El «Libro de los lemas»: un ejercicio de visualización

por

Óscar Ciaurri Ramírez*

Resumen. En el artículo realizamos un ejercicio de visualización de las demostraciones de las quince proposiciones contenidas en el *Libro de los lemas* de Arquímedes.

Introducción

El *Libro de los lemas* es una colección de quince proposiciones sobre circunferencias tradicionalmente atribuida a Arquímedes. La atribución a Arquímedes se debe a los árabes y es a través de ellos como ha llegado hasta nosotros el texto griego perdido. La versión árabe del texto, del que sobreviven varios manuscritos, es original del matemático del siglo noveno Thebit ben-Kora (o Thabit ibn Qurra, como también se escribe a menudo su nombre), con anotaciones de Almochtasso-abil-Hassan. El texto árabe fue objeto de dos traducciones latinas, la primera de ellas debida a J. Graeves, editada en Londres, en 1659, con notas de S. Forster, y la segunda realizada por el orientalista A. Ecchellensis, aparecida en Florencia, en 1661, con notas de G. A. Borelli.

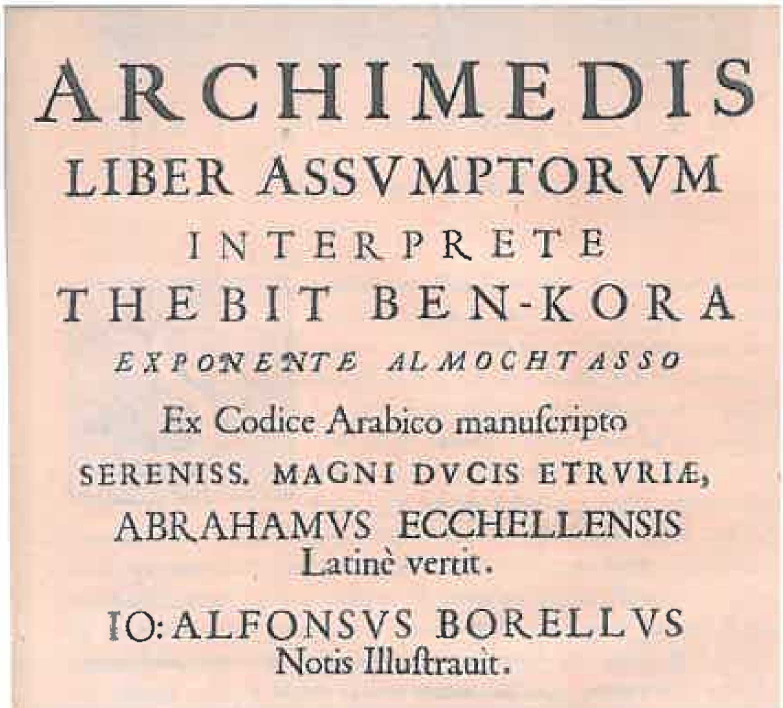
La primera versión latina fue publicada bajo la denominación de *Lemmata* y la segunda como *Liber assumptorum*. En el último caso apareció como un apéndice de la edición del propio Borelli de los libros V, VI y VII de las *Cónicas* de Apolonio, cuyo texto griego está también perdido. La figura 1 muestra la primera página del *Libro de los lemas* tomada, como el resto de los textos latinos que aparecerán a lo largo de este trabajo, de la edición de 1661.

En la forma en la que nos ha llegado el texto es bastante improbable que se deba al propio Arquímedes, puesto que en las proposiciones IV y XIV aparecen referencias a él en tercera persona.[1] Thomas L. Heath, que publicó una traducción al inglés de las obras de Arquímedes que incluye el *Libro de los lemas* [5], sugiere que se trata de una recopilación de proposiciones que pueden ser atribuibles a Arquímedes pero compiladas por algún autor griego posterior. El estilo del texto, completamente distinto del que aparece en otros trabajos de Arquímedes, y la ausencia de continuidad en el contenido de las proposiciones, parecen apoyar la tesis sostenida por Heath.

*El autor está financiado por el proyecto MTM2012-36732-C03-02 de la DGI.

[1]En concreto pueden leerse los textos «quam vocat Archimedes ARBELON» («a la que Arquímedes llama arbelo») y «quam vocat Archimedes Salinon» («a la que Arquímedes llama salino»).

De lo que no cabe duda es de que en esta obra aparecen dos figuras geométricas sobre las que sí trató Arquímedes. Se trata del arbelo (proposiciones IV, V y VI), representado en la figura 2, y el salino (proposición XI), en la figura 3. La construcción de estas figuras quedará aclarada en proposiciones correspondientes. La literatura sobre el arbelo y sus propiedades es la más abundante (véanse como ejemplo [3],



ARCHIMEDIS
LIBER ASSVMPTORVM
INTERPRETE
THEBIT BEN-KORA
EXPONENTE ALMOCHTASSO
Ex Codice Arabico manuſcripto
SERENISS. MAGNI DVCIS ETRVRIÆ,
ABRAHAMVS ECCHELLENSIS
Latinè vertit.
IO: ALFONSVS BORELLVS
Notis Illuſtrauit.

Figura 1: Primera página del *Libro de los lemas*.

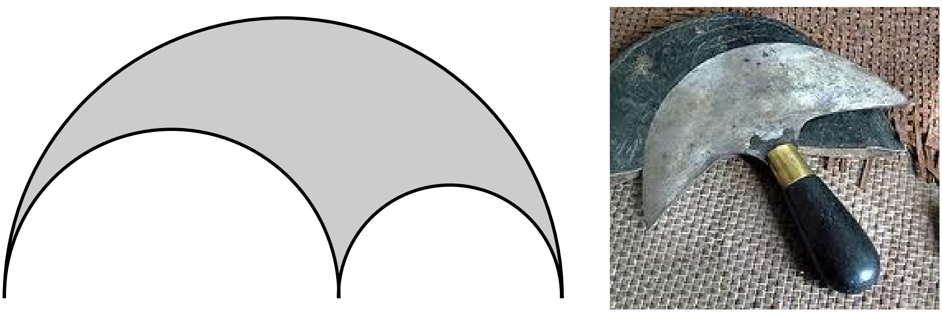


Figura 2: Un arbelo (izquierda) y una cuchilla de zapatero (derecha).

[4] y los trabajos citados en ellos), ya que ha llamado la atención de muchos matemáticos a lo largo de los siglos. El término griego «arbelos» significa cuchilla de zapatero y en la figura 2 puede apreciarse, efectivamente, la similitud entre la forma geométrica y la citada cuchilla. El término «salinon» usado en el texto latino parece ser una deformación de algún término griego sobre cuyo origen o significación hay divergencia entre diversos autores.

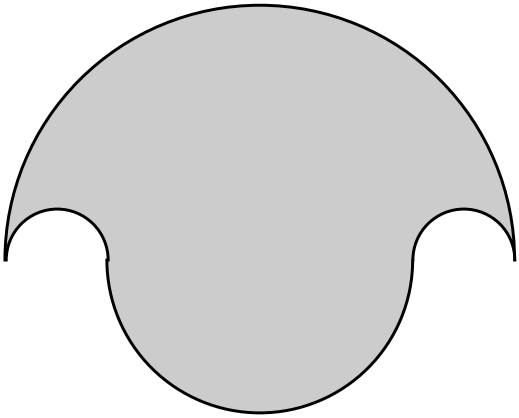


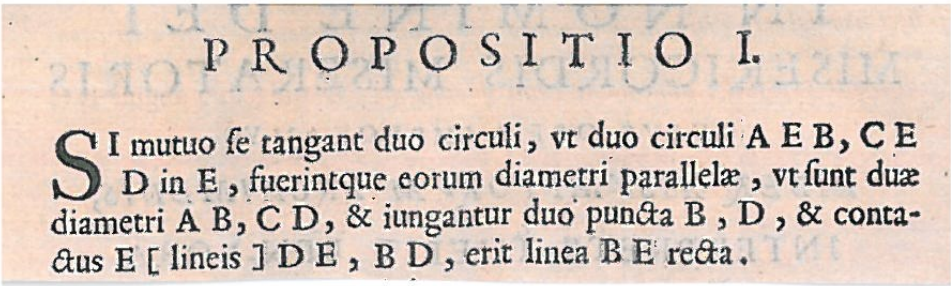
Figura 3: Un salino.

El objetivo de este trabajo es presentar una colección de demostraciones visuales de las proposiciones del *Libro de los lemas*, y en ningún caso se pretende hacer un análisis histórico o matemático del mismo. Dos demostraciones de esta naturaleza para las proposiciones IV y XIV (la determinación de las áreas del arbelo y del salino) se deben a R. Nelsen, véanse [6] y [7] para las publicaciones originales y [1] para una recopilación de ambas. Esas demostraciones aparecen reproducidas en este trabajo y, de algún modo, fueron las que me impulsaron a obtener, o realizar, una colección completa de pruebas de este tipo para las quince proposiciones del libro. En [2] pueden verse, además de las demostraciones citadas, dos pruebas alternativas de las proposiciones III y VIII.

