Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri Ramírez y José Luis Díaz Barrero

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@dmc.unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 30 de septiembre de 2014.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 237 (Corrección). *Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Universidad Barcelona Tech, Barcelona.*

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales tales que $x_i \in [a,b]$, $1 \leq i \leq n$, siendo $0 < a < b$. Probar que

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right) \leq \frac{(a^2+b^2)^3}{6a^2b^2}.$$

Problema 241. *Propuesto por Valcho Milchev, Kardzhali, Bulgaria.*

Determinar todos los números enteros positivos a y b tales que $\frac{a^4-a^2+1}{ab-1}$ es un número entero positivo.

Problema 242. *Propuesto por Marcel Chirita, Bucarest, Rumanía.*

Determinar las funciones continuas $f : [1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\int_x^{x^n} f(t)\,dt = \int_1^x (t + t^2 + \cdots + t^{n-2} + t^{n-1}) f(t)\,dt,$$

para $x \in [1,\infty)$ y $n \in \mathbb{N}$.

PROBLEMA 243. *Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.*

En un triángulo ABC sean $\angle CAB = \pi/3$, ω su circunferencia inscrita, I su incentro y M el punto medio del lado BC. Si la circunferencia ω toca al lado BC en el punto D, corta al segmento AI en F, y al segmento MF en otro punto E distinto de F, demostrar que $AD = AE$.

PROBLEMA 244. *Propuesto por Paolo Perfetti, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Tor Vergata, Roma.*

Sean α y β números reales tales que $\alpha \neq -2k$, $\alpha \neq 2k-1$, $\beta \neq 2k+2$ y $\beta \neq -2k-1$ para cada entero positivo k. Definimos la sucesión

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha + (-1)^k k}{\beta + (-1)^{k+1} + (-1)^{k+1}(k+1)}, \qquad n \geq 1,$$

y los límites

$$T(\alpha,\beta) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n, \qquad U(\alpha,\beta) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} n a_n$$

y

$$S(\alpha,\beta) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (-1)^n a_n.$$

a) Probar que los límites existen si $-1 < \alpha + \beta < 1$.

b) Determinar los valores de α y β para los que

$$(\alpha+\beta)S(\alpha,\beta) - 3T(\alpha,\beta) - 2U(\alpha,\beta) > 0.$$

PROBLEMA 245. *Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez.*

Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo, p su semiperímetro y r y R, respectivamente, los radios de sus circunferencias inscrita y circunscrita.

a) Probar que si $\lambda \geq 1$, entonces

$$\frac{2p^2}{27} \leq \frac{6rR + \lambda(2p^2 - 6rR)}{3(2+7\lambda)} \leq \frac{p^2 - 6rR}{21}.$$

b) Probar que si $0 \leq \lambda \leq 1$, entonces

$$rR \leq \frac{6rR + \lambda(2p^2 - 6rR)}{3(2+7\lambda)} \leq \frac{2p^2}{27}.$$

Problema 246. *Propuesto por Nikos Bagis, Aristotle University, Tesalónica, Grecia; y Larry Glasser, Clarkson University, Postdam, Nueva York, Estados Unidos.*

Probar que

$$\int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\cos\phi\cos\theta}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1+\cos\phi\cos\theta}}$$

para $0<\phi<\pi$.

Soluciones

Problema 217. *Propuesto por Pedro H. O. Pantoja (estudiante), Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Brasil.*

Sea $S(n)$ la suma de los dígitos de un entero positivo n. Probar que, para cada entero positivo m, la ecuación

$$2+S(n)+S(n^2)+\cdots+S(n^m)=S(n^{m+1})$$

admite infinitas soluciones enteras.

Solución enviada por el proponente.

Probaremos que los números de la forma

$$n=10^k+1=1\underbrace{000\cdots00}_{k-1}1$$

satisfacen la ecuación propuesta para $k=2,3,4,\dots$ y, como hay infinitos de ellos, se concluirá el resultado.

