

---

---

## MATEMÁTICAS EN LAS AULAS DE SECUNDARIA

Sección a cargo de

**Inmaculada Fuentes Gil**

---

---

### Sona: una herramienta didáctica, un algoritmo y un corolario

por

**Manuel García Piqueras**

#### INTRODUCCIÓN

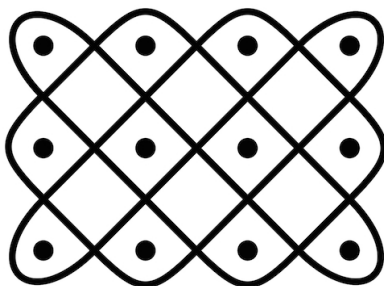
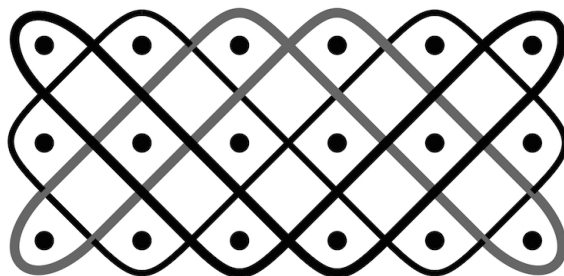
Los Chokwe son una tribu que vive en el suroeste de África, en una región repartida entre Angola, Zaire y Namibia. Estas tribus africanas tienen tradiciones cuyo origen se pierde en el principio de los tiempos, entre las que se encuentran los ritos de paso de edad. En dichas ceremonias el aspirante adquiere nuevos deberes y derechos dentro de la comunidad, pero para ello debe demostrar que es capaz de realizar ciertos dibujos geométricos denominados *sona* (se dice *lusona* en singular), y que pueden llegar a ser bastante complicados. De hecho hay personas que se dedican profesionalmente a esta actividad: los *akwa kuta sona*, es decir, *aquellos que saben dibujar*. Aparte de transmitir este conocimiento a sus descendientes varones, estos expertos eran al mismo tiempo cuentacuentos que usaban los dibujos en la arena como ilustraciones de proverbios, fábulas y acertijos.

Esta tradición Chokwe ha sido recogida, ampliada y divulgada desde un punto de vista matemático en buena parte por Paulus Gerdes (por ejemplo, en [4] y [5]).

Hay catalogados cientos de *sona* diferentes ([1], [3], [4], [5], etc.), aunque muchos se han perdido para siempre, entre otros motivos, debido al tráfico de esclavos que asoló el continente africano durante siglos. Dentro de ese catálogo documentado de *sona* podemos encontrar distintos tipos. Nosotros trabajaremos con una clase especial que llamaremos *mesa de billar*. Las Figuras 1 y 2 son ejemplos de este tipo, a partir del cual pueden generarse variantes fácilmente.

#### 1. LOS SONA COMO HERRAMIENTA DIDÁCTICA

Los *sona* tipo *mesa de billar* se realizan siguiendo las siguientes pautas (en las Figuras 3 y 4 se puede ver un ejemplo de este proceso):

Figura 1: Lusonca  $3 \times 4$ .Figura 2: Lusonca  $3 \times 6$ .

- Consideramos un conjunto de puntos distribuidos rectangularmente en filas y columnas, de manera que la distancia vertical u horizontal entre puntos adyacentes sea siempre la misma. A esta distribución la llamaremos *plantilla de  $m$  filas y  $n$  columnas*.
- Rodeamos la plantilla mediante un rectángulo de modo que la distancia, vertical u horizontal, de dicho rectángulo a un punto cualquiera externo de la plantilla, sea la mitad de la distancia entre puntos adyacentes. Nos referiremos a este rectángulo mediante *rectángulo rebote* o simplemente *caja*.
- A partir de un punto en la base del rectángulo rebote (por ejemplo) que esté situado justo debajo de un punto de la plantilla, trazamos una línea con un ángulo de  $45^\circ$  respecto de la horizontal. Dicha línea *rebotará* cuando llegue a otro lado del rectángulo rebote y proseguirá su recorrido. Esta línea imitaría la *trayectoria* que seguiría una bola de billar. Llamaremos *puntos rebote* a los puntos de la caja donde rebotan las trayectorias.
- El paso anterior se repite sucesivamente hasta que todos los puntos rebote estén incluidos en una trayectoria. Habrá ocasiones en que será necesaria una única trayectoria, mientras que en otras serán necesarias varias trayectorias.

Los sona tipo mesa de billar se denotan mediante  $m \times n$ , donde  $m$  = número de filas y  $n$  = número de columnas de la plantilla dada. Una vez que tenemos definidas

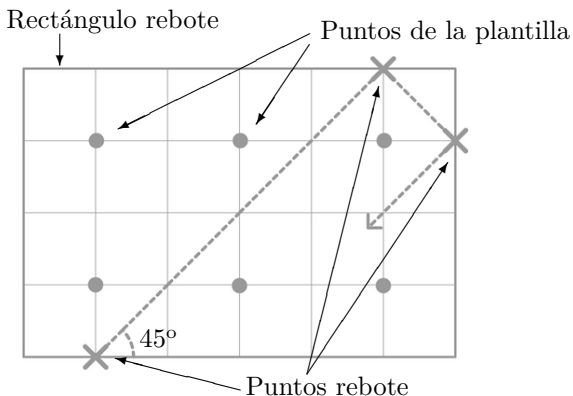


Figura 3: Realización de un lusona 2 × 3.

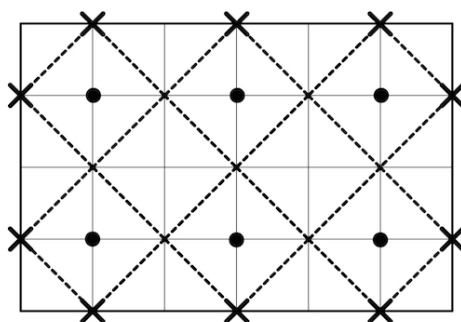


Figura 4: Lusona 2 × 3 completado.

cuáles son las reglas, conviene que observemos cuántas trayectorias son necesarias para realizar este tipo de sona.

Podemos comprobar que un lusona 2 × 3 necesita una trayectoria para su construcción; sin embargo, un lusona 2 × 6 necesita dos trayectorias, otro 6 × 9 necesita tres, etc. Ahora bien, ¿existe alguna relación entre el número de trayectorias necesarias para realizar un lusona mesa de billar con el número de filas y columnas de su plantilla?

Es un buen ejercicio de investigación el tratar de hallar dicha relación (ver *reto africano* en [3]). Para ello podemos plantear que el alumno ordene sistemáticamente los datos obtenidos en tablas como la Figura 5.