Las demostraciones están compuestas, en su mayor parte, por varias imágenes y algún pequeño cálculo. Para la comprensión de las demostraciones únicamente son necesarios conocimientos elementales de geometría. Desafortunadamente no ha sido posible evitar esos cálculos. En algunos casos hemos incluido algunos lemas previos que no aparecen en el original pero que creemos que simplifican la visualización de las demostraciones. Varias de las demostraciones son propias pero otras, sin embargo, son reconstrucciones visuales de las que aparecen en el tratado de Heath [5]. En el caso de las proposiciones V y VI, las demostraciones incorporadas están tomadas de [4]. En cada proposición hemos incorporado, además, el texto latino de la traducción de Abraham Ecchellensis.

Finalmente me gustaría comentar que, aunque el conjunto de pruebas no sea absolutamente visual, puede servir para hacer más rápidamente accesible al lector actual el hermoso ramillete de proposiciones que componen el *Libro de los lemas*.

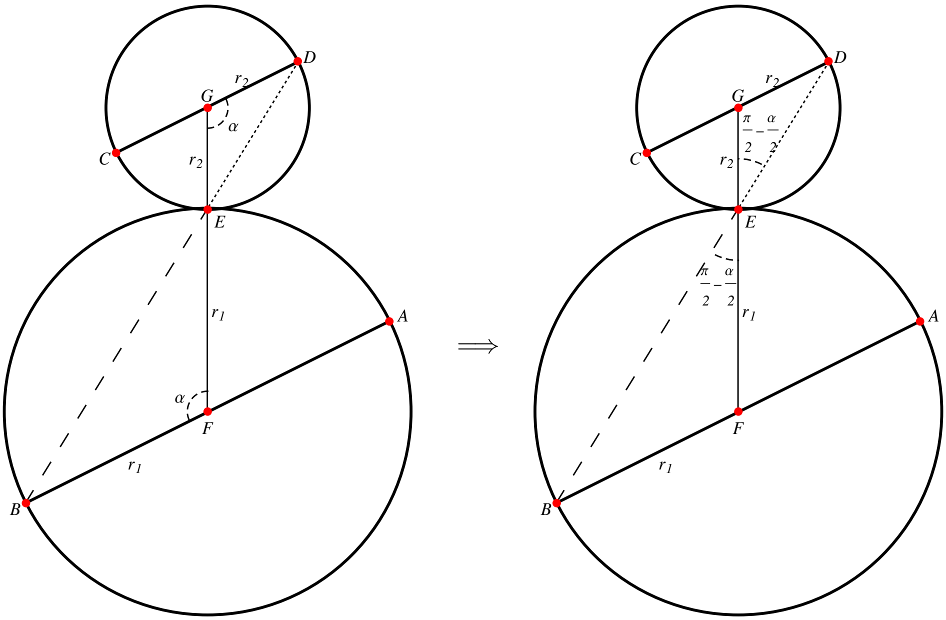
1. Proposición I


PROPOSITIO I.

SI mutuo ſe tangant duo circuli, vt duo circuli A E B, C E D in E, fuerintque eorum diametri parallelæ, vt ſunt duæ diametri A B, C D, & iungantur duo puncta B, D, & contactus E [lineis] D E, B D, erit linea B E recta.

Proposición 1. *Consideremos dos circunferencias de centros F y G tangentes en un punto E. Si AB y CD son dos diámetros paralelos de dichas circunferencias, entonces las rectas AE y BE pasan por los respectivos extremos del diámetro CD.*

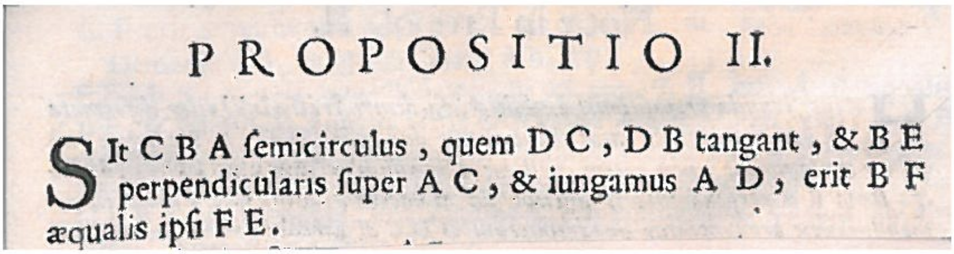
Demostración. Supongamos que las circunferencias dadas son tangentes exteriormente. Entonces



y B, E y D son puntos alineados. $\square$

Nota 1. En el caso de que las circunferencias de la proposición anterior sean tangentes interiormente, puede obtenerse una demostración mediante el mismo argumento pero la visualización, en ese caso, resulta más complicada. Cabe hacer notar que en las dos ediciones latinas la demostración se hace tomando este último caso y que en la edición de 1661 aparece un comentario respecto al caso de la tangencia exterior.

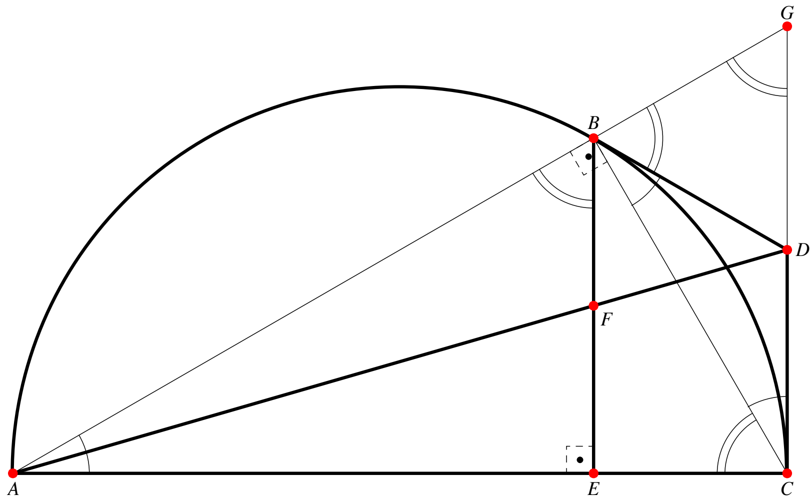
2. Proposición II


PROPOSITIO II.

SIt C B A ſemicirculus, quem D C, D B tangant, & B E perpendicularis ſuper A C, & iungamus A D, erit B F æqualis ipſi F E.

Proposición 2. *Sean A y C los extremos del diámetro de una semicircunferencia. Desde un punto D de la tangente en C trazamos la otra tangente DB a la semicircunferencia. Sea E el pie de la perpendicular desde el punto B al diámetro AC. Entonces la recta AD corta al segmento BE en su punto medio F.*

Demostración.

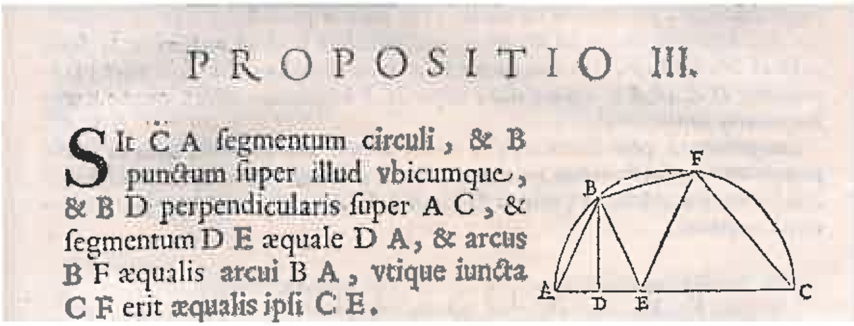


Entonces $GD = DB = DC$. Ahora bien, por el teorema de Tales,

$$\frac{BF}{GD} = \frac{AF}{AD} = \frac{FE}{DC},$$

luego $BF = FE$. □

3. Proposición III



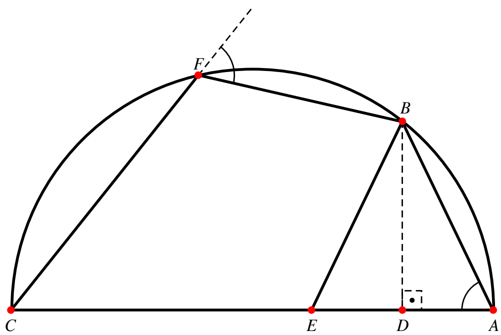
PROPOSITIO III.

SIt C A ſegmentum circuli, & B punctum ſuper illud vbicumque, & B D perpendicularis ſuper A C, & ſegmentum D E æquale D A, & arcus B F æqualis arcui B A, vtique iuncta C F erit æqualis ipſi C E.