Tenemos que $S(n)=1+1=2$. Es claro que

$$\begin{aligned} n^2=(10^k+1)^2=10^{2k}+2\cdot 10^k+1=10^k(10^k+2)+1&=10^k(1\underbrace{000\cdots00}_{k-1}2)+1\\ &=1\underbrace{000\cdots00}_{k-1}2\underbrace{000\cdots00}_{k-1}1 \end{aligned}$$

y $S(n^2)=1+2+1=4=2^2$. De manera análoga,

$$\begin{aligned} n^3=(10^k+1)^3&=10^{3k}+3\cdot 10^{2k}+3\cdot 10^k+1\\ &=1\underbrace{000\cdots00}_{k-1}3\underbrace{000\cdots00}_{k-1}3\underbrace{000\cdots00}_{k-1}1 \end{aligned}$$

y $S(n^3)=1+3+3+1=8=2^3$. En general, $S((10^k+1)^m)=2^m$ para todo $m\geq 1$, ya que

$$(10^k+1)^m=\binom{m}{0}10^{km}+\binom{m}{1}10^{k(m-1)}+\cdots+\binom{m}{m}$$

y

$$S((10^k+1)^m) = \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \cdots + \binom{m}{m} = 2^m.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} 2 + S(n) + S(n^2) + S(n^3) + \cdots + S(n^m) &= 1 + (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^m) \\ &= 1 + 2^{m+1} - 1 = 2^{m+1} = S(n^{m+1}) \end{aligned}$$

y la demostración está completa.

También resuelto por A. Castaño. Se ha recibido una solución incompleta.

NOTA. A. Castaño obtiene las mismas soluciones que el proponente y conjetura que estas son las únicas posibles. Sería interesante disponer de una verificación o una refutación de este hecho.

PROBLEMA 218. *Propuesto por Larry Glasser, Clarkson University, Postdam, Nueva York, Estados Unidos.*

Sean a, d y $b = a^2 - 2d$ números reales positivos. Probar que

$$\int_0^\infty \frac{x^4 + ax^2 - d}{x^8 + bx^4 + d^2}\, dx = 0.$$

Solución enviada por Ovidiu Furdui, Universidad Técnica de Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.

Puesto que $b = a^2 - 2d$, se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^4 + ax^2 - d}{x^8 + bx^4 + d^2}\, dx &= \int_0^\infty \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^2 - \frac{d}{x^2} + a}{\left(x^2 - \frac{d}{x^2}\right)^2 + a^2}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{d}} \int_0^\infty \frac{1}{y^2} \cdot \frac{\sqrt{d}\left(y^2 - \frac{1}{y^2}\right) + a}{d\left(y^2 - \frac{1}{y^2}\right)^2 + a^2}\, dy, \end{aligned}$$

donde en la última identidad se ha usado el cambio de variable $x = \sqrt[4]{d}\, y$. Sea

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{y^2} \cdot \frac{\sqrt{d}\left(y^2 - \frac{1}{y^2}\right) + a}{d\left(y^2 - \frac{1}{y^2}\right)^2 + a^2}\, dy.$$

Con el cambio $y = 1/t$, la integral I se transforma en

$$I = \int_0^\infty \frac{\sqrt{d}\left(\frac{1}{t^2} - t^2\right) + a}{d\left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right)^2 + a^2}\, dt$$

y, por tanto,

$$I = \frac{1}{2}(I+I) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{a - \sqrt{d}\left(y - \frac{1}{y}\right)^2}{d\left(y^2 - \frac{1}{y^2}\right)^2 + a^2}\left(1 + \frac{1}{y^2}\right) dy.$$

Aplicando sucesivamente las transformaciones $y - 1/y = u$ y $u = \sqrt{a}v/\sqrt[4]{d}$, deducimos que

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{a - \sqrt{d}\,u^2}{a^2 + du^4 + 4du^2}\, du = \int_0^\infty \frac{a - \sqrt{d}\,u^2}{a^2 + du^4 + 4du^2}\, du \\ &= \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt[4]{d}} \int_0^\infty \frac{1 - v^2}{a^2v^4 + 4a\sqrt{d}\,v^2 + a^2}\, dv = 0, \end{aligned}$$

puesto que, por el cambio de variable $v = 1/t$,

$$\int_0^\infty \frac{dv}{a^2v^4 + 4a\sqrt{d}\,v^2 + a^2} = \int_0^\infty \frac{t^2}{a^2t^4 + 4a\sqrt{d}\,t^2 + a^2}\, dt.$$

Y el problema queda resuelto.

