Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri y José Luis Díaz Barrero

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 31 de marzo de 2015.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 253. *Propuesto por Ovidiu Furdui, Universidad Técnica de Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

a) Probar que

$$\int_0^1 \left(\log\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\right)^2 dx = \frac{(\log 2)^2}{4} - \frac{\log 2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + G,$$

donde G denota la *constante de Catalan* definida por

$$G = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} = 0.9159655941\ldots.$$

b) ⋆ Sea $k \geq 3$ un número entero. Evaluar, en forma cerrada, la integral

$$\int_0^1 \left(\log\left(\sqrt[k]{1+x}-\sqrt[k]{1-x}\right)\right)^2 dx.$$

PROBLEMA 254. *Propuesto por Panagiote Ligouras, "Leonardo da Vinci" High School, Noci, Italia.*

Sean a, b, c, d, e y f números reales positivos tales que $a+b+c=d+e+f$. Probar que

$$ad(a+4d)+be(b+4e)+cf(c+4f)\geq 16abc-def.$$

PROBLEMA 255. *Propuesto por Anastasios Kotronis, Atenas, Grecia.*

Sea $p\in\mathbb{N}$ un número impar y $q,\ell\in\mathbb{Z}$ con p y q primos entre sí. Evaluar

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{2k\ell\pi q}{p}\right)\cot\left(\frac{k\pi q}{p}\right).$$

PROBLEMA 256. *Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.*

Sea $ABCD$ un cuadrilátero tal que los puntos B y D son simétricos respecto a la recta AC. Se consideran dos puntos distintos E y F tales que $ADCE$ es un paralelogramo y F es el segundo punto de intersección de la recta DE con la circunferencia circunscrita al triángulo ACE. Si la circunferencia que pasa por B, D y F corta al segmento AC en un punto G, demostrar que $\angle ABG=\angle CBG$.

PROBLEMA 257. *Propuesto por César Beade Franco, I. E. S. Fernando Blanco, Cee, La Coruña.*

Sean α y β, respectivamente, la elipse y la hipérbola de focos A y C que pasan por un punto P. Sea B un punto variable de estas cónicas. Si I denota el incentro del triángulo ABC e I_A, I_B e I_C denotan, respectivamente, los exincentros opuestos a los vértices A, B y C, se pide:

a) Demostrar que si B recorre α, tanto los exincentros I_A como los I_C están alineados.

b) Demostrar que si B recorre β, tanto los incentros I como los exincentros I_B están alineados.

c) Obtener los lugares geométricos descritos por los puntos anteriores.

PROBLEMA 258. *Propuesto por D. M. Bătineţu-Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucarest, Rumanía, y Neculai Stanciu, "George Emil Palade" Secondary School, Buzău, Rumanía.*

En un triángulo ABC, sean m_a, m_b y m_c las longitudes de las medianas, h_a, h_b y h_c las longitudes de las alturas, y r_a, r_b y r_c sus exinradios. Probar que

$$a^2\left(\frac{1}{m_a^2}+\frac{1}{h_bh_c}+\frac{1}{r_br_c}\right)+b^2\left(\frac{1}{m_b^2}+\frac{1}{h_ch_a}+\frac{1}{r_cr_a}\right)+c^2\left(\frac{1}{m_c^2}+\frac{1}{h_ah_b}+\frac{1}{r_ar_b}\right)\geq 12.$$

Soluciones

Problema 229. *Propuesto por Paolo Perfetti, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Tor Vergata, Roma.*

Calcular
$$\int_0^{\pi/2} \left(\log\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)\right)^3 d\theta.$$

Solución enviada por G. C. Greubel, Newport News, Virginia, Estados Unidos.

Si denotamos por I la integral a evaluar, usando el cambio de variable $\sin^2\theta = t$ es obvio que
$$I = \frac{-1}{2}\int_0^1 t^{1/2}(1-t)^{1/2}(\log(1-t))^3\, dt.$$
Luego, si $B(x,y)$ denota la función Beta de Euler, se tiene
$$I = \frac{-1}{2}\left.\frac{\partial^3 B(x,y)}{\partial y^3}\right|_{x=y=1/2}.$$
De la relación
$$\frac{\partial B(x,y)}{\partial y} = B(x,y)(\psi(y)-\psi(x+y)),$$
donde ψ es la función digamma
$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k-1}\right),$$
se deduce que
$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 B(x,y)}{\partial y^3} &= B(x,y)(\psi''(y)-\psi''(x+y)\\ &\qquad + 3(\psi(y)-\psi(x+y))(\psi'(y)-\psi'(x+y)) + (\psi(y)-\psi(x+y))^3).\end{aligned}$$
Así,
$$\begin{aligned}I &= \frac{-\pi}{2}\Big((\psi''(1/2)-\psi''(1))\\ &\qquad + 3(\psi(1/2)-\psi(1))(\psi'(1/2)-\psi'(1)) + (\psi(1/2)-\psi(1))^3\Big)\\ &= \pi\big(6\zeta(3) + 4(\log 2)^3 + \pi^2\log 2\big).\end{aligned}$$