Con las indicaciones oportunas los alumnos pueden llegar a la siguiente conjetura: el número mínimo de trayectorias para realizar un lusona  $m \times n$  es el máximo común divisor de  $m$  y  $n$ , que llamaremos simplemente *conjetura del máximo común divisor*, para abreviar. Al final del presente artículo damos una demostración formal de la conjetura, sin embargo, esta excede ampliamente el nivel de primaria y secundaria. En cualquier caso, sí sería posible guiar a nuestros alumnos mediante las pautas expresadas por P. Gerdes en [4] hacia una prueba no formal. Veamos cómo.

$m \backslash n$	1	2	3	4	5	6	...
1	1	1	1	1	1	1	
2	1	2	1	2	1	2	
3	1	1	3	1	1	3	
4	1	2	1	4	1	2	
5	1	1	1	1	5	1	
6	1	2	3	2	1	6	
⋮							

Figura 5: Número de trayectorias para un lusona  $m \times n$ .

En primer lugar comprobamos que se necesitan exactamente  $n$  trayectorias para realizar un lusona  $n \times n$ , tal y como puede observarse en la Figura 6 (tomamos un sistema de ejes coordenados cuyo origen es la esquina inferior izquierda de la caja y los ejes tienen la misma dirección que los lados de dicha caja).

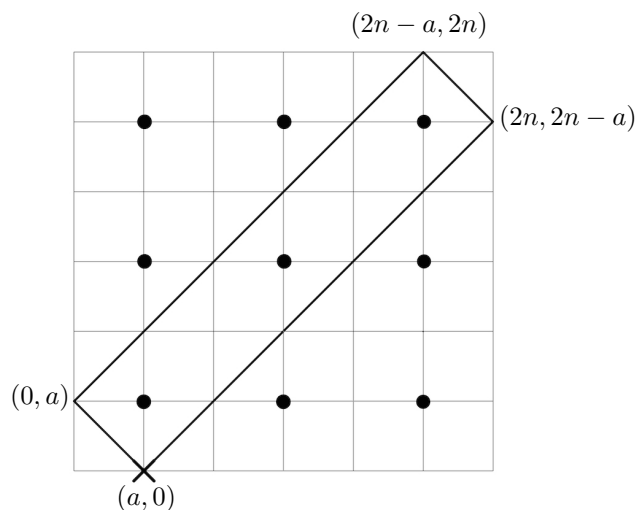


Figura 6: En un lusona  $n \times n$ , cualquier trayectoria viene dada por cuatro *puntos rebote* de coordenadas  $(a, 0)$ ,  $(2n, 2n - a)$ ,  $(2n - a, 2n)$  y  $(0, a)$ , para todo  $a = 1, 3, 5, \dots, 2n - 1$ .

Es interesante hacer notar que existe exactamente un único punto de cada lado del cuadrado en cada una de dichas trayectorias.

En segundo lugar observamos que, dada una plantilla  $m \times n$  con  $m < n$ , podemos dividirla en dos partes, *separando un cuadrado*, de la siguiente manera (Figura 7):

- 1) La primera parte será un *cuadrado máximo* posible, es decir, uno de dimensiones  $m \times m$ .
- 2) La segunda parte consistirá en un *rectángulo sobrante* de dimensiones  $m \times (n - m)$ .

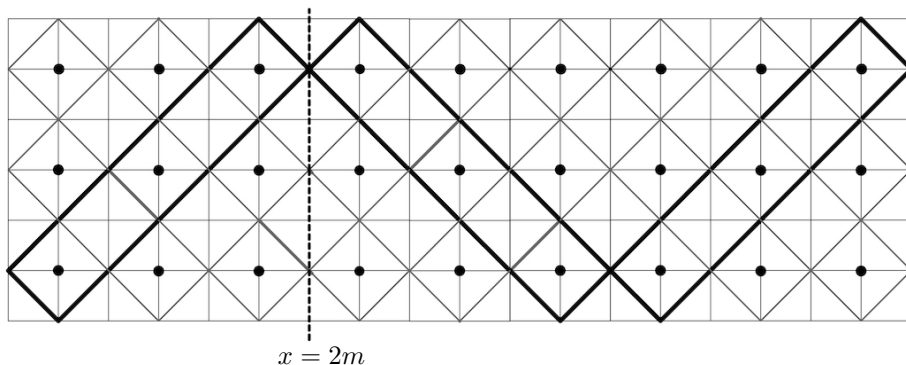


Figura 7: Separación de un lusa  $m \times n$  en un *cuadrado máximo* y un *rectángulo sobrante*.

La experiencia ya nos habría enseñado que basta lanzar todas las líneas posibles a partir de un único lado de la caja para obtener todas las trayectorias posibles.

Como el cuadrado  $m \times m$  y el rectángulo  $m \times (n - m)$  se pegan perfectamente a través de los puntos de la recta  $x = 2m$ , utilizaremos los puntos de esta recta como puntos de partida para lanzar líneas. Entonces, las trayectorias del cuadrado  $m \times m$  quedarán unidas a través de los puntos comunes de la recta  $x = 2m$  con las trayectorias del rectángulo  $m \times (n - m)$  (ver Figura 7).

Las trayectorias del cuadrado poseen un único punto rebote de cada lado de dicho cuadrado. De manera que cada uno de los puntos de la recta  $x = 2m$  pertenece únicamente a una determinada trayectoria del cuadrado. Por tanto, si dos puntos sobre la recta  $x = 2m$  no están relacionados entre sí por medio de trayectorias en  $m \times (n - m)$ , tampoco podrán unirse apoyándose en las del cuadrado.

Como las trayectorias del cuadrado y del rectángulo  $m \times (n - m)$  se fusionan a través de los puntos situados en la recta  $x = 2m$ , el número mínimo de trayectorias necesarias vendrá marcado por si los puntos rebote de la recta  $x = 2m$  se unen o no, es decir, única y exclusivamente por el número de trayectorias en el rectángulo  $m \times (n - m)$ .

En resumen, dado un lusa  $m \times n$  con  $m < n$  podremos eliminar un cuadrado  $m \times m$  y contabilizar únicamente el número de trayectorias necesarias para realizar el lusa  $m \times (n - m)$ . Reiterando este proceso podemos separar un máximo de  $\lfloor n/m \rfloor$  cuadrados del lusa original.

## 2. ALGORITMO PARA HALLAR EL NÚMERO DE TRAYECTORIAS

A partir de la experiencia previa dibujando sona y teniendo en cuenta las observaciones anteriores, podríamos acordar el empleo del siguiente algoritmo:

ALGORITMO 1. *El número de trayectorias necesarias para realizar un lusona de  $m$  filas y  $n$  columnas, siendo  $m < n$ , puede obtenerse aplicando los siguientes pasos:*

(1) *Se divide  $n$  entre  $m$ .*

(2) *Si*

2.a) *la división es exacta, el divisor es el número que buscamos;*

2.b) *la división no es exacta. Volvemos al paso (1), pero ahora el divisor hace el papel de  $n$  y el resto hace el de  $m$ .*

*Se continúa de esta forma hasta obtener una división exacta, siendo el último divisor el número que buscamos.*

Concretamente, este es el *algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor*, y así se lo podríamos mostrar a los alumnos.