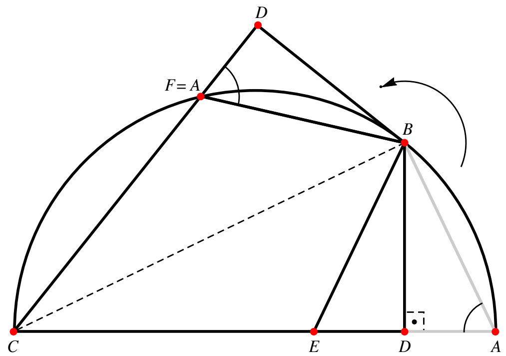
Proposición 3. *Sea B un punto de un arco cualquiera AC de circunferencia y sea D el pie de la perpendicular por el punto B a la cuerda AC. Sea E el punto de AC tal que $DE = DA$. Si BF es un arco sobre el arco AC igual a BA, entonces $CF = CE$.*

Demostración.

I. Por ser $ABFC$ un cuadrilátero inscrito en una semicircunferencia, la suma de sus ángulos opuestos es igual a π. Entonces



II. De esta forma



$$\Longrightarrow CF = CE.$$

□

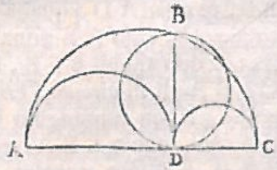
Nota 2. Debemos señalar que el arco AC de circunferencia que hemos tomado para realizar la demostración se corresponde con la semicircunferencia de diámetro AC. Así es como se hace en las dos versiones latinas y hemos mantenido el formato; sin embargo, la demostración funciona exactamente igual para cualquier otro arco de circunferencia.

El hecho de que los ángulos opuestos de una cuadrilátero inscrito en una circunferencia suman π puede probarse de manera elemental usando que un ángulo inscrito en una circunferencia mide la mitad que su ángulo central asociado. Esta propiedad es una caracterización de los mismos: un cuadrilátero es inscriptible en una circunferencia si y solo si la suma de sus ángulos opuestos es π. Este resultado será usado en la demostración del Lema 3.

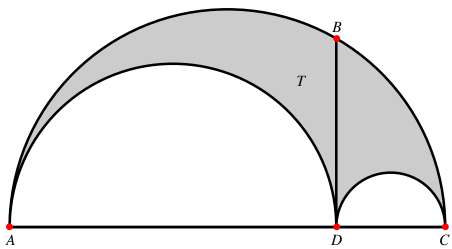
4. Proposición IV

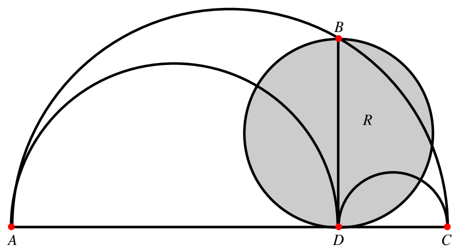
PROPOSITIO IV.

A B C ſemicirculus, & fiant ſuper A C diametrum duo ſemicirculi, quorum vnus A D, alter vero D C, & D B perpendicularis, vtique figura proueniens, quam vocat Archimedes ARBELON, eſt ſuperficies comprehenſa ab arcu ſemicirculi maioris, & duabus circumferentijs ſemicirculorum minorum, eſt æqualis circulo, cuius diameter eſt perpendicularis D B.

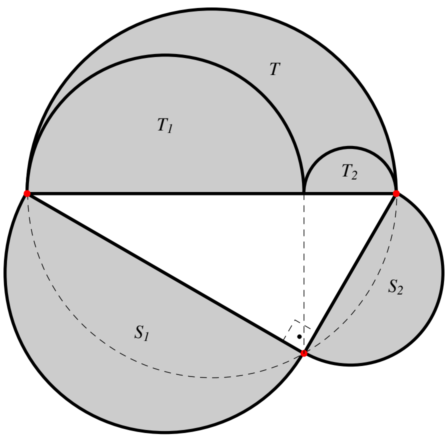


Proposición 4. *Sea AC el diámetro de una semicircunferencia, D un punto sobre él, y DB el segmento perpendicular al diámetro por el punto D cortando a la semicircunferencia en B. Consideremos dos semicircunferencias en el interior de la dada de diámetros AD y DC. Entonces el área de la región comprendida entre la semicircunferencia mayor y las dos menores, que Arquímedes denomina arbelo, es igual al área del círculo de diámetro DB. Es decir, $T = R$, donde T y R son las áreas de las regiones sombreadas en las siguientes figuras:*

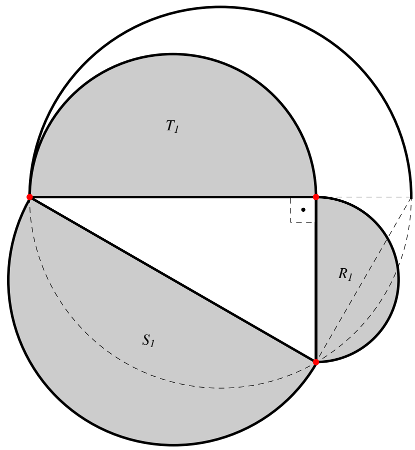




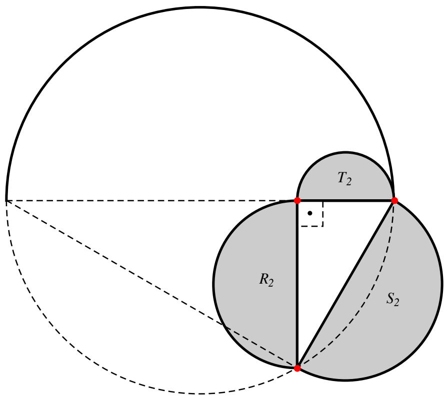
Demostración.



$$T + T_1 + T_2 = S_1 + S_2$$



$$S_1 = R_1 + T_1$$



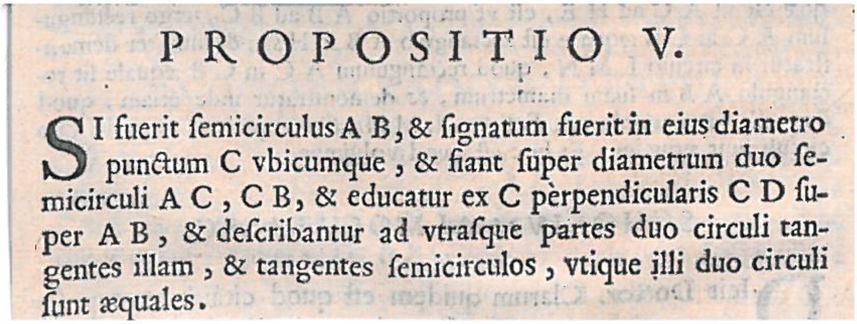
$$S_2 = R_2 + T_2$$

Entonces

$$T + T_1 + T_2 = R_1 + T_1 + R_2 + T_2$$

luego $T = R_1 + R_2 = R$. $\square$

5. Proposición V

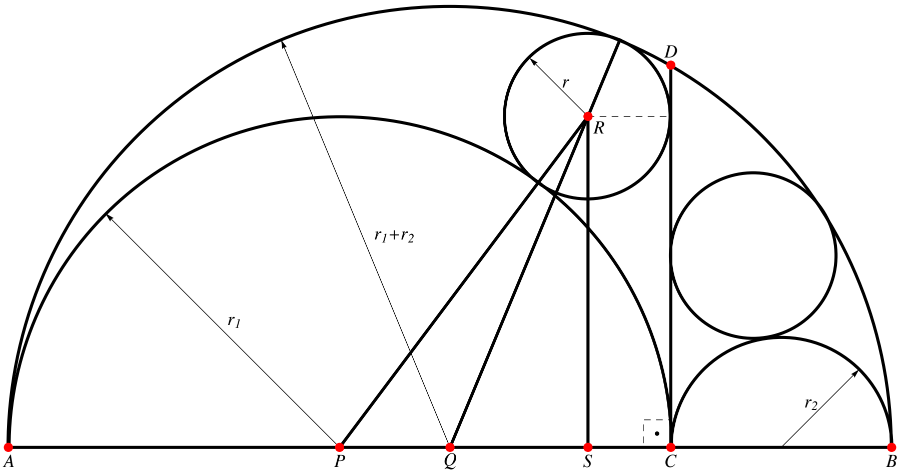


PROPOSITIO V.

SI fuerit ſemicirculus A B, & ſignatum fuerit in eius diametro punctum C vbicumque, & fiant ſuper diametrum duo ſemicirculi A C, C B, & educatur ex C pèrpendicularis C D ſuper A B, & deſcribantur ad vtraſque partes duo circuli tangentes illam, & tangentes ſemicirculos, vtique illi duo circuli ſunt æquales.

