de manera natural, una componente del lugar excepcional (aquella por la que se levantan a la resolución casi todos sus arcos). Esta asignación es siempre inyectiva. La pregunta fue cuándo es, además, sobreyectiva. O, si se prefiere, ¿cuáles son las componentes del lugar excepcional que son imagen por esta aplicación?

Para superficies, la existencia de resolución era un resultado clásico, y además hay una única resolución minimal. En este caso, el enunciado estaba claro: si la relación que Nash intuía era buena, tenía que haber una biyección entre las componentes del espacio de arcos y las componentes irreducibles del divisor excepcional de la resolución minimal. A él le pareció *plausible* que así lo fuera, como escribió en la introducción del manuscrito donde introdujo el problema (ver [7][3]). En el caso de dimensión superior no hay una única resolución. Lo que sí que se puede considerar son las componentes que aparecen en todas las resoluciones. Y para estas, aunque Nash se preguntaba si se tendría una biyección, la cuestión ya parecía más complicada. Que esto no es cierto en dimensión mayor que 3 lo mostraron Ishii y Kollár en 2002 (ver [4]), y, en dimensión 3, de Fernex en el verano de 2012 (ver [1]).

AL: ¿Qué implicaciones tiene vuestra respuesta positiva al Problema de Nash para superficies? ¿Queda algo por decir en dimensión superior?

[1] En general, un arco está definido por series convergentes, no necesariamente polinómicas como t^4, t^5 y t^6.

[2] Esta descomposición se puede ver como la estabilización de la descomposicion en componentes irreducibles de los espacios de n-jets, que son variedades algebraicas de dimensión finita.

[3] El manuscrito, que circulaba entre los especialistas, data de la década de 1960, pero no se publicó hasta la aparición del volumen conmemorativo *A celebration of John F. Nash, Jr.* en 1995.

MP: El hecho de que, para superficies, el estudio de la resolución a través de los arcos da lo esperable, es decir, información sobre la resolución minimal, da esperanza a que los espacios de arcos codifiquen información importante sobre toda la fauna de resoluciones y modelos en dimensión superior. Si hubiera sido falsa la conjetura, estaríamos mucho más perplejos.

Como acabo de señalar, ya sabemos que la adaptación más sencilla de la conjetura a dimensión superior es falsa, lo que queda es encontrar el enunciado correcto. Ya hay alguna conjetura al respecto de Kollár (ver [5]).

AL: ¿Cual dirías que ha sido la clave para el éxito en la resolución del problema?

MP: Siguiendo el enfoque de Monique Lejeune-Jalabert y Ana Reguera (ver [6, 9]), trabajábamos con familias de arcos o *wedges*. A diferencia de otros enfoques conocidos, más algebraicos, nuestro punto de vista era trabajar siempre con arcos analíticos, con lo que podíamos hacer observaciones de carácter geométrico y topológico. En un trabajo anterior (ver [2]), Javier había demostrado que trabajar con familias analíticas era suficiente (además de que el problema no dependía más que de la topología de la singularidad). En cualquier caso, el demostrar que el fenómeno analítico correspondiente era cierto, se presentaba, al menos para mí, como un prerrequisito para creer en la conjetura.

AL: ¿En qué consistió la solución a la conjetura que obtuvisteis?

MP: La solución (ver [3]) consiste en demostrar que ciertas familias de arcos no existen. Una familia de arcos no es más que una parametrización en familia, topológicamente es una aplicación del disco por el espacio de parámetros de la familia en la superficie. La familia la vemos como la deformación de un arco especial, e imponemos además ciertas condiciones al resto de arcos, que tendrán todos básicamente las mismas propiedades porque estamos trabajando en geometría compleja, que es muy rígida. Estas condiciones imponen restricciones topológicas. La demostración consiste en calcular una cota superior para la característica de Euler del disco que parametriza el arco genérico a partir de las propiedades de la familia. Esta cota resulta ser 0, lo que es imposible porque la característica de Euler del disco es 1.

AL: ¿Cómo empezaste a trabajar en este problema?

MP: Comencé estudiando qué podía decir al respecto en el caso de superficies cociente, superficies que se obtienen «cocientando» $\mathbb{C}^2$ por un subgrupo lineal finito. Estos ejemplos habían sido muy estudiados sin éxito. Pensamos que levantando los arcos a $\mathbb{C}^2$, aunque fuera admitiendo exponentes fraccionarios, podríamos hacer más tratable el problema. En concreto, empecé buscando un contraejemplo con ayuda del ordenador. Obviamente no apareció, y se fue evidenciando poco a poco que había cosas que se podían probar. En ese momento yo estaba buscando un problema para hacer la tesis doctoral.