Podemos mejorar un poco más nuestro algoritmo si le agregamos las siguientes reglas:

- El número de trayectorias en un lusona  $m \times n$  es el mismo que para uno  $n \times m$ . Esto se debe a que podemos obtener el segundo lusona girando el primero, y dicho giro no alteraría en modo alguno el número de trayectorias.
- Los sona  $1 \times n$  o  $m \times 1$  tan solo se componen de una trayectoria, tal y como podemos observar en la Figura 8.

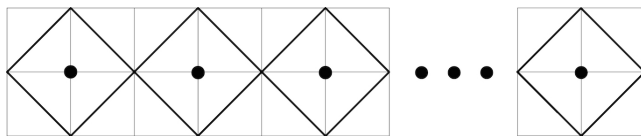


Figura 8: Un lusona de una única fila o columna posee solo una trayectoria.

Todas las ideas expresadas hasta este momento están basadas en [3], [4] y [5]. Convenientemente adaptadas, dichas ideas pueden suponer una estupenda herramienta didáctica en primaria y secundaria, pues desarrollan conceptos geométricos intuitivos que acaban siendo caracterizados exclusivamente desde la aritmética. No obstante, consideramos necesaria una prueba formal de la conjetura del máximo común divisor puesto que ciertos razonamientos empleados para deducirla, como el de mantener el número de trayectorias al quitar un cuadrado, pueden no quedar suficientemente aclarados en todos los casos.

Como contrapartida a la prueba formal, nuestros razonamientos se harán más complejos y difíciles de seguir al tratar de no dejar ningún cabo suelto. Para ello no queda más remedio que introducir nuevas notaciones, conceptos, técnicas demostrativas, etc.

En cualquier caso, como punto final a esta sección, el autor pone a disposición de quien lo desee, en [2], el código fuente de un programa escrito en java que simula la generación de los distintos puntos de un lusona tipo mesa de billar.

### 3. PRUEBA FORMAL DE LA CONJETURA DEL MÁXIMO COMÚN DIVISOR

La lectura de esta sección se ve facilitada si tenemos presentes dos ideas fundamentales:

- El objetivo principal es conseguir propiedades equivalentes a las que intervienen en la demostración del algoritmo de Euclides para el cálculo del máximo común divisor.
- La base sobre la que se construyen dichas propiedades es una relación de equivalencia establecida en el conjunto de puntos rebote del lusona, de manera que dos puntos rebote estarán relacionados si existe una trayectoria en el lusona que los une.

DEFINICIÓN 1. Dado un sistema de coordenadas cartesiano en el plano con origen  $O$ , de ejes  $OX$  y  $OY$  perpendiculares entre sí, llamamos *plantilla* de  $m$  filas y  $n$  columnas, y denotamos por  $\mathcal{P}_{m,n}$  ( $\mathcal{P}_n$  si  $m = n$ ), al conjunto de puntos en el plano cartesiano dado por

$$\mathcal{P}_{m,n} = \left\{ (2i - 1, 2j - 1) \right\}_{j=1, \dots, m}^{i=1, \dots, n}.$$

DEFINICIÓN 2. Dada una plantilla  $\mathcal{P}_{m,n}$  con  $m, n \in \mathbb{N}$ , llamaremos *rectángulo rebote*, y denotamos  $\mathcal{R}_{m,n}$  ( $\mathcal{R}_n$  si  $m = n$ ), al rectángulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(2n, 0)$ ,  $(2n, 2m)$  y  $(0, 2m)$ .

DEFINICIÓN 3. Dada una plantilla  $\mathcal{P}_{m,n}$  con  $m, n \in \mathbb{N}$ , llamamos *conjunto de puntos rebote*, y denotamos por  $\mathcal{PR}_{m,n}$  ( $\mathcal{PR}_n$  si  $m = n$ ), al conjunto

$$\mathcal{PR}_{m,n} = \left\{ (2i - 1, 0) \right\}_{i=1}^n \cup \left\{ (2i - 1, 2m) \right\}_{i=1}^n \\ \cup \left\{ (0, 2j - 1) \right\}_{j=1}^m \cup \left\{ (2n, 2j - 1) \right\}_{j=1}^m.$$

DEFINICIÓN 4. Dada una plantilla  $\mathcal{P}_{m,n}$  con  $m, n \in \mathbb{N}$ , llamaremos *poligonal* en  $\mathcal{P}_{m,n}$ , y denotamos por  $\mathcal{P}(a_1, \dots, a_r)$ , a una poligonal de vértices  $\{a_i\}_{i=1}^r$  que cumple (I) y (II):

- (I)  $\{a_i\}_{i=1}^r \subset \mathcal{PR}_{m,n}$  con  $r > 1$  y  $a_i \neq a_j \ \forall i, j \in \{1, \dots, r - 1\}$ .
- (II) Los segmentos que unen dichos vértices son segmentos del haz de rectas

$$H := \left\{ y = px + q : p = \pm 1, q \in \mathbb{Z} \right\},$$

donde  $\text{Pendiente}(\overline{a_i a_{i+1}}) \cdot \text{Pendiente}(\overline{a_{i+1} a_{i+2}}) = -1, \forall i = 1, \dots, r - 2$ . (Mediante  $\overline{cd}$  nos referimos al segmento cuyos puntos extremos son  $c$  y  $d$ .)

En otras palabras, los segmentos de una poligonal tienen pendiente 1 o  $-1$ , siendo siempre distinta la pendiente de dos segmentos consecutivos. Además, los vértices de una poligonal son puntos rebote distintos entre sí, pudiendo ser iguales tan solo el primero y último vértice (este caso solo puede darse si hay varios segmentos consecutivos).

Cuando una poligonal en  $\mathcal{P}_{m,n}$  esté formada por solo dos vértices  $c$  y  $d$ , la denotaremos simplemente  $\overline{cd}$ .

