

Estimaciones de promedios en Análisis*

por

Santiago Boza y Javier Soria

RESUMEN. Existen en Análisis una serie de resultados clásicos en los que el cálculo de promedios juega un papel relevante, como los métodos generalizados de convergencia, el teorema fundamental del cálculo o el tratamiento digital de imágenes. Para entender mejor estas ideas, desarrollaremos brevemente algunas de las técnicas más útiles que permiten obtener buenas estimaciones de dichos promedios. En particular, mencionaremos las desigualdades de Hardy, propiedades de la convolución, operadores maximales, aproximaciones de la identidad, lemas de cubrimiento, reordenamientos decrecientes, etc. Al final del artículo presentaremos también algunos problemas interesantes, todavía sin resolver.

1. INTRODUCCIÓN

1.1. EJEMPLOS DE PROMEDIOS

Uno de los resultados más conocidos de Análisis Matemático en los que aparece la necesidad de estimar un promedio, y que nos encontramos en los primeros años de nuestros estudios universitarios, es el criterio de la convergencia en media de una sucesión (que también se suele conocer como *convergencia Cesàro*), que afirma que si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es una sucesión que converge a $l \in \mathbb{R}$, y si definimos la sucesión de las medias aritméticas como

$$\sigma_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n},$$

entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = l$.

Sabemos que, en general, la convergencia Cesàro es más débil que la convergencia usual. Por ejemplo, si

$$a_n = (-1)^n, \text{ entonces } \sigma_n = \begin{cases} -1/n, & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Esta idea de extender la noción de convergencia tiene aplicaciones muy gratas en ámbitos muy diversos (¡ojalá todas las sucesiones fueran convergentes!). Por ejemplo,

*En la realización de este trabajo, ambos autores han estado parcialmente financiados por el proyecto MTM2010-14946.

usando el teorema de Hahn-Banach [7] es posible probar la existencia de un operador lineal y continuo

$$\text{LIM} : \ell^\infty(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

de manera que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \text{LIM}(\{a_n\}_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

En particular, si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$, entonces $\text{LIM}(\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = l$ y, por lo tanto, toda sucesión acotada es convergente, en *sentido generalizado*, sin que la convergencia usual quede alterada. El problema es que esta generalización abstracta del límite no es constructiva (ni única), por lo que a efectos prácticos concretos no es de gran utilidad. Sin embargo, en términos de la convergencia Cesàro, sí que podemos obtener resultados explícitos. Quizá el más conocido sea el *teorema de Fejér* aplicado a las sumas parciales de la serie de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{T})$: si definimos

$$S_n f(x) = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) e^{ikx},$$

donde

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

son los coeficientes de Fourier de la función f , y calculamos sus medias de Cesàro

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n S_j f(x),$$

entonces

$$\sigma_n f(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x), \text{ a.e. } x \in \mathbb{T}. \quad (1)$$

La trascendencia de este resultado viene dada por el hecho de que existe una función $f \in L^1(\mathbb{T})$ cuya serie de Fourier diverge en todo punto (*teorema de Kolmogorov* [27]). La figura 1 muestra el comportamiento de $S_{80}f$ y $\sigma_{80}f$ en un punto de discontinuidad de salto de una función f . Obsérvese cómo $\sigma_n f$ presenta un comportamiento más regular, menos oscilatorio (las oscilaciones que manifiesta $S_n f$ son lo que se denomina *fenómeno de Gibbs*).

Otro ejemplo que ilustra cómo un buen control en los promedios $\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt$ de una función en un intervalo nos permite obtener buenas propiedades de diferenciación, es el *teorema fundamental del cálculo*:

TEOREMA 1.1. *Si $f \in C([a, b])$ y $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, $x \in [a, b]$, es la integral definida de f , entonces $F \in C^1([a, b])$ y $F' \equiv f$.*

DEMOSTRACIÓN. Usando las propiedades elementales de la integral, estimamos el cociente incremental, con $h > 0$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt - f(x) \right| \\ &\leq \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