También resuelto por G. C. Greubel, D. Lasaosa, P. Perfetti y el proponente.

Problema 219. *Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Universidad Complutense, Madrid.*

Probar que, para $x, y > 0$ y $t > -1/4$,

$$\frac{xy(x^2+xy+y^2)}{3} \le \frac{(x^2+y^2)^2 + 4txy(x^2+xy+y^2)}{4+12t} \le x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4.$$

Solución enviada por Juan Mir Pieras, Lloseta, Mallorca.

Es inmediato observar que, si $p \le q$ y $0 \le a \le 1$, entonces $p \le (1-a)p + aq \le q$. El problema propuesto es un caso particular de lo anterior tomando

$$p = \frac{xy(x^2+xy+y^2)}{3}, \qquad q = x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4$$

y

$$a = \frac{1}{4+12t}, \quad t \ge -1/4.$$

Por tanto, basta demostrar que

$$\frac{xy(x^2+xy+y^2)}{3} \le x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4,$$

pero esta desigualdad es equivalente a $0 \le (x-y)^2$, que es obviamente cierta. Además, vemos que la igualdad se cumple si y solo si $x = y$, que se corresponde con $p = q = x^4$.

Solución compuesta por las enviadas por Alberto Castaño Domínguez, Universidad de Sevilla, Sevilla; Roberto de la Cruz Moreno, Centre de Recerca Matemàtica, Barcelona; y Gregori García Ferri, CEFIRE, Xàtiva, Valencia.

Para cada $x, y > 0$, consideramos la función

$$f(t) = \frac{(x^2+y^2)^2 + 4txy(x^2+xy+y^2)}{4+12t}$$

definida para $t \geq -1/4$. Resulta sencillo comprobar que

$$f'(t) = -4\frac{(x-y)^2((x-y)^2+2(x+y)^2)}{(4+12t)^2},$$

luego $f'(t) < 0$, si $x \neq y$, y $f'(t) = 0$, si $x = y$. Por tanto, para $x \neq y$ se tendrá que la función es decreciente para $t \in [-1/4, +\infty)$ y

$$f(-1/4) < f(t) < \lim_{t\to+\infty} f(t),$$

lo cual equivale a

$$\frac{xy(x^2+xy+y^2)}{3} < \frac{(x^2+y^2)^2 + 4txy(x^2+xy+y^2)}{4+12t} < x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4,$$

ya que

$$f(-1/4) = \frac{xy(x^2+xy+y^2)}{3}$$

y

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4.$$

Cuando $x = y$ es el único caso en el que se alcanza la igualdad, pues en ese caso $f(t)$ es constante e igual a x^4.

También resuelto por I. V. Codreanu, D. Lasaosa, Kee-Wai Lau, J. Mozo, J. Nadal, P. Perfetti, B. Salgueiro, N. Stanciu y T. Zvonaru (conjuntamente), D. Văcaru, J. Vinuesa y el proponente.

PROBLEMA 220. *Propuesto por Yagub N. Aliyev, Qafqaz University, Khyrdalan, Azerbaiyán.*

Sean O, A y B tres puntos en el plano tales que $\angle AOB = \pi/2$, y sean C y D dos puntos arbitrarios situados, respectivamente, en los segmentos OA y OB. Si E es el punto de intersección de los segmentos AD y BC y $\angle DEB = \alpha$, probar que

$$|BD|^2 \cdot \cot\alpha + |AC| \cdot (|BO| + |OD|) \geq 2\sqrt{|OD| \cdot |OB| \cdot (|AC|^2 + |BD|^2)}.$$

Solución enviada por Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.

Tomamos el punto O como origen de coordenadas de un sistema cartesiano de ejes rectangulares de tal forma que las coordenadas de A, B, C y D sean, respectivamente, $(a,0)$, $(0,b)$, $(c,0)$ y $(0,d)$, siendo a, b, c y d números reales positivos con $a>c$ y $b>d$. De esta forma $|OB|=b$, $|OD|=d$, $|AC|=a-c$ y $|BD|=b-d$.