DEFINICIÓN 5. Dada una plantilla  $\mathcal{P}_{m,n}$  con  $m, n \in \mathbb{N}$ , llamaremos *trayectoria* en  $\mathcal{P}_{m,n}$  a un conjunto  $t = \{a_1, \dots, a_r \in \mathcal{PR}_{m,n} : \exists \mathcal{P}(a_1, \dots, a_r) \text{ en } \mathcal{P}_{m,n}\}$ . Es decir, una trayectoria en  $\mathcal{P}_{m,n}$  es un subconjunto de  $\mathcal{PR}_{m,n}$  de manera que existe una poligonal asociada en  $\mathcal{P}_{m,n}$  cuyos vértices son los elementos de dicha poligonal. Al conjunto de todas las trayectorias posibles en  $\mathcal{P}_{m,n}$  lo denotaremos por

$$\mathcal{T}_{m,n} = \{t : t \text{ es una trayectoria en } \mathcal{P}_{m,n}\}.$$

DEFINICIÓN 6. Dada una plantilla  $\mathcal{P}_{m,n}$  con  $m, n \in \mathbb{N}$ , diremos que una trayectoria en  $\mathcal{P}_{m,n}$  es *cerrada*, y denotamos por  $t^c$ , cuando existe una poligonal asociada a dicha trayectoria cuyos vértices inicial y final coinciden.

*Nota 1.* Puesto que el vértice inicial y final en una trayectoria cerrada es el mismo, a efectos de conjunto de elementos una trayectoria cerrada no se distingue de una que no lo sea. Para distinguirlas utilizaremos  $t^c$  o  $t$  respectivamente.

DEFINICIÓN 7. Dada una plantilla  $\mathcal{P}_{m,n}$ , con  $m, n \in \mathbb{N}$ , diremos que dos trayectorias *no cerradas son iguales* si tienen el mismo conjunto de vértices. Análogamente, diremos que dos trayectorias cerradas son iguales si tienen el mismo conjunto de vértices. Una trayectoria no cerrada siempre será diferente de una trayectoria cerrada.

DEFINICIÓN 8. Dada una plantilla  $\mathcal{P}_{m,n}$ , con  $m, n \in \mathbb{N}$ , llamamos *lusona* de  $\mathcal{P}_{m,n}$ , y denotamos por  $\mathcal{L}_{m,n}$ , a un conjunto

$$\mathcal{L}_{m,n} = \left\{ t_1^c, \dots, t_k^c \in \mathcal{T}_{m,n} : \bigcup_{i=1}^k t_i^c = \mathcal{PR}_{m,n} \text{ y } t_i^c \neq t_j^c, \forall i \neq j \right\}.$$

Es decir,  $\mathcal{L}_{m,n}$  ( $\mathcal{L}_n$  si  $m = n$ ) es el conjunto de trayectorias cerradas distintas en  $\mathcal{P}_{m,n}$  de manera que la unión de sus elementos coincide exactamente con el conjunto de puntos rebote  $\mathcal{PR}_{m,n}$ .

DEFINICIÓN 9. Dada una plantilla  $\mathcal{P}_{m,n}$  con  $m, n \in \mathbb{N}$ , se define la siguiente relación binaria  $\mathcal{R}$  en  $\mathcal{PR}_{m,n}$ : decimos que  $x, y \in \mathcal{PR}_{m,n}$  están relacionados mediante la relación binaria  $\mathcal{R}$ , y denotamos  $x \mathcal{R} y$ , si  $\exists t \in \mathcal{T}_{m,n}$  tal que  $x, y \in t$ .

PROPOSICIÓN 1. *La relación binaria  $\mathcal{R}$  definida anteriormente es de equivalencia en  $\mathcal{PR}_{m,n}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Necesitamos probar los apartados (I), (II) y (III) siguientes. Veamos:

- (I) Reflexiva: ¿ $x \mathcal{R} x$  para todo  $x \in \mathcal{PR}_{m,n}$ ? Al no considerar trayectorias de un solo vértice esta propiedad no es trivial. En cualquier caso, una vez demostrada nos será útil en posteriores razonamientos. Veamos si se cumple lo siguiente:

$$\text{dado cualquier } x_0 \in \mathcal{PR}_{m,n}, \text{ ¿} \exists t^c \in \mathcal{T}_{m,n} \text{ tal que } x_0 \in t^c \text{?}$$



Suponemos, sin pérdida de generalidad, que las coordenadas del punto  $x_0$  nos indican que está en el eje  $OX$ . Así, tomando la recta  $y = x + k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) que pasa por el punto  $x_0$ , obtendríamos que dicha recta corta necesariamente a otro lado del rectángulo  $\mathcal{R}_{m,n}$  en un punto  $x_1 \in \mathcal{PR}_{m,n}$ .

Utilizando ahora una recta de la forma  $y = -x + k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) que pase por  $x_1$ , obtendríamos otro punto de corte con otro lado del rectángulo  $\mathcal{R}_{m,n}$  en un punto  $x_2 \in \mathcal{PR}_{m,n}$ .

En el peor de los casos, tendríamos que repetir esta operación tres veces para obtener un punto  $x_r$  en el eje  $OX$ .

Si  $x_0 = x_r$ , entonces  $\exists t^c := \{x_0, x_1, \dots, x_r = x_0\}$  de manera que  $x_0 \mathcal{R} x_r$ .

Si  $x_0 \neq x_r$ , volveríamos a repetir el mismo proceso anterior para obtener, de nuevo, un punto en el eje  $OX$ , hasta que el punto obtenido en  $OX$  fuera el mismo  $x_0$  del que hemos partido. De hecho, no se puede obtener un vértice en  $OX$  por el que ya hayamos pasado previamente que no sea el propio  $x_0$ .

Este proceso tiene necesariamente un fin, ya que el número de puntos rebote posibles que podemos obtener es finito. Así se cumple la propiedad reflexiva.

(II) Simétrica: Dados  $x, y \in \mathcal{PR}_{m,n}$  cualesquiera, ¿ $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$ ? Es trivial, ya que la misma trayectoria que une  $x$  con  $y$  uniría  $y$  con  $x$ .

(III) Transitiva: Dados  $x, y, z \in \mathcal{PR}_{m,n}$  cualesquiera, ¿ $x \mathcal{R} y$  y  $y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$ ?

Si  $x \mathcal{R} y$ , existe  $t_1 \in \mathcal{T}_{m,n}$  tal que  $t_1 = \{x = a_1, \dots, a_r = y\}$ . Por otra parte, como  $y \mathcal{R} z$ , existe  $t_2 \in \mathcal{T}_{m,n}$  tal que  $t_2 = \{y = b_1, \dots, b_s = z\}$ . Se tiene que

$$\{y\} \subseteq t_1 \cap t_2 \Rightarrow t_1 \cap t_2 \neq \emptyset.$$

Tenemos, sin perder generalidad, los siguientes casos (ver Figura 9).



Figura 9: Casos posibles para la intersección no vacía de dos trayectorias.

III.a) Caso  $|t_1 \cap t_2| = 1$ .