Nota. Los valores de la función digamma y de sus derivadas que se usan en la solución seleccionada se pueden obtener de manera elemental a partir de la expresión para dicha función como serie.

También resuelto por L. Glasser, A. Kotronis, M. Omarjee, B. Salgueiro (cuatro soluciones) y el proponente.

NOTA. M. Omarjee en su solución nos informa de que la integral está evaluada en el artículo N. Nielsen, *Sur la transformation d'une intégrale définie*, Oversigt Danske Vid. Selsk. Forh. (1896), 335–347. Asimismo, B. Salgueiro basa dos de sus soluciones en los artículos M. G. Beumer, *Some special integrals*, Amer. Math. Monthly **68** (1961), 645–647, y K. S. Kölbig, *On the integral* $\int_0^{\pi/2} \log^n \cos x \log^p \sin x\, dx$, Math. Comp. **40** (1983), 565–570. En ambos trabajos se dan expresiones para la integral $\int_0^{\pi/2} (\log \cos x)^n\, dx$ de las que se deduce fácilmente la solución.

PROBLEMA 230. *Propuesto por Panagiote Ligouras, "Leonardo da Vinci" High School, Noci, Italia.*

En un triángulo ABC, sean m_a, m_b y m_c las longitudes de las medianas, h_a, h_b y h_c las longitudes de las alturas, ℓ_a, ℓ_b y ℓ_c las longitudes de las bisectrices y R el circunradio. Probar que

$$\frac{m_a^2}{h_a}\sqrt{\frac{m_a^2-h_a^2}{\ell_a^2-h_a^2}} + \frac{m_b^2}{h_b}\sqrt{\frac{m_b^2-h_b^2}{\ell_b^2-h_b^2}} + \frac{m_c^2}{h_c}\sqrt{\frac{m_c^2-h_c^2}{\ell_c^2-h_c^2}} \geq 6R.$$

Solución enviada por Andrea Fanchini, Cantú, Italia.

Denotemos con a, b y c las longitudes de los lados del triángulo, con s su semiperímetro y con S su área. Es bien sabido que

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}, \qquad l_a = \frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \qquad \text{y} \qquad h_a = \frac{2S}{a}.$$

Entonces, teniendo en cuenta la fórmula de Herón para el área de un triángulo, se obtiene

$$\frac{l_a^2}{h_a} = \frac{2Sabc}{(b+c)^2(s-b)(s-c)}, \qquad m_a^2 - h_a^2 = \frac{(b^2-c^2)^2}{4a^2}$$

y

$$l_a^2 - h_a^2 = \frac{4s^2(s-a)^2(b-c)^2}{a^2(b+c)^2}$$

e, inmediatamente,

$$\frac{l_a^2}{h_a}\sqrt{\frac{m_a^2-h_a^2}{l_a^2-h_a^2}} = \frac{Sabc}{2s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{abc}{2S} = 2R.$$

Luego

$$\frac{m_a^2}{h_a}\sqrt{\frac{m_a^2-h_a^2}{\ell_a^2-h_a^2}} + \frac{m_b^2}{h_b}\sqrt{\frac{m_b^2-h_b^2}{\ell_b^2-h_b^2}} + \frac{m_c^2}{h_c}\sqrt{\frac{m_c^2-h_c^2}{\ell_c^2-h_c^2}} = 2R\left(\frac{m_a^2}{l_a^2}+\frac{m_b^2}{l_b^2}+\frac{m_c^2}{l_c^2}\right) \geq 6R,$$

ya que $m_a \geq l_a$. Además, resulta elemental observar que la igualdad se alcanza si y solo si el triángulo es equilátero.

