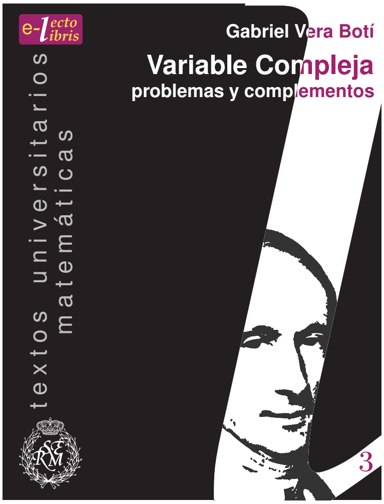
Reseña de libros

«Variable Compleja, problemas y complementos», de Gabriel Vera Botí



Título: Variable Compleja, problemas y complementos
Autores: Gabriel Vera Botí
Editorial: Ediciones Electolibris, coedición con la RSME
Fecha de publicación: 2013
Páginas: xii+470
ISBN: 978-84-940688-3-6

Cuando un estudiante del Grado en Matemáticas se enfrenta por primera vez a curso de variable compleja normalmente precisa de un proceso de adaptación, motivado por el hecho de tener que trabajar con los números complejos, dejando atrás el uso exclusivo de una o varias variables reales, que es propio de los primeros cursos de cálculo y fundamentos de análisis. Es por ello que, además de buenas explicaciones en clase, el alumno debe disponer de manuales adecuados que le ayuden a introducirse en la materia cuanto antes. Es bien conocido que en análisis complejo se cuenta con excelentes textos clásicos; pero no deja de llamar la atención que continúen publicándose obras nuevas sobre esta materia, lo que pone de manifiesto el interés constante y la atracción que despierta en la comunidad matemática.

La obra del Prof. Gabriel Vera Botí constituye un libro de problemas y complementos sobre el análisis complejo que presenta un matiz diferenciador que, a mi juicio, lo hace más interesante; a saber, el enfoque dado por el autor persigue que se aprenda variable compleja combinando, adecuada y ordenadamente, los aspectos teóricos con las herramientas y estrategias para resolver los problemas. Cada capítulo comienza con una exposición de los conceptos y resultados que se utilizan en las soluciones de los problemas que lo conforman. Los ejercicios resueltos se presentan por bloques, siguiendo a los recursos teóricos que, de forma natural, se precisan para resolverlos. El libro se complementa con una guía, titulada *Cómo hacerlo*, en la que, de modo transversal, se señalan ejercicios que ilustran cómo abordar tareas típicas de la materia.

El capítulo primero está dedicado al cuerpo de los números complejos, incluyendo ejercicios de carácter teórico que marcan las bases para una correcta manipulación de series infinitas. Cuenta con apartados que no se encuentran en otros textos, como el dedicado a la sumación de series dobles.

En el capítulo segundo, después de exponer algunas cuestiones topológicas como la compacidad y conexión, el autor pasa a ocuparse de aspectos geométricos del plano complejo. Un grupo de ejercicios pone de relieve cómo el uso de las coordenadas complejas conjugadas permite resolver de manera fácil problemas de geometría analítica. Se completa el capítulo introduciendo las transformaciones de Möbius y aportando algunos ejercicios que involucran a la esfera de Riemann.

La primera parte del capítulo tercero está conformada por las funciones elementales complejas. Al considerar argumentos, logaritmos, exponenciales e inversas de funciones elementales surgen las funciones multiformes. Varios interesantes ejercicios se ocupan de determinar las ramas de este tipo de funciones utilizando técnicas de continuidad y conexidad. Se introducen los conceptos de derivada compleja en un punto y de función holomorfa en un abierto. Mención especial se presta a las ecuaciones de Cauchy-Riemann y a las transformaciones conformes, con lo que se da una interpretación geométrica de la derivada.