Proposición 5. *Sea AB el diámetro de una semicircunferencia, C un punto en él, y CD el segmento perpendicular al diámetro desde el punto C que corta a la semicircunferencia en D. Consideremos dos semicircunferencias en el interior de la dada de diámetros AC y CB. Las dos circunferencias que son tangentes a CD por uno y otro lado y a la vez tangentes cada una de ellas a dos de las semicircunferencias anteriores, son iguales.*

Demostración.



$$\begin{cases} QS^2 + SR^2 = RQ^2 \\ PS^2 + SR^2 = RP^2 \end{cases} \implies RQ^2 - QS^2 = RP^2 - PS^2$$

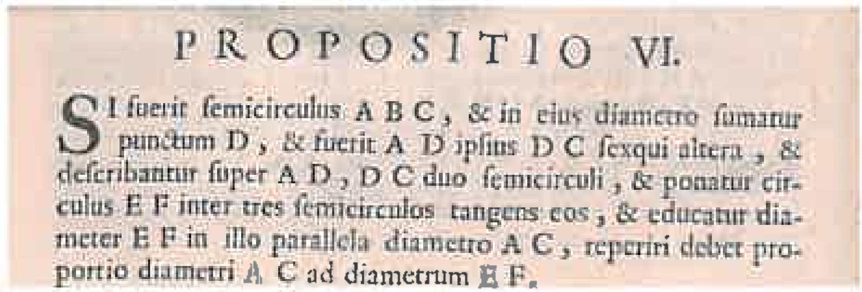
$$\implies (r_1 + r_2 - r)^2 - (r_1 - r_2 - r)^2 = (r_1 + r)^2 - (r_1 - r)^2$$

$$\implies r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2},$$

y lo mismo para la otra circunferencia, puesto que el papel de r_1 y r_2 es intercambiable en la expresión obtenida para r. □

Nota 3. Las dos circunferencias iguales que han aparecido en la proposición anterior se denominan círculos gemelos de Arquímedes.

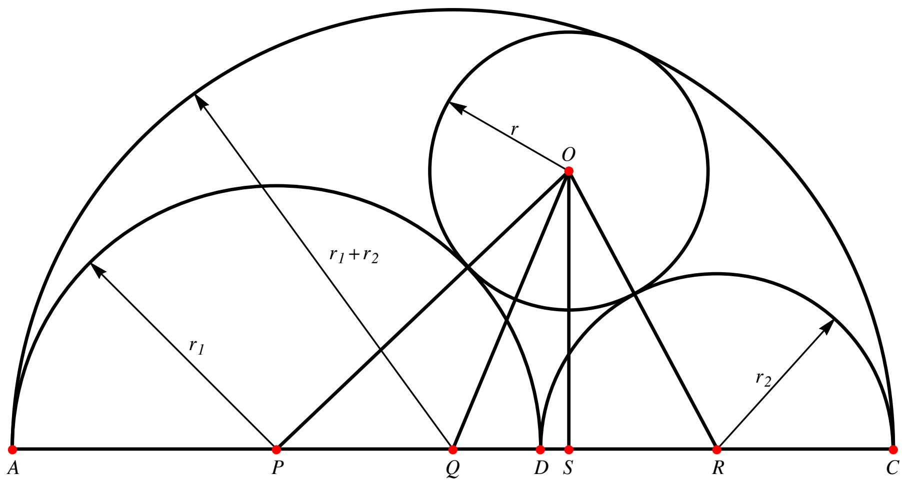
6. Proposición VI


PROPOSITIO VI.

SI fuerit ſemicirculus A B C, & in eius diametro ſumatur punctum D, & fuerit A D ipſius D C ſexqui altera, & deſcribantur ſuper A D, D C duo ſemicirculi, & ponatur circulus E F inter tres ſemicirculos tangens eos, & educatur diameter E F in illo parallela diametro A C, reperiri debet proportio diametri A C ad diametrum E F.

Proposición 6. *Sea AC el diámetro de una semicircunferencia, D un punto en él tal que $AD = \lambda \cdot DC$. Consideremos dos semicircunferencias en el interior de la dada de diámetros AD y DC. Si la circunferencia tangente a las tres semicircunferencias tiene diámetro d, entonces $AC = d\left(\lambda + 1 + \frac{1}{\lambda}\right)$.*

Demostración.



Si denotamos $QS = x$,

$$\begin{cases} QS^2 + SO^2 = OQ^2 \\ PS^2 + SO^2 = OP^2 \\ RS^2 + SO^2 = OR^2 \end{cases} \implies \begin{cases} PS^2 - QS^2 = OP^2 - OQ^2 \\ RS^2 - QS^2 = OR^2 - OQ^2 \end{cases}$$

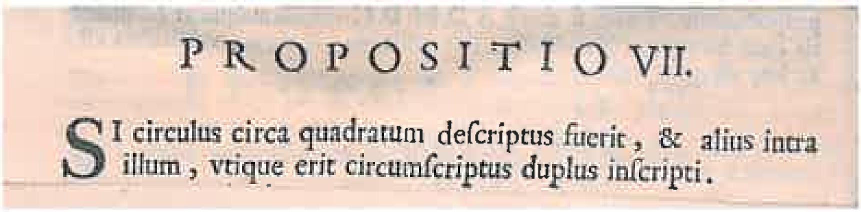
$$\Longrightarrow \begin{cases} (r_2+x)^2 - x^2 = (r_1+r)^2 - (r_1+r_2-r)^2 \\ (r_1-x)^2 - x^2 = (r_2+r)^2 - (r_1+r_2-r)^2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow r = \frac{r_1 r_2 (r_1+r_2)}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}$$

$$\Longrightarrow AC = d\left(\lambda + 1 + \frac{1}{\lambda}\right). \qquad \square$$

Nota 4. En el enunciado del texto original de la proposición anterior se toma el valor $\lambda = 3/2$ (relación «sexquialtera»), aunque en la demostración se dice que vale para cualquier proporción λ. Además, el enunciado está redactado como un problema, ya que plantea que se debe encontrar («reperiri debet») la relación entre el diámetro AC y d.

7. Proposición VII

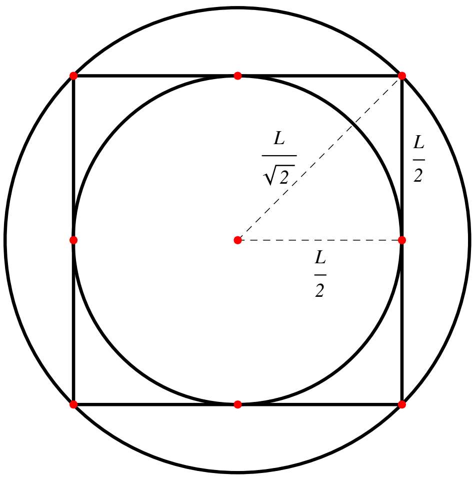


PROPOSITIO VII.

SI circulus circa quadratum deſcriptus fuerit, & alius intra illum, vtique erit circumſcriptus duplus inſcripti.

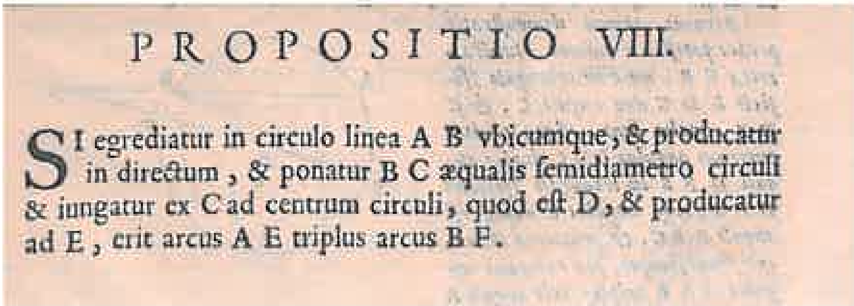
Proposición 7. *El área del círculo circunscrito a un cuadrado es el doble del área del área del círculo inscrito.*

Demostración.



$$\text{Área círculo circunscrito} = \pi\left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)^2$$
$$= 2\pi\left(\frac{L}{2}\right)^2 = 2\cdot\text{Área círculo inscrito.} \qquad \square$$

8. Proposición VIII

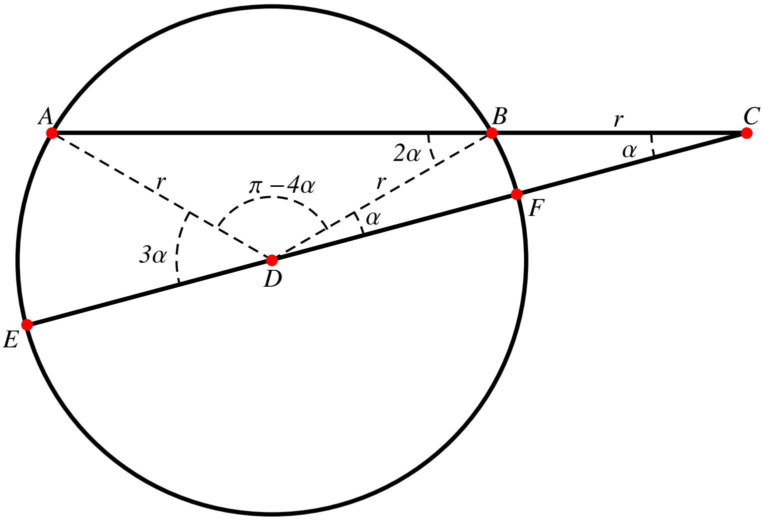


PROPOSITIO VIII.