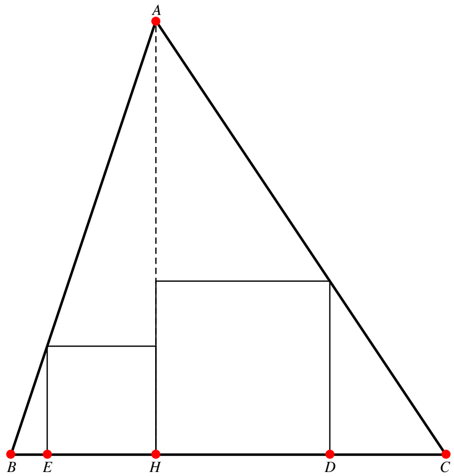

Figura 1: Esquema para la solución del Problema 231.

También resuelto por D. Lasaosa, J. Nadal, P. Perfetti, B. Salgueiro, V. Vicario y el proponente.

Problema 231. *Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez.*

Sea ABC un triángulo con ángulos agudos en los vértices B y C, y sea AH, con el punto H en el lado BC, la altura correspondiente al vértice A. Se inscribe, en cada uno de los triángulos rectángulos AHB y AHC, un cuadrado con dos de sus lados contenidos en AH y BC. Sean así HE y HD (donde E y D son puntos del segmento BC) los respectivos lados de estos "cuadrados armónicos", y sea $d = AH - (EH + HD)$. Probar que $d \geq 0 \iff A \leq \pi/2$.

Solución enviada por Daniel Văcaru, Piteşti, Rumanía.

Por semejanza de triángulos (véase la figura 1) se tiene

$$\frac{HE}{AH} = \frac{BH - HE}{BH} \qquad \text{y} \qquad \frac{HD}{CH} = \frac{CH - HD}{CH},$$

luego

$$HE = \frac{AH \cdot BH}{BH + AH} \qquad \text{y} \qquad HD = \frac{AH \cdot CH}{CH + AH}. \tag{1}$$

De este modo,

$$\begin{aligned} d &= AH\left(1 - \frac{BH}{AH + BH} - \frac{CH}{AH + CH}\right) = AH\left(1 - \frac{1}{\frac{AH}{BH} + 1} - \frac{1}{\frac{AH}{CH} + 1}\right) \\ &= AH\left(1 - \frac{1}{\tan B + 1} - \frac{1}{\tan C + 1}\right) = AH\frac{\tan B \tan C - 1}{(\tan B + 1)(\tan C + 1)}. \end{aligned}$$

Por tanto, $d \geq 0$ si y solo si $\tan B \tan C - 1 \geq 0$, lo que equivale a

$$\tan(\pi - A) = \tan(B + C) = \frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C} \leq 0.$$

Así,

$$d \geq 0 \iff \tan A \geq 0 \iff A \leq \frac{\pi}{2}.$$

También resuelto por R. de la Cruz, A. Fanchini, D. Lasaosa, J. Nadal, B. Salgueiro, V. Vicario y el proponente.

Nota. Las expresiones para las longitudes de los lados de los cuadrados en (1) son las que originan la denominación de "cuadrados armónicos".

Problema 232. *Propuesto por Yagub N. Aliyev, Qafqaz University, Khyrdalan, Azerbaiyán.*

Sean A, B y C tres puntos no alineados en el plano tales que $\angle ABC = \alpha > \pi/2$. Sean D un punto en el segmento BC y AE el diámetro de la circunferencia que pasa por los puntos A, D y C. Probar que

$$|AE| \cdot \operatorname{sen} \alpha \geq |BD| + |BC| - 2 \cos \alpha \sqrt{|BD| \cdot |BC|}.$$

Solución enviada por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona.

Sean $|BD| = u$, $|BC| = u+2\delta$ y $|AB| = a$. Consideramos un sistema de coordenadas cartesianas tal que $B = (0,0)$, $C = (u+2\delta, 0)$, $D = (u, 0)$ y $A = (a \cos \alpha, a \operatorname{sen} \alpha)$ (véase la figura 2). La ecuación de la circunferencia que pasa por A, C y D es claramente de la forma $(x - u - \delta)^2 + (y - h)^2 = R^2$ y debe satisfacerse que

$$\delta^2 + h^2 = R^2 \qquad \text{y} \qquad a^2 + (u + \delta)^2 - 2a(u + \delta) \cos \alpha + h^2 - 2ah \operatorname{sen} \alpha = R^2,$$

siendo $2R = |AE|$. Despejando h se obtiene

$$h = \frac{a^2 + u(u + 2\delta) - 2a(u + \delta) \cos \alpha}{2a \operatorname{sen} \alpha},$$

de manera que, al aplicar la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica de los números a^2 y $u(u + 2\delta)$, se llega a

$$h \geq \frac{\sqrt{u(u + 2\delta)} - (u + \delta) \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