AL: ¿Qué destacarías del trabajo de tu tesis que haya sido importante para la resolución final?

MP: Creo que fue importante desarrollar muchos ejemplos completos, lo que nos dio intuición de muchos fenómenos que podían ocurrir. Por ejemplo, un hecho muy sencillo que se hizo patente, y que luego fue importante para la resolución final, fue el siguiente: al fijar ciertas condiciones para los arcos de una familia $\alpha_s(t)$ parametrizada por s (que toma valores en un disco de $\mathbb{C}$), se imponía que necesariamente tenía que haber más puntos en los que los arcos α_s con $s \neq 0$ pasaran por la singularidad. Por ejemplo, en la familia de arcos

$$\alpha_s(t) = (t^2(1+st)^2, t^2(1+st)^2, t^2(1+st)^2),$$

para $s \neq 0$, el arco α_s pasa dos veces por el origen de la superficie singular dada por $xy - z^2$, para $t = 0$ y para $t = -1/s$. Esta observación fue posible gracias a que estábamos trabajando con arcos analíticos y mirando su geometría. Esto fue fundamental para probar el caso de superficies cociente (ver [8]), y nos hizo darnos cuenta que podía ser clave tenerlo en cuenta para el problema en general.

AL: ¿Cómo ha sido trabajar con Javier todos estos años? ¿Seguiréis colaborando?

MP: Trabajar con él ha sido una suerte, he aprendido muchísimo y nos entendemos muy bien, la dinámica de trabajo que tenemos es muy estimulante. Según pasa el tiempo valoro más y más todo lo que he aprendido de él. ¡Claro que espero que sigamos colaborando por mucho tiempo!

AL: ¿En qué temas estás trabajando en la actualidad?, ¿qué problemas te interesan y te gustaría dedicarles tiempo en el futuro?

MP: Actualmente estoy estudiando con Javier más posibilidades de los espacios de arcos. En esta línea también estamos colaborando con Patrick Popescu-Pampu, de la Universidad de Lille I, donde he estado estos últimos meses.

La Teoría de Singularidades tiene la ventaja de que permite enfoques muy diversos. En particular me interesan problemas que hablan de la topología o geometría de la singularidad, aunque partan quizás de un contexto más algebraico. Por ejemplo, si bien no aspiro a resolverla, tengo siempre en mente la Conjetura de Zariski, que pregunta si la multiplicidad de una hipersuperficie[4] se conserva por homeomorfimo. En particular, me gustaría entender qué podemos decir de un homeomorfismo de $\mathbb{C}^n$ que lleva una hipersuperficie analítica en otra; por ejemplo, qué otras estructuras preserva (salvo homotopía).

AL: ¿Cómo ves la formación de investigadores en España, en comparación con la de otros centros extranjeros que conozcas?

MP: Yo estoy muy contenta con haber hecho la tesis en España. Creo que el ambiente matemático es muy agradable y variado. No nos podemos comparar en

[4]Si una hipersuperficie en $\mathbb{C}^n$ viene definida por una función analítica $f(\underline{x}) = \sum_{I\in\mathbb{N}^n} a_I \underline{x}^I$ y si para $I = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ llamamos $|I| := \sum_{k=1}^n i_k$, entonces la multiplicidad de la hipersuperficie es $\min\{|I| : a_I \neq 0\}$.

tradición con muchos países, pero el nivel que ha alcanzado la matemática española es muy relevante y esto se contagia.

En cuanto a la formación, creo que es importante tener un máster de investigación fuerte, no excesivamente especializado, que obligue a estudiar, que dé base y que a la vez ponga al alcance de los alumnos los últimos avances de manera ágil. Cualquier ayuda para ponerse al día en ese estadio es impagable.

AL: ¿Cómo fue el ambiente durante la etapa doctoral?

MP: En la Universidad Complutense siempre me he sentido muy a gusto, el ambiente entre profesores y doctorandos es inmejorable. También mi paso por el ICMAT ha sido muy agradable.

Recuerdo con especial cariño las horas de las comidas, tanto con amigos doctorandos (y no doctorandos) como con el grupo de singularidades. También fue muy gratificante participar en el grupo de trabajo que organizaban Vicente Muñoz, Ricardo Pérez Marco y Javier.