En este caso  $t_1 \cap t_2 = \{y\}$ , luego existe una poligonal

$$\mathcal{P}(x = a_1, \dots, y = a_r = b_1, \dots, b_s = z)$$

en  $\mathcal{P}_{m,n}$ , de manera que la trayectoria

$$t := \{a_1, \dots, a_{r-1}, b_1, \dots, b_s\}$$

relacionaría  $a_1 = x$  con  $b_s = z$ . Es decir, se tiene que  $x \mathcal{R} z$ .

III.b) Caso  $1 < |t_1 \cap t_2| < \min\{|t_1|, |t_2|\}$ .

Sea  $r' := r - (|t_1 \cap t_2| - 1)$ . Podemos tomar la poligonal

$$\mathcal{P}(x = a_1, \dots, y = a_{r'} = b_1, \dots, b_s = z)$$

en  $\mathcal{P}_{m,n}$ , de manera que la trayectoria  $t := \{a_1, \dots, a_{r'} = b_1, \dots, b_s\}$  relacionaría  $a_1 = x$  con  $b_s = z$ . Así,  $x \mathcal{R} z$ .

III.c) Caso  $|t_1 \cap t_2| = \min\{|t_1|, |t_2|\}$ .

Entonces,  $t_1 \subseteq t_2$  o  $t_2 \subseteq t_1$ . Tomando  $t := t_2$  o  $t := t_1$  respectivamente, se tiene una trayectoria que relaciona  $a_1 = x$  con  $b_s = z$ . Luego,  $x \mathcal{R} z$ .

En resumen, se cumple la propiedad (III), que unida a las propiedades (I) y (II), consiguen que  $\mathcal{R}$  sea una relación de equivalencia en  $\mathcal{PR}_{m,n}$ .  $\square$

DEFINICIÓN 10. Por ser  $\mathcal{R}$  una relación binaria de equivalencia en  $\mathcal{PR}_{m,n}$  consideramos el conjunto cociente

$$\mathcal{K}(\mathcal{PR}_{m,n}) := \{[x] : x \in \mathcal{PR}_{m,n}\},$$

donde  $[x] := \{y \in \mathcal{PR}_{m,n} : x \mathcal{R} y\}$  es la clase de equivalencia de  $x$ .

PROPOSICIÓN 2. Dados  $m, n \in \mathbb{N}$  cualesquiera se cumple que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\mathcal{PR}_{m,n}) &= \bigcup_{i=1}^n [(2i-1, 0)] = \bigcup_{i=1}^n [(2i-1, 2m)] \\ &= \bigcup_{j=1}^m [(0, 2j-1)] = \bigcup_{j=1}^m [(2n, 2j-1)]. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Comprobemos que

$$\mathcal{K}(\mathcal{PR}_{m,n}) = \bigcup_{i=1}^n [(2i-1, 0)].$$

Dado  $x \in \mathcal{PR}_{m,n}$  nos preguntamos si existe  $r \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $x \in [(2r-1, 0)]$ .

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $x \in OY$ , es decir, consideramos que  $x = (0, 2j-1)$  para algún  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

(1) Caso  $m \leq n$ .

Basta tomar el segmento con pendiente  $-1$ , de manera que  $(0, 2j-1)$  y  $(2j-1, 0)$  son vértices de dicho segmento. Por tanto, existe  $j \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $x \in [(2j-1, 0)]$ .

(2) Caso  $m > n$ .

2.a) Si  $1 \leq j \leq n$ , entonces siempre podemos unirlo directamente mediante un único segmento con el punto  $(2j-1, 0) \in OX$ , tal y como ocurría en el caso (1) anterior.

2.b) Si  $j > n$ , dado  $(0, 2j - 1)$  trazamos la recta  $y = -x + (2j - 1)$  que pasa por el punto  $(0, 2j - 1)$ , obteniendo el punto rebote  $(2n, (2j - 1) - 2n)$  en la recta  $x = 2n$ . Ahora trazamos la recta  $y = x + (2j - 1) - 4n$ , y tenemos dos opciones:

2b.1) Si  $j \leq 2n$ , obtenemos el punto rebote  $(4n - (2j - 1), 0) \in OX$ , y acabamos aquí.

2b.2) Si  $j > 2n$ , obtenemos el punto rebote  $(0, (2j - 1) - 4n) \in OY$ , y repetimos el proceso anterior hasta que la poligonal que estamos formando corte al eje  $OX$ .

Por tanto, dado  $x \in OY \cap \mathcal{PR}_{m,n}$ , existe  $r \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $x \in [(2r - 1), 0]$ .

Además, la simetría del rectángulo unida a la transitividad de la relación binaria  $\mathcal{R}$  asegura que, dado un punto rebote  $x \in \mathcal{PR}_{m,n}$  cualquiera, siempre existirá un punto rebote en  $OX$  cuya clase de equivalencia contenga a  $x$ . Así,

$$\mathcal{K}(\mathcal{PR}_{m,n}) = \bigcup_{i=1}^n [(2i - 1), 0].$$

Razonando de manera análoga, podemos obtener todas las clases de equivalencia posibles a partir de puntos rebote situados única y exclusivamente en un lado del rectángulo  $\mathcal{R}_{m,n}$ . □

TEOREMA 3. *Dados  $m, n \in \mathbb{N}$  cualesquiera se cumple que*

$$\mathcal{L}_{m,n} = \mathcal{K}(\mathcal{PR}_{m,n}).$$

DEMOSTRACIÓN. Basta probar los apartados (1), (2) y (3) siguientes:

(1)  $\mathcal{L}_{m,n} \neq \emptyset$ ?

Siempre podemos encontrar una poligonal que acabe en el punto de partida, tal y como se expresa en el apartado (I) de la demostración de la Proposición 1.

(2) Dada  $t^c \in \mathcal{L}_{m,n}$ , ¿es  $x \mathcal{R} y$  para cualesquiera  $x, y \in t^c$ ?

Trivial por definición.

(3) Dadas  $t_1^c, t_2^c \in \mathcal{L}_{m,n}$  tal que  $t_1^c \cap t_2^c \neq \emptyset$ , ¿se cumple  $t_1^c = t_2^c$ ?

Trataremos de conseguir una contradicción dado que, por construcción, cualquier punto de la trayectoria  $t_1^c$  será vértice de exactamente dos segmentos que lleguen a él, con pendientes 1 y  $-1$  (Figura 10).