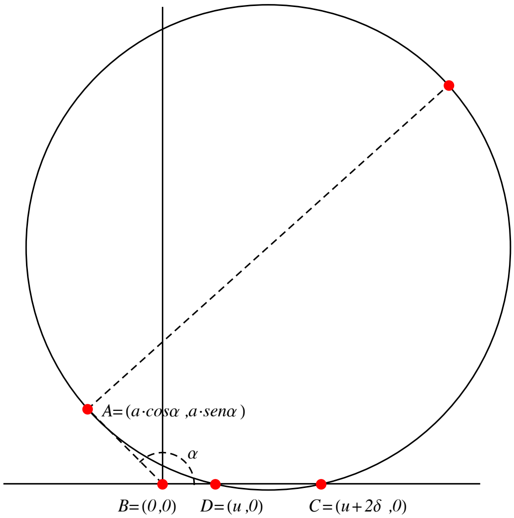

Figura 2: Esquema para la solución del Problema 232.

Notar que la igualdad se alcanza si y solo si $a = \sqrt{u(u+2\delta)}$, lo que equivale a que $|AB|^2 = |BC| \cdot |BD|$; es decir, si y solo si AB es la recta tangente a la circunferencia circunscrita al triángulo ACD en el punto A. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} |AE| \operatorname{sen}\alpha &= 2R \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{4h^2 \operatorname{sen}^2\alpha + 4\delta^2 \operatorname{sen}^2\alpha} \\ &\geq \sqrt{4(u+\delta)^2 + 4u(u+2\delta)\cos^2\alpha - 8(u+\delta)\sqrt{u(u+2\delta)}\cos\alpha} \\ &= 2(u+\delta) - 2\sqrt{u(u+2\delta)}\cos\alpha \\ &= |BC| + |BD| - 2\sqrt{|BC| \cdot |BD|}\cos\alpha. \end{aligned}$$

También resuelto por J. Nadal y el proponente.

Problema 233. *Propuesto por Manuel Bello Hernández, Universidad de La Rioja, Logroño.*

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua cuyas derivadas parciales existen para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Si para cada $j = 1, \ldots, n$ existe una constante L_j tal que

$$\left\| \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right\| \leq L_j \|f(x)\|, \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n,$$

y la desigualdad anterior es estricta en algún punto de $\mathbb{R}^n$ para un cierto j, probar que, entonces, f no se anula en $\mathbb{R}^n$.

Solución enviada por Jorge Mozo Fernández, Universidad de Valladolid, Valladolid.

Probaremos el siguiente resultado, más fuerte que el propuesto en el enunciado:

> Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una función continua, cuyas derivadas parciales existen y verifican $\left\| \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right\| \leq L_j \|f(x)\|$, entonces, o bien f no se anula nunca, o bien es idénticamente nula.

Si probamos esto, y existiese un punto x_0 para el que $\left\| \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \right\| < L_j \|f(x_0)\|$, necesariamente $f(x_0) \neq 0$, y por tanto, f no se anularía nunca, lo que resuelve el problema.

Probemos ahora el enunciado alternativo. En primer lugar observemos que si el resultado es cierto para $m = 1$, es cierto para cualquier m. En efecto, si $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, tomemos $F(x) = f_1(x)^2 + \cdots + f_m(x)^2$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) \right\| = 2 \left\| \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) f_i(x) \right\| \leq 2L_j \|f(x)\|^2 = 2L_j \|F(x)\|.$$

Si f se anula en un punto, F también, con lo que F sería idénticamente nula y, en consecuencia, lo mismo ocurriría con f.

Supongamos, pues, $m = 1$. Si $n = 1$ y f se anula en un punto podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $f(0) = 0$. Para $x > 0$ se tendrá

$$|f(x)| = \left| \int_0^x f'(t)\, dt \right| \leq L_1 \int_0^x |f(t)|\, dt. \tag{1}$$

Consideremos la función $g(x) = \int_0^x |f(t)|\, dt$, que es derivable y $g'(x) = |f(x)|$. De la desigualdad $g'(x) \leq L_1 g(x)$, por el lema de Gronwall se tiene que $g(x) \leq g(0)e^{L_1 x} = 0$. Pero $g(x) \geq 0$ por construcción, con lo que $g(x) \equiv 0$. Como f es continua, esto implica que $f(x) \equiv 0$. En el caso $x < 0$ se procede de manera análoga.