Teniendo en cuenta que las pendientes de las rectas AD y BC son, respectivamente, $m_{AD}=-\frac{d}{a}$ y $m_{BC}=-\frac{b}{c}$, resulta

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{m_{AD}-m_{BC}}{1+m_{AD}m_{BC}}=\frac{ab-cd}{ac+bd}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}|BD|^2\cdot\cot\alpha+|AC|\cdot(|BO|+|OD|)&=(b-d)^2\,\frac{ac+bd}{ab-cd}+(a-c)(b+d)\\&=\frac{(b-d)^2(ac+bd)+(a-c)(b+d)(ab-cd)}{ab-cd}\\&=\frac{(a^2b^2+c^2d^2-2abcd)+bd(a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd)}{ab-cd}\\&=\frac{(ab-cd)^2+bd[(a-c)^2+(b-d)^2]}{ab-cd}\\&=(ab-cd)+bd\,\frac{(a-c)^2+(b-d)^2}{ab-cd}\\&\geq 2\sqrt{bd[(a-c)^2+(b-d)^2]},\end{aligned}$$

donde en el último paso se ha aplicado la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica a los números reales positivos $ab-cd$ y $bd\frac{(a-c)^2+(b-d)^2}{ab-cd}$. Así pues,

$$|BD|^2\cdot\cot\alpha+|AC|\cdot(|BO|+|OD|)\geq 2\sqrt{|OD|\cdot|OB|\cdot(|AC|^2+|BD|^2)},$$

como se quería.

También resuelto por D. Lasaosa, J. Nadal, B. Salgueiro, N. Stanciu y T. Zvonaru (conjuntamente) y el proponente.

Nota. En la solución de B. Salgueiro se aplica la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica del mismo modo que en la publicada. Como consecuencia de ese hecho deduce que la igualdad se alcanza únicamente si $(ab-cd)^2=bd((a-c)^2+(b-d)^2)$, que resulta ser equivalente a las condiciones $b=d$ o $b(a^2+d^2)=d(b^2+c^2)$; es decir, $B=D$ o $|AD|^2\cdot|OB|=|BC|^2\cdot|OD|$.

Problema 221. *Propuesto por Panagiote Ligouras, "Leonardo da Vinci" High School, Noci, Italia.*

En un triángulo ABC denotamos por a, b y c las longitudes de los lados BC, CA y AB, respectivamente, y por p su semiperímetro. Sea D el punto de intersección de la bisectriz interior del ángulo CAB con el lado BC, y sean P y Q, respectivamente, los pies de las perpendiculares desde D a los lados AB y CA. Probar que

$$PQ = \frac{2p(p-a)}{b+c}\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{bc}}.$$

NOTA. En el enunciado original de este problema se decía: “Sea D el punto de intersección de la bisectriz interior del ángulo CAB con el lado AB”. Obviamente se trataba de un error puesto que debía ser “con el lado BC”, como aparece en la versión que ahora presentamos. En todas las soluciones recibidas se ha observado ese error y se ha procedido a resolver el problema con el enunciado correcto.

Solución enviada por Kee-Wai Lau, Hong Kong, China.

Sea S el área del triángulo ABC. Puesto que la suma de las áreas de los triángulos ABD y ACD coincide con S, se tiene

$$\frac{AB \cdot PD}{2} + \frac{AC \cdot QD}{2} = S. \tag{1}$$

Es claro que los triángulos APD y AQD son semejantes y verifican que $PD = QD$. Por tanto, de (1) se deduce la identidad

$$PD = \frac{2S}{b+c}.$$

Puesto que $\angle PDQ = \pi - A$, aplicando el teorema del coseno al triángulo PDQ obtenemos

$$PQ^2 = 2PD^2(1+\cos A) = \frac{8S^2(1+\cos A)}{(b+c)^2}.$$

Finalmente, usando la fórmula de Herón para el área del triángulo ABC,

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

y que, por el teorema del coseno,

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

concluimos que

$$\begin{aligned} PQ^2 &= \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)(b^2+2bc+c^2-a^2)}{bc(b+c)^2} \\ &= \frac{4p^2(p-a)^2(a+c-b)(a+b-c)}{bc(b+c)^2}; \end{aligned}$$

es decir, la identidad solicitada.