Tomamos  $x' \in t_1^c \cap t_2^c$  y supondremos que  $t_1^c \neq t_2^c$ , de manera que

$$\exists y \in t_2^c \text{ tal que } y \notin t_1^c.$$

En este caso,  $\exists x \in t_1^c$  tal que  $x \mathcal{R} y$ , y podremos formar  $\mathcal{P}(x, \dots, x', y', \dots, y)$  en  $\mathcal{P}_{m,n}$ . Así, tal y como puede observarse en la Figura 10,

$$x' \in t_1^c \text{ y } \{y', \dots, y\} \subset t_2^c.$$

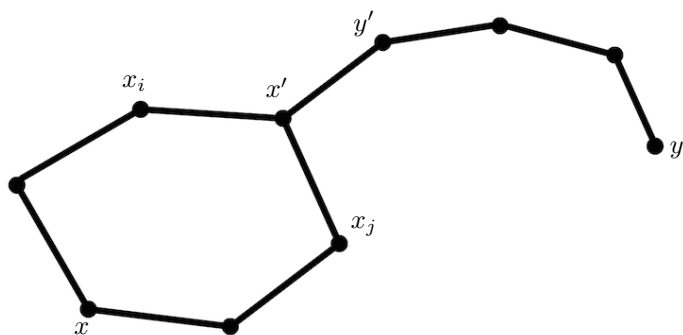


Figura 10: Un mismo vértice para tres segmentos.

Pero en este caso tendremos que el vértice  $x'$  lo es de tres segmentos distintos  $\overline{x_i x'} \neq \overline{x' x_j} \neq \overline{x' y'}$  en  $\mathcal{P}_{m,n}$ , de manera que

$$\{x_i, x', x_j\} \subset t_1^c \text{ y } \{x', y'\} \subset t_2^c.$$

Pero esto supone una contradicción, ya que un vértice únicamente puede serlo de exactamente dos segmentos en  $\mathcal{P}_{m,n}$ . Por tanto,  $t_1^c = t_2^c$ , lo que concluye la prueba.  $\square$

*Nota 2.* No contemplar poligonales triviales formadas por un único elemento ha sido necesario, ya que necesitamos que confluyan tres segmentos en un mismo vértice para forzar la contradicción (se necesita  $x' \neq y'$  para que  $\overline{x' y'}$  sea un segmento).

*Nota 3.* Como consecuencia de la Proposición 2 y del Teorema 3, un lusona  $\mathcal{L}_{m,n}$  queda completamente caracterizado por los puntos rebote de un lado cualquiera del rectángulo  $\mathcal{R}_{m,n}$  que son  $\mathcal{R}$ -equivalentes.

**DEFINICIÓN 11.** Dados  $m, n \in \mathbb{N}$  cualesquiera, se define la función *número de curvas de un lusona mesa de billar* de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} c : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (m, n) &\longmapsto c(m, n) := |\mathcal{L}_{m,n}|, \end{aligned}$$

donde  $|\mathcal{L}_{m,n}|$  es el cardinal del conjunto  $\mathcal{L}_{m,n}$ .

**PROPOSICIÓN 4.** *La función número de curvas de un lusona está bien definida.*

**DEMOSTRACIÓN.** Trivial a partir del Teorema 3, ya que si  $(m_1, n_1) = (m_2, n_2)$ , entonces  $\mathcal{L}_{m_1, n_1} = \mathcal{L}_{m_2, n_2}$ .  $\square$

**PROPOSICIÓN 5.** *Dados  $m, n \in \mathbb{N}$  cualesquiera, se cumple que*

$$c(m, n) = c(n, m).$$

DEMOSTRACIÓN. Basta realizar un cambio de sistema de referencia, trasladando el origen al punto  $(0, 2m)$  y girando los ejes un ángulo recto en sentido horario, para que un lusona  $\mathcal{L}_{m,n}$  se transforme en otro  $\mathcal{L}_{n,m}$ .

El cambio de sistema de referencia no alteraría en ningún caso el número de trayectorias cerradas del lusona, de manera que la proposición quedaría demostrada.  $\square$

PROPOSICIÓN 6. *Dado  $n \in \mathbb{N}$  cualquiera, se verifica que*

$$c(1, n) = 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Procedemos por inducción sobre  $n \in \mathbb{N}$ .

Si  $n = 1$ , la única trayectoria cerrada es  $t^c = \{(0, 1), (1, 0), (2, 1), (1, 2)\}$ .

Suponemos ahora que  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $c(1, n) = 1, \forall n \leq n_0$  (H.I.). Sea  $n = n_0 + 1$ ; entonces, ¿se cumplirá  $c(1, n) = 1$ ?

A partir de nuestra H.I., podemos formar

$$t_0^c = \{a_1 = (0, 1), a_2 = (1, 0), \dots, a_r = (2n_0, 1)\}$$

en  $\mathcal{P}_{1,n_0}$ , de manera que existirá una poligonal  $\mathcal{P}(a_1, a_2, \dots, a_r, \dots, a_1)$  cerrada. A esta poligonal podemos unirle otra de vértices  $a_r = (2n_0, 1)$ ,  $a_{r+1} = (2n_0 + 1, 0)$ ,  $a_{r+2} = (2n_0 + 2, 1)$ ,  $a_{r+3} = (2n_0 + 1, 2)$  y, otra vez,  $a_r = (2n_0, 1)$ .

Así podremos construir la poligonal  $\mathcal{P}(a_1, a_2, \dots, a_r, a_{r+1}, a_{r+2}, a_{r+3}, a_r, \dots, a_1)$  cerrada, lo que nos da pie para formar la trayectoria  $t^c = t_0^c \cup \{a_{r+1}, a_{r+2}, a_{r+3}\}$  cerrada en  $\mathcal{P}_{1,n}$ , de manera que  $t^c = \mathcal{P}\mathcal{R}_{1,n}$  pudiendo así concluir.  $\square$

PROPOSICIÓN 7. *Dado  $n \in \mathbb{N}$  cualquiera, se cumple que*

$$c(n, n) = n.$$

Además, dada una trayectoria cerrada  $t^c \in \mathcal{L}_n$  cualquiera, se tiene que

$$|t^c \cap \{OX\}| = |t^c \cap \{OY\}| = |t^c \cap \{y = 2n\}| = |t^c \cap \{x = 2n\}| = 1.$$

*En resumen, un lusona con el mismo número de filas y columnas está formado exactamente por el mismo número de trayectorias cerradas. Además, cada una de dichas trayectorias contiene exactamente un único punto rebote de cada lado del cuadrado que los contiene.*

DEMOSTRACIÓN. Dado  $n \in \mathbb{N}$  tomemos un punto rebote cualquiera en el eje  $OX$ , por ejemplo  $a_1 = (a, 0)$ . A partir de este punto, podemos trazar la recta  $y = x - a$ , cuya intersección con la recta  $x = 2n$  es el punto rebote  $a_2 = (2n, 2n - a)$ . Obtenemos así el segmento  $\overline{a_1 a_2}$  en  $\mathcal{P}_n$  (ver Figura 6).

Procediendo análogamente, podemos obtener los puntos rebote  $a_3 = (2n - a, 2n)$  y  $a_4 = (0, a)$ , de manera que  $\mathcal{P}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_1)$  es una poligonal cerrada en  $\mathcal{P}_n$ . Por tanto, es posible definir la trayectoria cerrada  $t_a^c = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  en  $\mathcal{P}_n$ , que contiene un único punto rebote de cada lado del cuadrado  $\mathcal{R}_n$ .