SI egrediatur in circulo linea A B vbicumque, & producatur in directum, & ponatur B C æqualis ſemidiametro circuli & iungatur ex C ad centrum circuli, quod eſt D, & producatur ad E, erit arcus A E triplus arcus B F.

Proposición 8. *Sea AB una cuerda cualquiera de una circunferencia de centro D. Prolongamos la cuerda AB hasta el punto C tal que BC sea igual al radio de la circunferencia. Si la recta que pasa por C y D corta a la circunferencia en los puntos F y E, siendo E el punto más alejado de C, entonces el arco AE es tres veces el arco BF.*

Demostración.

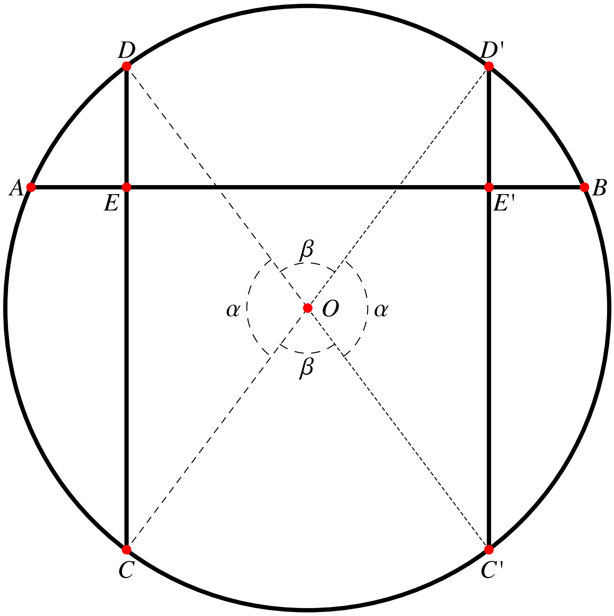


$\square$

9. Proposición IX

Lema 1. *En una circunferencia de centro O consideramos dos cuerdas perpendiculares, AB y CD, que se cortan en un punto E. Trazamos ahora una cuerda $C'D'$ paralela a CD que corta a AB en un punto E' tal que $AE = E'B$. Entonces $DE = D'E'$ y los puntos C, O y D' están alineados.*

Demostración. La igualdad $DE = D'E'$ es clara por la simetría. Por otra parte,



$$2\alpha + 2\beta = 2\pi \implies \alpha + \beta = \pi \implies C, O \text{ y } D' \text{ están alineados.} \qquad \square$$

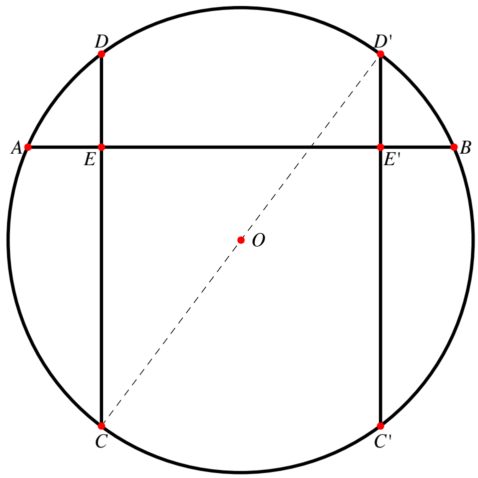
PROPOSITIO IX.

SI mutuo ſe ſecuerint in circulo duæ lineæ A B, C D, (ſed non in centro) ad angulos rectos, vtique duo arcus A D, C B ſunt æquales duobus arcubus A C, D B.

Proposición 9. *Sean AB y CD dos cuerdas perpendiculares de una circunferencia. Entonces*

$$\text{arco}\, AD + \text{arco}\, CB = \text{arco}\, AC + \text{arco}\, DB.$$

Demostración. Si construimos la cuerda $C'D'$ como en el Lema 1, tendremos

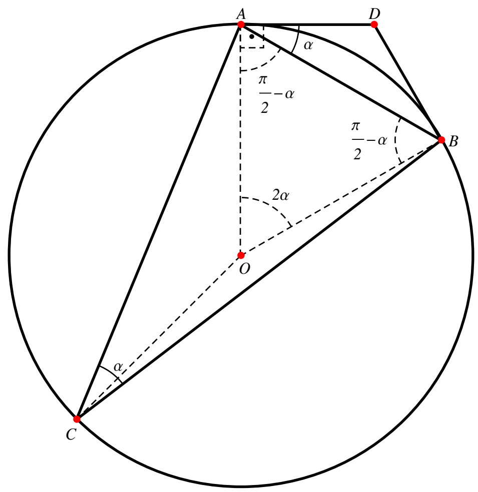


$$\begin{aligned} \text{arco}\, AD = \text{arco}\, D'B \implies \text{arco}\, AD + \text{arco}\, CB &= \frac{1}{2} \cdot \text{longitud de la circunferencia} \\ &= \text{arco}\, AC + \text{arco}\, DB. \end{aligned}$$ □

10. Proposición X

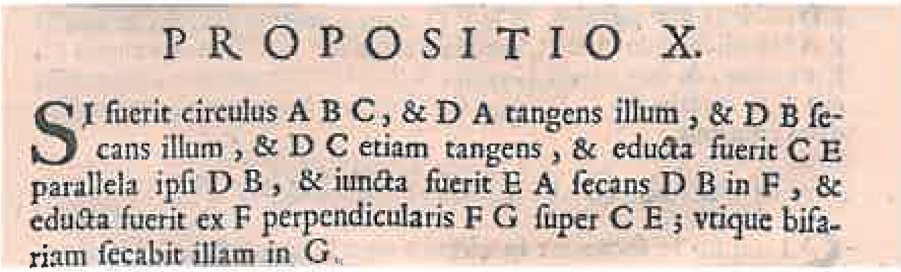
Lema 2. *Sean A y B dos puntos de una circunferencia. Si AD y BD son dos segmentos tangentes a la circunferencia desde un punto exterior D y C es otro punto cualquiera de la circunferencia, entonces $\angle ACB = \angle DAB$.*

Demostración.



□

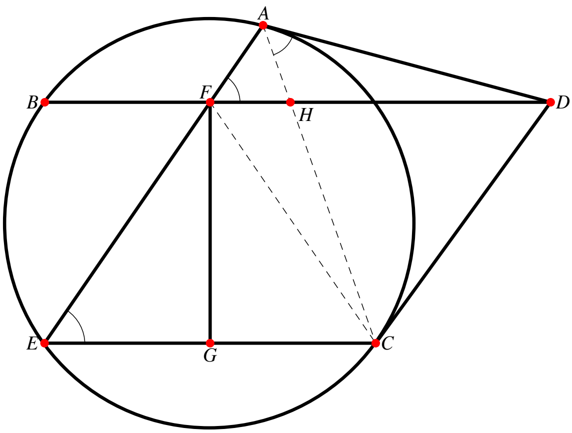
Nota 5. El ángulo $\angle DAB$ del lema anterior se denomina semiinscrito y la igualdad con el ángulo $\angle ACB$ se conoce como teorema del ángulo semiinscrito.


PROPOSITIO X.

SI fuerit circulus A B C, & D A tangens illum, & D B ſecans illum, & D C etiam tangens, & educta fuerit C E parallela ipſi D B, & iuncta fuerit E A ſecans D B in F, & educta fuerit ex F perpendicularis F G ſuper C E; vtique biſariam ſecabit illam in G.