También resuelto por T. Aguilar, M. Amengual, R. Barroso, R. de la Cruz, D. Lasaosa, J. Mir, J. Nadal, R. Peiró, B. Salgueiro, C. Sánchez, N. Stanciu y T. Zvonaru (conjuntamente, dos soluciones), E. Suppa, D. Văcaru y el proponente.

Problema 222. *Propuesto por Cristobal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.*

Dos circunferencias c_1 y c_2 de centros O_1 y O_2, respectivamente, y radios R y r, con $R > r$, son tangentes interiormente en A. En la recta t tangente común a ambas circunferencias en A, se toma un punto variable P y se trazan las otras dos rectas tangentes PS y PT (puntos de tangencia S y T) a las circunferencias c_1 y c_2, respectivamente.

a) Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias c_3 que son tangentes en S a c_1 y en T a c_2 cuando P varía en t.

b) Determinar una circunferencia ortogonal a todas las circunferencias c_3 y probar que su radio es la media armónica de R y r.

Solución enviada por César Beade Franco, I. E. S. Fernando Blanco, Cee, A Coruña.

a) Si O_3 es el centro de c_3 y r' su radio resulta que la distancia de O_3 a O_1 es $R - r'$, y la de O_3 a O_2 es $r + r'$. Si las sumamos obtenemos la cantidad constante $R + r$. Por tanto, estos centros están situados sobre una elipse de focos O_1 y O_2 y constante $R + r$.

b) Invirtamos las circunferencias c_1 y c_2 respecto a otra circunferencia w de centro A. Obtendremos sendas rectas paralelas ℓ_1 y ℓ_2 perpendiculares al eje central. Todas las circunferencias tangentes a ℓ_1 y ℓ_2 tienen sus centros en la paralela media ℓ_m que las corta ortogonalmente.

Si volvemos a invertir respecto a w, las tangentes a ℓ_1 y ℓ_2 generan las circunferencias c_3 del problema, y ℓ_m se invertirá en la circunferencia c_m, ortogonal a todas ellas y que es, por tanto, la que Coxeter y Greitzer, en el libro *Retorno a la geometría* (sec. 5.7, pág. 122) llaman *circunferencia media* de c_1 y c_2.

Tomemos (solamente por claridad expositiva) $A = (0, 0)$ y las circunferencias c_1 y c_2 con centros $O_1 = (R, 0)$ y $O_2 = (r, 0)$. Si llamamos x al radio de c_m, su centro es el punto $O_m = (x, 0)$. Como el punto $D_1 = (2r, 0)$ se invierte (por c_m) en $D_2 = (2R, 0)$, se verifica que $(2r - x)(2R - x) = x^2$, que implica $x = \frac{2Rr}{R+r}$, es decir, la media armónica de R y r.

Otro modo de responder este apartado es el siguiente: Supuesta la existencia de esta circunferencia c_m, las circunferencias tangentes c_3 se invierten, en una inversión respecto a c_m, en sí mismas. Por tanto, al conservar la inversión las tangencias, c_1 y c_2 se invierten la una en la otra, lo que significa que c_m es su *circunferencia media.*

Y para su radio, aparte del cálculo anterior, podemos consultar el problema 5.7.2 del libro citado, pág. 122.

Nota. El apartado a) de este problema, lo mismo que ocurría con el mismo apartado del anterior Problema 208 de esta sección, no es más que el enunciado en un caso particular del problema de obtener el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a dos circunferencias (considerando como tales a los puntos y las rectas). Es conocido desde hace siglos (A. van Roomen hacia 1596 lo usó para resolver el problema de Apolonio) que dicho lugar geométrico es una cónica.

Se puede ver, al respecto, el artículo sobre Gergonne, *De cómo Gergonne vincula sus propios trabajos sobre tangencias a consideraciones históricas*, publicado en *La Gaceta*, vol. 11, n.º 2.

Además, el enunciado es algo restrictivo: Sucede que si trazamos una circunferencia tangente a dos dadas c_1 y c_2 en los puntos S y T, las rectas tangentes por esos puntos a c_1 y c_2 se cortan precisamente en el eje radical de las circunferencias c_1 y c_2, y este sería la recta t de un enunciado más general.

También resuelto por R. Barroso, S. Campo, R. S. Eléxpuru, D. Lasaosa, J. Mir, J. Nadal, B. Salgueiro, E. Suppa y el proponente.