Podemos tomar exactamente  $n$  trayectorias  $t_a^c$  en  $\mathcal{P}_n$ , a partir de exactamente  $n$  puntos rebote distintos sobre el eje  $OX$ , que contienen los  $4n$  puntos rebote distintos de  $\mathcal{PR}_n$ . Además, por simetría, en el cuadrado cualquier otra trayectoria cerrada  $t^c$  en  $\mathcal{P}_n$  contendrá un punto rebote en el eje  $OX$  de coordenadas  $(a, 0)$ . Por tanto,  $t^c = t_a^c$ .

De todo lo anterior se tiene que  $\mathcal{L}_n = \{ \bigcup t_a^c : a \in \bigcup_{i=1}^n \{(2i-1, 0)\} \}$  y, tomando cardinales en ambos lados de la igualdad, concluimos que  $c(n, n) = n$ .

Razonar de igual forma en los otros lados del cuadrado finaliza nuestra demostración.  $\square$

*Nota 4.* El equivalente aritmético del siguiente teorema es fundamental en el algoritmo de Euclides para el cálculo del máximo común divisor. Es decir, si cambiamos  $c(m, n)$  por  $\text{MCD}(m, n)$  (máximo común divisor de  $m$  y  $n$ ), tendremos una propiedad clave para dicho algoritmo.

**TEOREMA 8.** *Dados  $m, n \in \mathbb{N}$  con  $m < n$ , se cumple que*

$$c(m, n) = c(m, n - m).$$

**DEMOSTRACIÓN.** Por reducción al absurdo. Supongamos que  $c(m, n) \neq c(m, n - m)$ , entonces se nos presentan los casos (1) y (2).

(1) Caso  $c(m, n - m) < c(m, n)$ :

Sabemos por la Proposición 2 que  $\mathcal{K}(\mathcal{PR}_{m,n}) = \bigcup_{j=1}^m [(0, 2j - 1)]$ , es decir, un lusa queda completamente parametrizado por aquellos puntos rebote del eje  $OY$  (por ejemplo) que son  $\mathcal{R}$ -equivalentes entre sí. Como hemos supuesto

$$\left| \mathcal{K}(\mathcal{PR}_{m,n-m}) \right| < \left| \mathcal{K}(\mathcal{PR}_{m,n}) \right|,$$

será porque existen dos puntos rebote  $a, b$  en el eje  $OY$  que son  $\mathcal{R}$ -equivalentes en  $m \times (n - m)$  y, sin embargo, no lo son en  $m \times n$ .

Por tanto, existirá una trayectoria en  $\mathcal{L}_{m,n-m}$  que una  $a$  con  $b$ , mientras que en  $\mathcal{L}_{m,n}$  no hay ninguna trayectoria que los una. Es decir,

$\exists j_1, j_2 \in \{1, \dots, m\}$  tal que  $j_1 \neq j_2$ , cumpliendo las propiedades (\*) y (\*\*):

$$\exists s^c \in \mathcal{L}_{m,n-m} \text{ tal que } a := (0, 2j_1 - 1), b := (0, 2j_2 - 1) \in s^c; \quad (*)$$

$$\nexists t^c \in \mathcal{L}_{m,n} \text{ tal que } a, b \in t^c. \quad (**)$$

Tomamos ahora el conjunto  $NM := \{z \in s^c : z := (2(n - m), z_y)\}$ , es decir el conjunto de puntos rebote de la trayectoria cerrada  $s^c$  que están en la recta  $x = 2(n - m)$  (ver Figura 11). Entonces, para cada  $z \in NM$  siempre podemos tomar

$$u_z := (2(n - m) + z_y, 0), v_z := (2n, 2m - z_y) \text{ y } w_z := (2n - z_y, 2m) \in \mathcal{PR}_{m,n},$$

tal y como puede observarse en la Figura 11. Estos puntos extienden la trayectoria cerrada  $s^c$  a  $\mathcal{P}_{m,n}$ .

Ahora vamos a definir una nueva trayectoria  $t^c$  en  $\mathcal{L}_{m,n}$  de manera que:

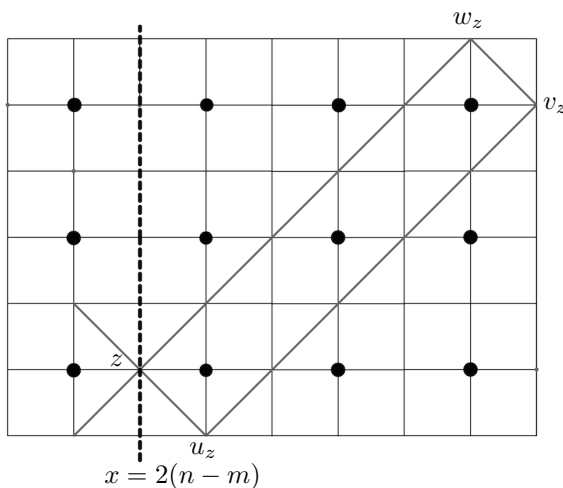


Figura 11: Conexión y desconexión mediante un lazo.

- A la trayectoria  $s^c$  en  $\mathcal{L}_{m,n-m}$ , le quitamos los vértices situados sobre la recta  $x = 2(n - m)$ .
- Por cada vértice  $z$  que quitamos de la recta  $x = 2(n - m)$ , pegamos un único lazo del cuadrado final  $m \times m$  que pasa por los puntos  $u_z, v_z$  y  $w_z$ .

Es decir, definimos la trayectoria  $t^c := (s^c \setminus NM) \cup \{u_z, v_z, w_z : z \in NM\}$ .

Como  $t^c \in \mathcal{L}_{m,n}$  y  $a, b \in t^c$ , esto contradice (\*\*\*) y este caso sería imposible.

(2) Caso  $c(m, n - m) > c(m, n)$ :

Análogamente al caso (1), ahora nos encontraremos dos puntos rebote  $a, b$  sobre el eje  $OY$ , de manera que  $a$  y  $b$  serán  $\mathcal{R}$ -equivalentes en  $m \times n$  mientras que en  $m \times (n - m)$  no lo serán.

Por tanto,  $\exists j_1, j_2 \in \{1, \dots, m\}$  con  $j_1 \neq j_2$  cumpliendo (#) y (##):

$$\nexists s^c \in \mathcal{L}_{m,n-m} \text{ tal que } a := (0, 2j_1 - 1), b := (0, 2j_2 - 1) \in s^c; \quad (\#)$$

$$\exists t^c \in \mathcal{L}_{m,n} \text{ tal que } a, b \in t^c. \quad (\#\#)$$

A partir de (##),  $\exists \mathcal{P}(a, \dots, b, \dots, a)$  una poligonal cerrada en  $\mathcal{P}_{m,n}$ .