Por otra parte, haberme integrado en el grupo de investigación de Singularidades de Madrid (con Ignacio Luengo, Alejandro Melle...), y en el extendido por el resto de España (Zaragoza, Valladolid, Valencia, Sevilla, Tenerife...), ha sido increíble. Es un grupo muy activo, y en particular nos ha permitido a mí y a otros muchos estudiantes disfrutar de muchos congresos y escuelas, como el YMIS,[5] organizado anualmente en España y donde nos conocimos precisamente tú y yo. Esto nos ha puesto en contacto con una comunidad matemática muy amplia, tanto española como extranjera.

AL: ¿Cómo valoras la situación actual de los investigadores jóvenes en España?

MP: De total incertidumbre. Creo que es difícil saber cuántos contratos va a haber en los próximos años. El principal problema es la falta de inversión y la inestabilidad que provocan los cambios de políticas y las crisis como la actual.

Me preocupa que la situación de la investigación, y la universidad en general, se deteriore. No está en juego solo el futuro de una generación, sino el futuro de la universidad pública y de la investigación. Si se pierde la inercia positiva conseguida después de muchos años, luego será difícil recuperarla. La renovación paulatina supongo que es buena para todos.

Creo que el sistema de contratos Ramón y Cajal a los que luego se les facilita la permanencia es bueno, aunque haga la carrera mucho más lenta comparada con otros países. En la misma línea, creo que es deseable que los procesos de contratación de las universidades sean más abiertos y previsibles, como las convocatorias anuales de contratos Ramón y Cajal. Pero para que hablar de todo esto tenga sentido tiene que haber nuevos contratos, que parece ser el problema principal en este momento.

[5]YMIS son las siglas de unos encuentros dirigidos a jóvenes interesados por la geometría algebraica, las singularidades y el álgebra conmutativa que desde 2005 organiza el grupo de investigación SINGACOM de la Universidad de Valladolid. Las siglas correspondían originalmente a *Young Mathematicians In Sedano*, pero las últimas ediciones han cambiado de sede y ahora deben leerse como *Young Mathematicians In Segovia*.

AL: Después de más de dos años en Francia, ¿vuelves con ganas a Madrid?

MP: El periodo en Francia ha sido muy gratificante, creo que he aprendido mucho y espero tener ocasión de volver por aquí, pero ahora siento que voy a trabajar muy bien en el ICMAT y me apetece mucho volver. Además, me siento muy afortunada tal y como está la situación.

AL: Mucha suerte entonces en tu regreso y gracias por la entrevista.

MP: Muchas gracias a ti, Ann, y gracias también a La Gaceta, y a la RSME por convocar este premio.

Referencias

[1] T. de Fernex, Three-dimensional counter-examples to the Nash problem, http://arxiv.org/abs/1205.0603 (2012).

[2] J. Fernández de Bobadilla, Nash Problem for surfaces is a topological problem, *Advances in Mathematics* **230** (2012), 131–176.

[3] J. Fernández de Bobadilla y M. Pe Pereira, Nash Problem for surfaces, *Annals of Mathematics* **176** (2012), 2003–2029.

[4] S. Ishii y J. Kollár, The Nash problem on arc families of singularities, *Duke Math. J.* **120** (2003), no. 3, 601–620.

[5] J. M. Johnson y J. Kollár, Arc spaces of cA-type singularities, http://arxiv.org/abs/1306.1208 (2013).

[6] M. Lejeune-Jalabert, *Arcs analytiques et résolution minimale des singularities des surfaces quasi-homogenes*, Springer LNM **777** (1980), 303–336.

[7] J. Nash, Arc structure of singularities, *A celebration of John F. Nash, Jr. Duke Math. J.* **81** (1995), no. 1, 31–38.

[8] M. Pe Pereira, Nash Problem for Quotient Surface Singularities, *J. London Math. Soc.* **87** (2013), no. 1, 177–203.

[9] A. Reguera-López, A curve selection lemma in spaces of arcs and the image of the Nash map, *Compositio Math.* **142** (2006), 119–130.

Ann Lemahieu, Institut Paul Painlevé, Université Lille 1, Cité Scientifique, 59655, Villeneuve d'Ascq Cedex, Francia

Correo electrónico: ann.lemahieu@math.univ-lille1.fr