El capítulo cuarto se ocupa de las funciones definidas mediante series de potencias o series de Laurent. Colocando este tema aquí, el autor persigue que se puedan adquirir las técnicas propias de estos desarrollos. Los primeros ejercicios se centran en la convergencia uniforme de series funcionales y series de potencias, para proseguir con la obtención de desarrollos en serie (de potencias o de Laurent) de funciones concretas. Con la noción de radio de convergencia y las propiedades generales de convergencia de series de potencias como únicas herramientas, en una sección se estudian funciones definidas por series de potencias. El capítulo concluye con unos complementos sobre funciones analíticas en los que, entre otras cuestiones, se plantean demostraciones de algunos resultados acerca de este tipo de funciones.

Los ejercicios genuinos sobre funciones holomorfas aparecen en el capítulo quinto, que se basa en una versión local del teorema de Cauchy. Tras unos ejercicios iniciales relativos al cálculo de integrales sobre caminos y utilizando desarrollos de Laurent, se incluye un bloque en el que desempeña un papel fundamental el hecho de que las funciones holomorfas tengan primitiva. Las soluciones de los ejercicios propuestos en el siguiente bloque se basan en la fórmula integral de Cauchy y su principal consecuencia: toda función holomorfa es analítica en cada disco contenido en su dominio y admite un desarrollo en serie de potencias cuyos coeficientes se pueden determinar usando la expresión de Cauchy para las derivadas de orden superior. No faltan los ejercicios en los que intervengan las desigualdades de Cauchy o los que resulten de aplicar el teorema de Liouville.

El capítulo sexto se ocupa del comportamiento de una función holomorfa cerca de una singularidad aislada. En un bloque se agrupan ejercicios enfocados a clasificar las singularidades y a las técnicas para calcular los correspondientes residuos. Otro bloque se configura para recoger los resultados más útiles para detectar singularidades esenciales. Como material complementario se incluyen ejercicios sobre funciones meromorfas y su representación por desarrollos de Mittag-Leffler.

Los resultados teóricos recordados en el comienzo de capítulo séptimo se refieren al concepto de índice de un ciclo respecto de un punto, que es necesario para abordar la versión global del teorema de Cauchy, en sus versiones homóloga y homotópica. A partir de éstos se llega al teorema de los residuos, al principio del argumento y al teorema de Rouché. En lo que se refiere a los ejercicios, se pone de manifiesto cómo el índice de un camino cerrado es una eficaz herramienta para estudiar la existencia de primitivas, logaritmos y raíces de funciones holomorfas concretas. A un bloque dedicado a ejercicios sobre la versión general del teorema de Cauchy, le sigue otro en el que se recogen diversas aplicaciones del teorema de los residuos. Los últimos paquetes de ejercicios se dedican a la utilización del principio del argumento y a encontrar el número de raíces de una ecuación empleando el teorema de Rouché.

Diversos métodos para el cálculo de integrales reales impropias aplicando el teorema de los residuos se reúnen en el capítulo octavo, el cual también contiene, en su última parte, ejercicios sobre métodos de sumación de series.

En el capítulo noveno se estudian propiedades geométricas de las funciones holomorfas consideradas como transformaciones del plano complejo. Uno de los teoremas básicos de este estudio es el del módulo máximo, del que se deduce, entre otros resultados, el lema de Schwarz, el cual, a su vez, da lugar a múltiples aplicaciones. Entre ellas señalamos la que permite dar una representación explícita de los automorfismos analíticos sobre el disco unidad, objetos que desempeñan un papel fundamental en muchas parcelas del análisis complejo, como, por ejemplo, cuando se estudian las métricas pseudohiperbólica e hiperbólica en el disco unidad.

Además de la edición impresa, el libro cuenta con una versión electrónica en la que, como material adicional, también se pueden encontrar ejercicios sobre funciones armónicas, factorización de funciones, representación de funciones clásicas y familias normales, y que queda abierta a futuras ampliaciones. En mi opinión, Gabriel Vera Botí ha hecho un trabajo minucioso, ordenando y seleccionando de una manera cuidadosa el material de este libro, que estoy seguro será de mucha utilidad para estudiantes y profesores.

Fernando Pérez-González, Dpto. de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna
Correo electrónico: fernando.perez.gonzalez@ull.es