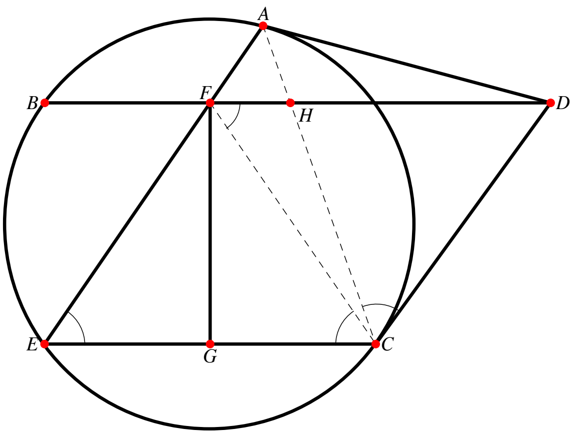
Proposición 10. *Sean A, B y C tres puntos de una circunferencia. Sean DA y DC los segmentos tangentes a la circunferencia en A y C trazados desde un punto exterior D. Sean EC la cuerda paralela al segmento BD trazada por el punto C y F el punto de intersección de los segmentos AE y BD. Entonces la perpendicular a EC por el punto F corta al segmento EC en su punto medio G.*

Demostración. Por el Lema 2,



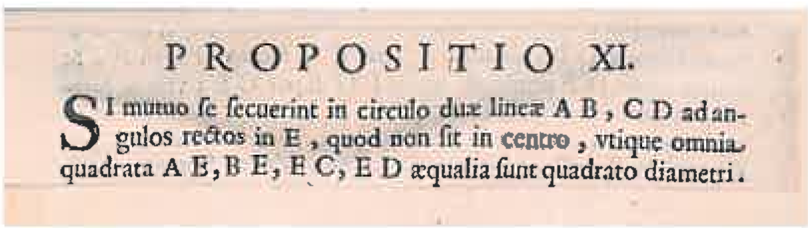
$$\Longrightarrow \triangle AHD \text{ y } \triangle AFD \text{ semejantes} \Longrightarrow HD \cdot FD = AD^2 = CD^2$$
$$\Longrightarrow \triangle HCD \text{ y } \triangle FCD \text{ semejantes.}$$

Luego se tiene que



y $EG = GC$. □

11. Proposición XI



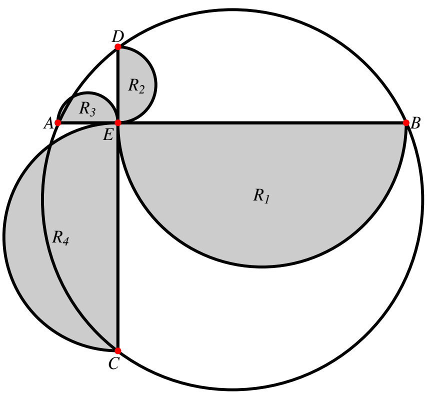
PROPOSITIO XI.

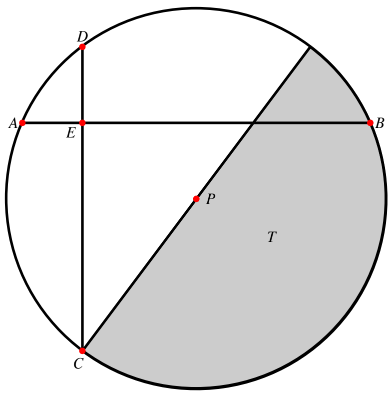
SI mutuo ſe ſecuerint in circulo duæ lineæ A B, C D ad angulos rectos in E, quod non ſit in centro, vtique omnia quadrata A E, B E, E C, E D æqualia ſunt quadrato diametri.

Proposición 11. *Si dos cuerdas perpendiculares de una circunferencia de diámetro d se cortan en un punto E, entonces*

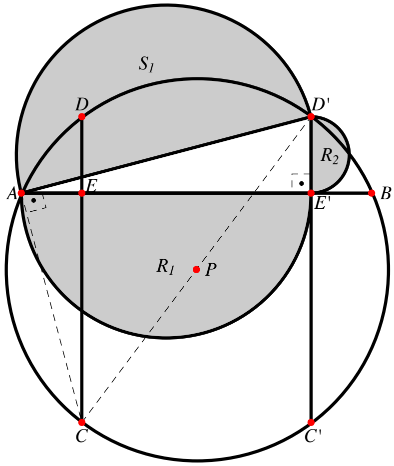
$$AE^2 + BE^2 + EC^2 + ED^2 = d^2.$$

Es decir, con la notación de las figuras siguientes, $R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = T$:

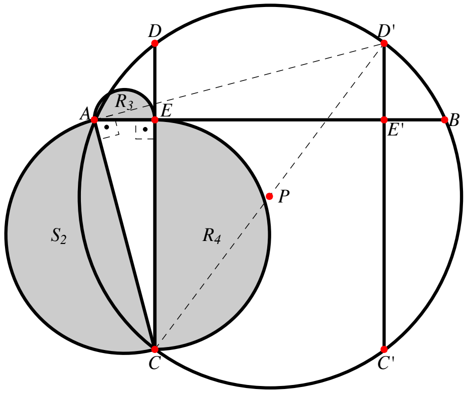




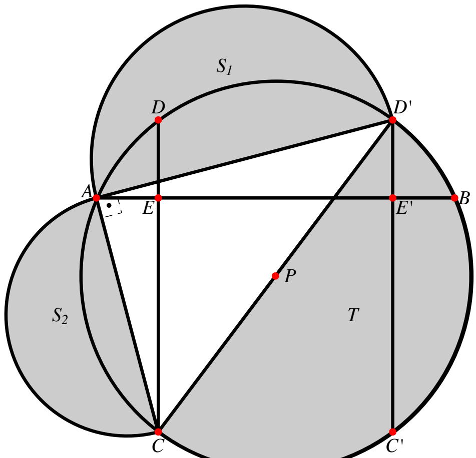
Demostración. Construimos la cuerda $C'D'$ como en Lema 1.



$R_1 + R_2 = S_1$



$R_3 + R_4 = S_2$

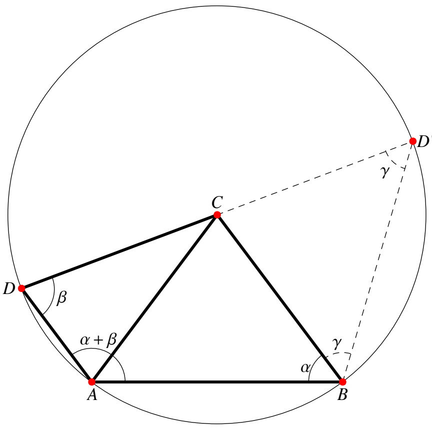


$S_1 + S_2 = T$ □

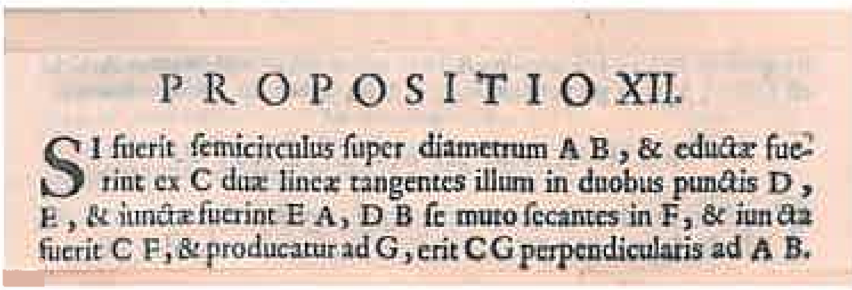
12. Proposición XII

Lema 3. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero tal que $BC = CD$ y $\angle DAB = \angle ABC + \angle CDA$. Entonces $CA = CD$.*

Demostración. Sea D' el simétrico de D respecto de C; entonces el cuadrilátero $ABD'D$ es inscriptible en un círculo de centro C y radio CD, al ser iguales las sumas de ángulos opuestos.



□



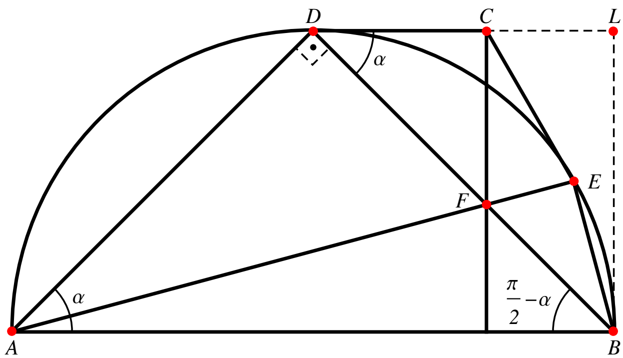
PROPOSITIO XII.

SI fuerit ſemicirculus ſuper diametrum A B, & eductæ fuerint ex C duæ lineæ tangentes illum in duobus punctis D, E, & iunctæ fuerint E A, D B ſe muto ſecantes in F, & iuncta fuerit C F, & producatur ad G, erit C G perpendicularis ad A B.

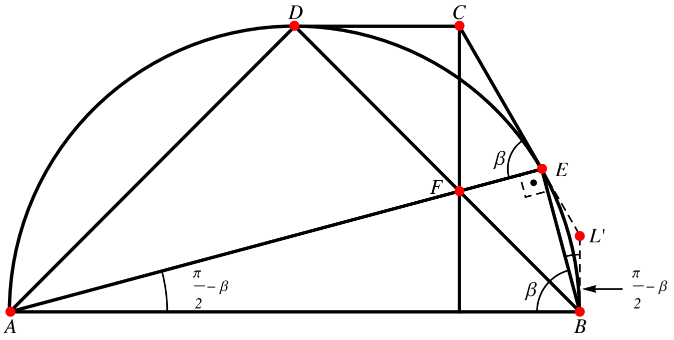
Proposición 12. *Sean AB el diámetro de una semicircunferencia, y CD y CE dos segmentos tangentes a ella en los puntos D y E trazados desde un punto exterior C. Si los segmentos EA y DB se cortan en un punto F, entonces la recta CF es perpendicular a AB.*

Demostración.