Sea ahora $n > 1$ y $f(0) = 0$. Consideremos la función

$$g_i(x) = f(0, \ldots, 0, x, 0, \ldots, 0),$$

con una x en la i-ésima coordenada. Usando el caso $n = 1$, por la hipótesis de existencia de derivadas parciales de f, llegamos a que $g_i(x)$ es idénticamente nula. Así, $f(x)$ se anula sobre todas las rectas paralelas a los ejes coordenados que pasen por un punto x_0 con $f(x_0) = 0$. A partir de un punto podemos alcanzar otro cualquiera siguiendo segmentos incluidos en rectas como las antes mencionadas, de donde concluimos que la anulación de f en un punto es suficiente para garantizar su anulación en todas partes.

También resuelto por D. Lasaosa y el proponente.

Nota. Cabe señalar que en la igualdad de la fórmula (1) de la solución seleccionada (en la solución de D. Lasaosa se utiliza una identidad similar) se está dando por supuesto que la función f' es integrable y que, por tanto, es posible aplicar el teorema fundamental del cálculo. En general, la derivada de una función no es una función integrable en el sentido Lebesgue; este hecho motiva que se introduzcan otras definiciones de integral que consiguen que el teorema fundamental del cálculo se verifique con la nueva definición (véase R. G. Bartle, *Return to the Riemann integral*, Amer. Math. Monthly **103** (1996), 625–632). Bajo las condiciones del problema, $|f'(x)| \leq L_1|f(x)|$, f' es medible-Borel y f es integrable en el sentido Lebesgue en cada intervalo acotado, luego f' es integrable en el sentido Lebesgue en cada intervalo acotado. Por tanto, se verifica el teorema fundamental del cálculo y la identidad en (1) es válida.

Problema 234. *Propuesto por D. M. Bătineţu-Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucarest, Rumanía, y N. Stanciu, "George Emil Palade" Secondary School, Buzău, Rumanía.*

Sean $f : (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ tal que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = c \neq 0$ y $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales positivos tal que $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = a \neq 0$. Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{f(a_1)\cdot f(a_2)\cdots f(a_{n+1})}} - \frac{n^2}{\sqrt[n]{f(a_1)\cdot f(a_2)\cdots f(a_n)}} \right).$$

Solución enviada por Anastasios Kotronis, Atenas, Grecia.

En primer lugar debemos observar que, por el criterio de Stolz,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = a. \tag{1}$$

Además, puesto que $a \neq 0$ y a_n es una sucesión positiva, se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)}{a_n} = c. \tag{2}$$

Ahora, si $p_n = \prod_{k=1}^n f(a_k)$ y $B_n = \frac{\sqrt[n]{p_n}}{n^2}$, podemos escribir

$$\begin{aligned} &\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{f(a_n)\cdot f(a_2)\cdots f(a_{n+1})}} - \frac{n^2}{\sqrt[n]{f(a_n)\cdot f(a_2)\cdots f(a_n)}} \\ &\qquad = \frac{1}{nB_n} \frac{\left(\frac{B_n}{B_{n+1}} - 1\right)}{\log \frac{B_n}{B_{n+1}}} \log\left(\frac{B_n}{B_{n+1}}\right)^n. \end{aligned} \tag{3}$$

Y tengamos en cuenta que si c_n es una sucesión de términos positivos tal que $\lim_{n\to\infty} c_{n+1}/c_n = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = L$. Así, usando (1) y (2), se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} nB_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{p_n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{p_n}{n^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{p_{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{p_n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_{n+1})}{a_{n+1}} \frac{a_{n+1}}{n+1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{ca}{e}
\end{aligned}$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{B_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{nB_n}{(n+1)B_{n+1}} \frac{n+1}{n} = 1,$$

y

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(\frac{B_n}{B_{n+1}}\right)^n &= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} \frac{p_n}{p_{n+1}} \sqrt[n+1]{p_{n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} \frac{a_{n+1}}{f(a_{n+1})} \frac{n+1}{a_{n+1}} (n+1)B_{n+1} = e.
\end{aligned}$$

Entonces, por (3), a partir de los límites anteriores y de la equivalencia $\log x \sim x-1$ para $x \to 1$, llegamos a que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{f(a_1)\cdot f(a_2)\cdots f(a_{n+1})}} - \frac{n^2}{\sqrt[n]{f(a_1)\cdot f(a_2)\cdots f(a_n)}} \right) = \frac{e}{ca} \log e = \frac{e}{ca}.$$

También resuelto por D. Lasaosa, J. Nadal, M. Omarjee, P. Perfetti, D. Văcaru y los proponentes.