Consideramos ahora el conjunto

$$MN := \{z \in \mathcal{P}(a, \dots, b, \dots, a) : z := (2(n - m), z_y)\},$$

es decir, la intersección del conjunto de puntos de la poligonal  $\mathcal{P}(a, \dots, b, \dots, a)$  y la recta  $x = 2(n - m)$ .

Ahora bien, para cada  $z \in MN$  siempre podemos tomar los puntos

$$u_z := (2(n - m) + z_y, 0), v_z := (2n, 2m - z_y) \text{ y } w_z := (2n - z_y, 2m) \in \mathcal{PR}_{m,n}.$$

Si eliminamos estos puntos de  $t^c$  nos quedaría una trayectoria cerrada en  $\mathcal{P}_{m,n-m}$  (ver Figura 11).

De manera similar al caso (1) anterior, vamos a definir una trayectoria  $s^c$  en  $\mathcal{L}_{m,n-m}$  (aunque ahora nos toca contraer en vez de extender):

- Al conjunto formado por los vértices de la trayectoria  $t^c$  le agregamos aquellos vértices de la poligonal  $\mathcal{P}(a, \dots, b, \dots, a)$  que están sobre la recta  $x = 2(n - m)$ , es decir, los elementos del conjunto  $MN$ .
- Por cada vértice  $z \in MN$  que unimos a  $t^c$ , eliminamos los vértices de un único lazo que se encontraría en el cuadrado final  $m \times m$ .

Es posible, por tanto, definir la trayectoria

$$s^c := \left( t^c \cup MN \right) \setminus \left\{ u_z, v_z, w_z : z \in MN \right\}.$$

Sin embargo, como  $s^c \in \mathcal{L}_{m,n}$  y  $a, b \in s^c$ , esto contradice (#) y este caso sería imposible.

En resumen,  $c(m, n) \neq c(m, n - m)$  ha de ser falsa, lo cual concluye nuestra demostración.  $\square$

De las propiedades anteriores se deduce el siguiente corolario.

**COROLARIO 9.** *Dados  $m, n \in \mathbb{N}$ , se tiene que  $c(m, n) = \text{MCD}(m, n)$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Emplearemos una variante del método de inducción para dos variables.

En primer lugar hacemos notar que se cumple

$$c(1, 1) = 1 = \text{MCD}(1, 1). \quad (\dagger)$$

Asumimos como hipótesis de inducción que existe  $k \in \mathbb{N}$  con  $k > 1$  de modo que

$$c(m, n) = \text{MCD}(m, n) \text{ cuando } m + n \leq k \text{ con } m, n \in \mathbb{N}. \quad (\text{H.I.})$$

Entonces, comprobemos si será cierta

$$c(m, n) = \text{MCD}(m, n) \text{ cuando } m + n \leq k + 1. \quad (\ddagger)$$

(I) Caso  $m < n$ .

$$c(m, n) \stackrel{\text{T.8}}{\underset{\downarrow}{\cong}} c(m, n - m) \stackrel{\text{H.I.}}{\underset{\downarrow}{\cong}} \text{MCD}(m, n - m) = \text{MCD}(m, n). \quad (1)$$

Aplicamos en el primer igual de (1) el Teorema 8, en el segundo igual nuestra hipótesis de inducción, ya que  $m + (n - m) \leq k$ , y, en el tercer igual, una propiedad del MCD.



(II) Caso  $m = n$ .

$$c(m, m) \stackrel{\text{P.7}}{\downarrow} m = \text{MCD}(m, m). \tag{2}$$

Se obtiene (2) de manera inmediata al aplicar la Proposición 7.

(III) Caso  $m > n$ .

$$c(m, n) \stackrel{\text{P.5}}{\downarrow} c(n, m) \stackrel{\text{T.8}}{\downarrow} c(n, m - n) \stackrel{\text{H.I.}}{\downarrow} \text{MCD}(n, m - n) \tag{3}$$

$$= \text{MCD}(n, m) = \text{MCD}(m, n). \tag{4}$$

Aplicando la Proposición 5, el Teorema 8 e (H.I.) se obtiene (3) y, posteriormente, (4) se consigue de manera inmediata al aplicar propiedades del MCD.

A partir de (†) y (‡) se tiene que el resultado es válido en general. □

#### 4. CONCLUSIÓN

Consideramos que realizar una introducción de máximo común divisor como la sugerida en la primera parte de este artículo contribuiría, muy positivamente, a encajar correctamente las piezas del rompecabezas que a veces suponen estos conceptos, favoreciendo los aprendizajes basados en el propio descubrimiento a la vez que se trabaja el razonamiento lógico.

Por otra parte, hemos tratado los sona del tipo mesa de billar, a partir de los cuales se forman muchos otros. Sin embargo, hay distintos tipos de sona (ver [1]): *estómago de león*, *pollito perseguido*, etc., cuyas propiedades matemáticas han sido el objeto de diversos estudios, por ejemplo, en [4]. Teniendo en cuenta este hecho, ¿hacia dónde puede dirigirse la investigación relacionada con los sona? Podemos plantearnos en este sentido los siguientes aspectos:

- Elaborar una base matemática que apunte formalmente propiedades puestas de manifiesto previamente.
- Hallar otras propiedades matemáticas relativas a los sona que hayan pasado inadvertidas.

Por último, creemos que la base teórica proporcionada para probar la conjetura del máximo común divisor podría ser un eslabón más en la cadena dedicada a la investigación de los sona y sus propiedades matemáticas.

#### REFERENCIAS

[1] M. GARCÍA PIQUERAS, Álbum digital formado por distintas láminas sona. Disponible en <http://goo.gl/QZbvcT>.

[2] M. GARCÍA PIQUERAS, Código java que genera los puntos rebote para un lusona tipo mesa de billar dado y listado de vídeos con simulaciones de representaciones sona. Disponible en <http://goo.gl/hUZB9W>.

- [3] M. GARCÍA PIQUERAS, *Una Historia de la Proporción*, Nivola, Madrid, 2013.
- [4] P. GERDES, *Geometry from Africa: Mathematical and Educational Explorations*, The Mathematical Association of America, Washington DC, 1999.
- [5] P. GERDES, *Drawings from Angola: Living Mathematics*, Research Centre for Mathematics, Culture and Education, Maputo (Mozambique), 2007.

MANUEL GARCÍA PIQUERAS, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, I.E.S. BONIFACIO SOTOS, CASAS-IBÁÑEZ (ALBACETE)

Correo electrónico: [mgpiqueras@gmail.com](mailto:mgpiqueras@gmail.com)