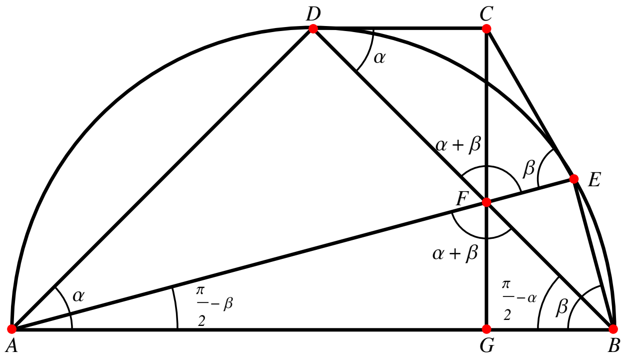
I. Sean L y L', respectivamente, la intersección de las rectas DC y CE con la tangente a la circunferencia en el punto B. Por el Lema 2,



y

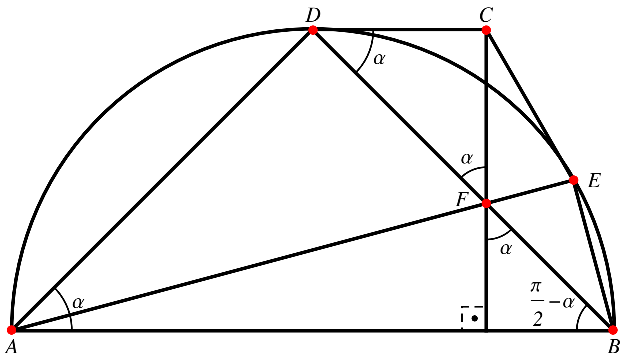


Entonces



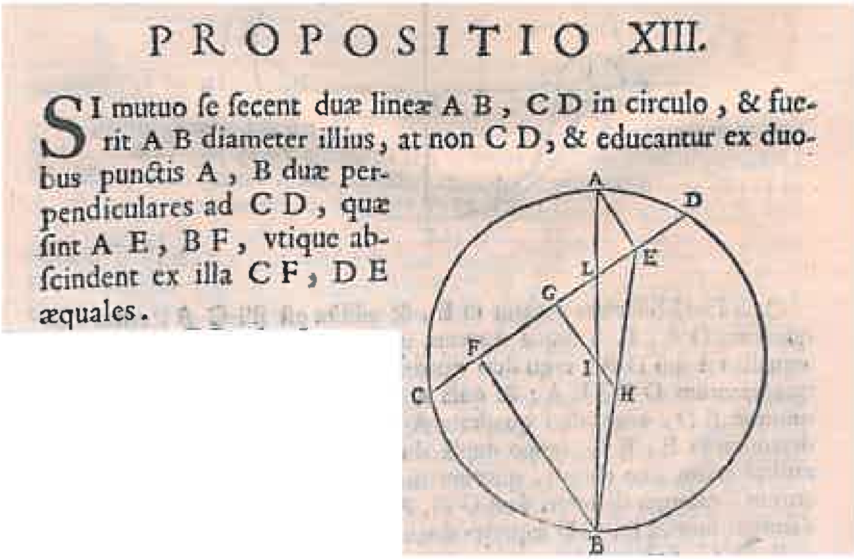
y el Lema 3, aplicado al cuadrilátero $FECD$, implica que $CF = CD$.

II. Finalmente



$\square$

13. Proposición XIII

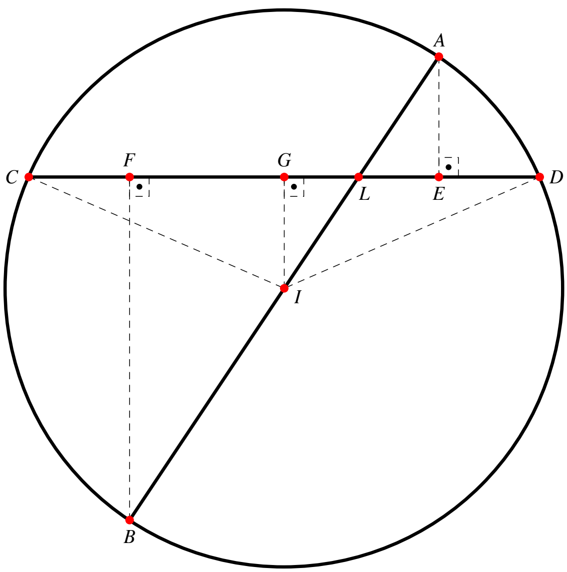


PROPOSITIO XIII.

SI mutuo ſe ſecent duæ lineæ A B, C D in circulo, & fuerit A B diameter illius, at non C D, & educantur ex duobus punctis A, B duæ perpendiculares ad C D, quæ ſint A E, B F, vtique abſcindent ex illa C F, D E æquales.

Proposición 13. *Supongamos que el diámetro AB de una circunferencia se corta con una cuerda cualquiera CD. Si E y F son los pies de las perpendiculares a CD desde los puntos A y B, respectivamente, entonces $CF = DE$.*

Demostración. Sea I el centro de la circunferencia, G el punto medio de CD y L la intersección de AB y CD.



Como $CG = GD$, se tiene $CF = DE \iff FG = EG$. Por el teorema de Tales,

$$\frac{EG}{IA} = \frac{GL}{IL} = \frac{FG}{IB}$$

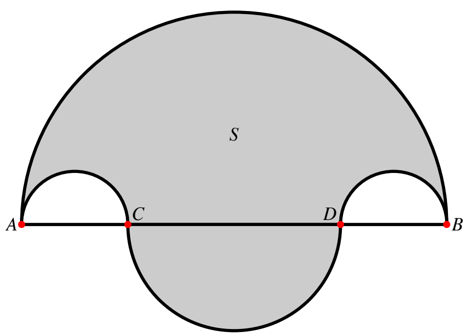
y, puesto que $IA = IB$, se concluye que $FG = EG$. □

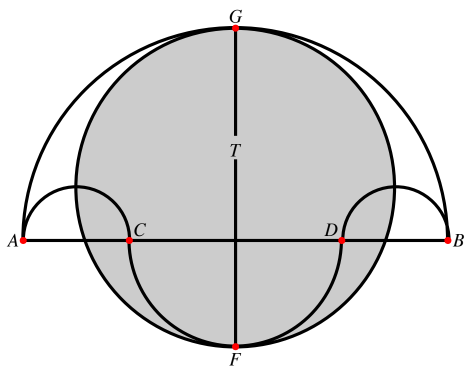
14. Proposición XIV

PROPOSITIO XIV.

SI fuerit A B ſemicirculus, & ex eius diametro A B diſſectæ ſint A C, B D æquales, & efficiantur ſuper lineas A C, C D, D B ſemicirculi; & ſit centrum duorum ſemicirculorum A B, C D punctum E, & ſit E F perpendicularis ſuper A B, & producatur ad G: vtique circulus, cuius diameter eſt F G æqualis eſt ſuperficiei contentæ à ſemicirculo maiori, & à duobus ſemicirculis qui ſunt intra illum, & à ſemicirculo medio qui eſt extra illum, & eſt figura, quam vocat Archimedes Salinon.

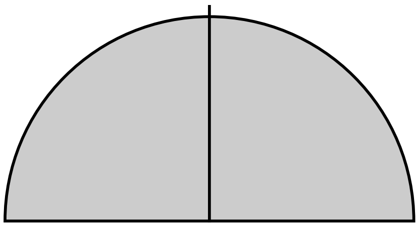
Proposición 14. *Sean AB el diámetro de una semicircunferencia y C y D dos puntos sobre él de tal forma que $AC = DB$, con C más cercano a A y D más cercano a B. Con diámetros AC y DB construimos dos semicircunferencias interiores a la semicircunferencia inicial y con diámetro CD construimos otra semicircunferencia exterior a la inicial. Sea FG el segmento perpendicular a AB por su punto medio que corta a la semicircunferencia de diámetro AB en G y a la de diámetro CD en F. Entonces el área de la región limitada por las cuatro semicircunferencias, que Arquímedes denomina salino, es igual al área del círculo de diámetro FG. Es decir, $S = T$, donde S y T son las áreas de las regiones sombreadas en las siguientes figuras:*



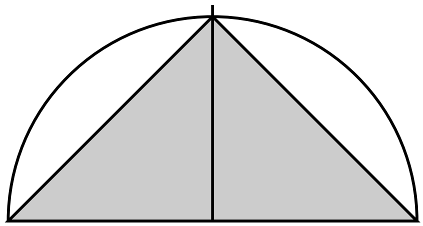


DEMOSTRACIÓN.

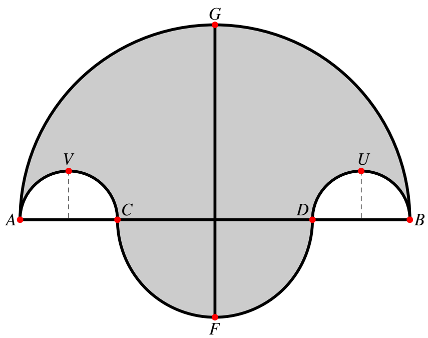
I.



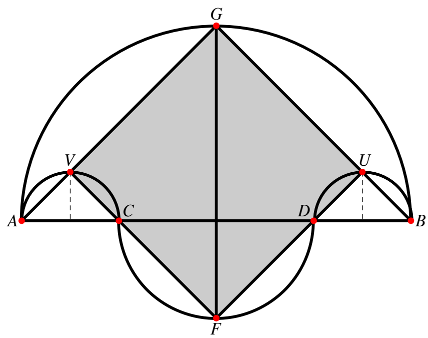
$$= \frac{\pi}{2} \times$$



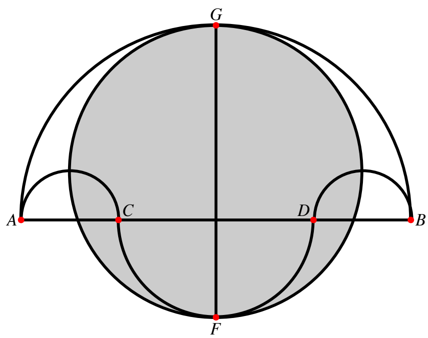
II.



$$= \frac{\pi}{2} \times$$

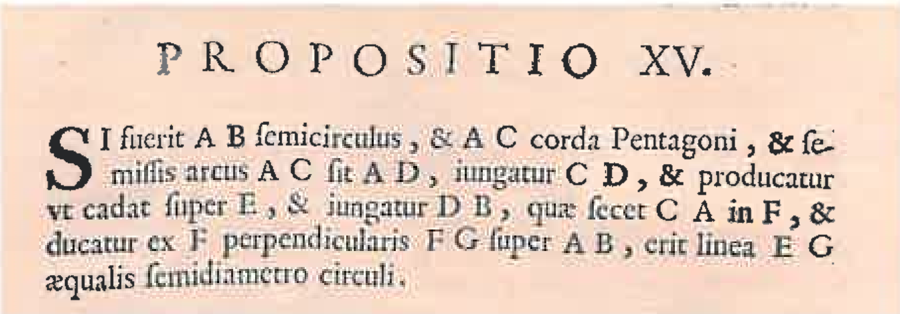


$$=$$



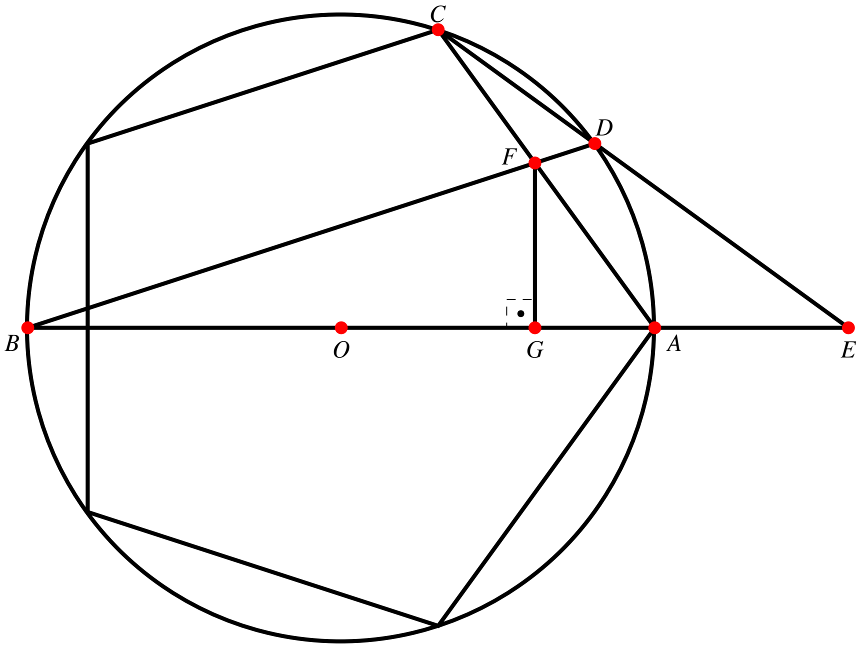
Para poder establecer la última igualdad debe cumplirse que $\{F, D, U\}$, $\{F, C, V\}$, $\{G, U, B\}$ y $\{G, V, A\}$ sean ternas de puntos alineados. Pero esto se deduce de la Proposición 1. $\square$

15. Proposición XV


PROPOSITIO XV.

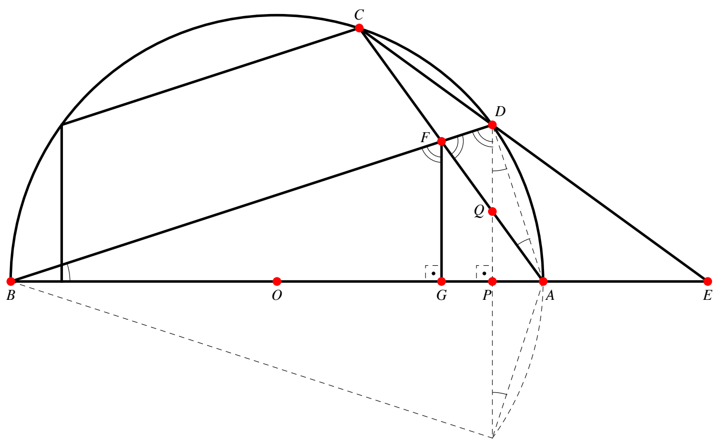
SI fuerit A B ſemicirculus, & A C corda Pentagoni, & ſemiſſis arcus A C ſit A D, iungatur C D, & producatur vt cadat ſuper E, & iungatur D B, quæ ſecet C A in F, & ducatur ex F perpendicularis F G ſuper A B, erit linea E G æqualis ſemidiametro circuli.

Proposición 15. *Sean AB el diámetro de una semicircunferencia, AC el lado de un pentágono regular inscrito en la circunferencia y D el punto medio del arco AC. La prolongación del segmento CD corta a AB en el punto E y el segmento AC corta a DB en el punto F. Si G es el pie de la perpendicular a AB desde el punto F, entonces GE es igual al radio de la semicircunferencia.*



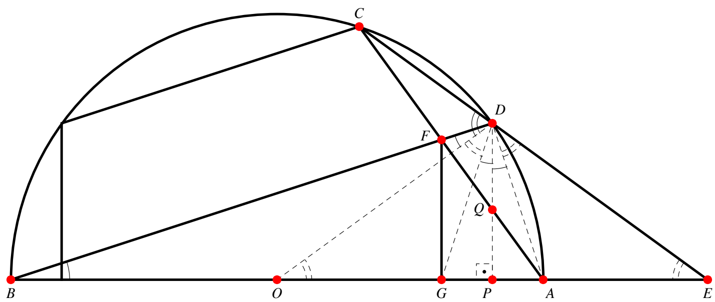
Demostración.

I.



$$\Longrightarrow FQ = QD = QA \Longrightarrow GP = PA.$$

II. En la siguiente figura, los ángulos indicados con trazo continuo simple miden $\frac{\pi}{10}$, el de doble trazo continuo $\frac{2\pi}{5}$ y los de doble trazo discontinuo $\frac{\pi}{5}$.



$$\Longrightarrow \ OG = GD = AE \ \Longrightarrow \ OA = GE. \qquad \square$$

Referencias

[1] C. Alsina y R. B. Nelsen, *Charming proofs: A journey into elegant mathematics*, Mathematical Association of America, 2010.

[2] C. Alsina y R. B. Nelsen, *Icons of mathematics: An exploration of twenty key images*, Mathematical Association of America, 2011.

[3] H. P. Boas, Reflections on arbelos, *Amer. Math. Monthly* **113** (2006), 236–249.

[4] C. W. Dodge, T. Schoch, P. Y. Woo y P. Yiu, Those ubiquitous Archimedean circles, *Math. Mag.* **72** (1999), 202–213.

[5] T. L. Heath, *The works of Archimedes*, Cambridge University Press, 1897.

[6] R. B. Nelsen, Proof without words: The area of a salinon, *Math. Mag.* **75** (2002), 130.

[7] R. B. Nelsen, Proof without words: The area of an arbelos, *Math. Mag.* **75** (2002), 144.

Óscar Ciaurri Ramírez, Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, 26004 Logroño

Correo electrónico: `oscar.ciaurri@unirioja.es`