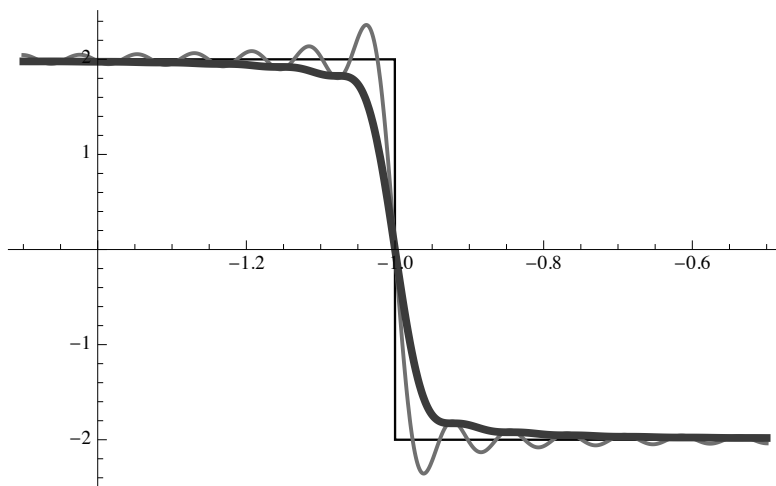


Figura 1: $S_{80}f$ (trazo fino) y $\sigma_{80}f$ (trazo grueso).

Así,

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} = f(x). \quad \square$$

Un tercer ejemplo donde el empleo de promedios es un método práctico y sencillo para obtener mejoras en la calidad digital de señales o imágenes está basado en el cálculo del valor medio de las intensidades en píxeles de un entorno cercano (en concreto, esto es un caso particular del uso de los llamados *filtros espaciales*). En la figura 2 se muestra el filtrado de una señal y en la figura 3 el de una imagen. En ambos casos la mejora obtenida es evidente.

Observamos que, en los ejemplos anteriores, al tomar promedios obtenemos una mejora en propiedades de regularidad, hay un mayor grado de suavidad en la sucesión, la función, la señal, la imagen, etc.

Este hecho se puede formalizar usando la *convolución* de dos funciones f y g , definidas en un grupo abeliano localmente compacto G , con una medida invariante por traslaciones μ (la *medida de Haar*) [13]:

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(x - y) d\mu(y).$$

Algunos ejemplos clásicos de (G, μ) son:

- Caso discreto $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/M\mathbb{Z})$ y la medida de contar.
- \mathbb{R}^n o \mathbb{T} , con la medida de Lebesgue.
- $(\mathbb{R}^+, *)$, siendo $*$ el producto usual y dt/t la medida invariante por dilataciones.

La regularidad y propiedades de aproximación de la convolución que hemos mencionado se pueden resumir, en el caso euclídeo, en los siguientes apartados (recor-

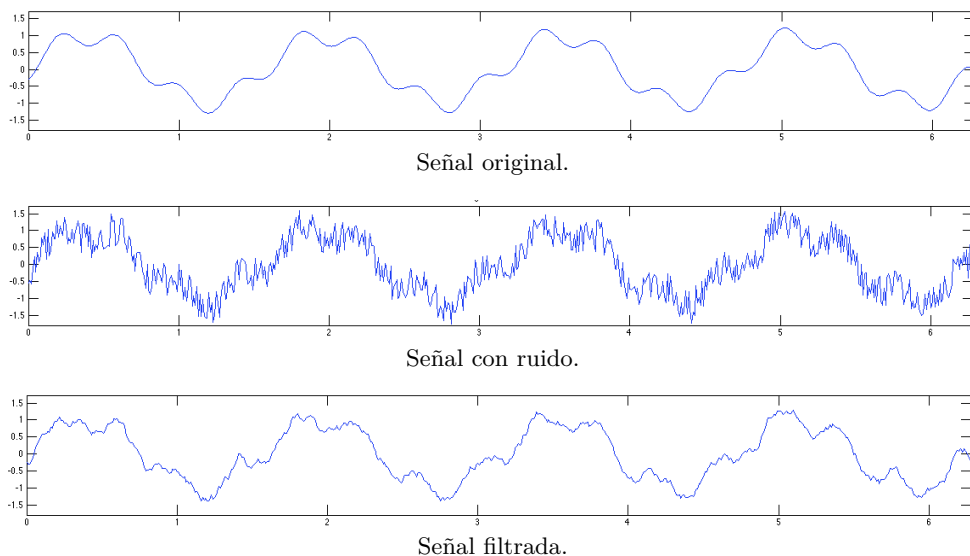


Figura 2: Filtro espacial 1D.

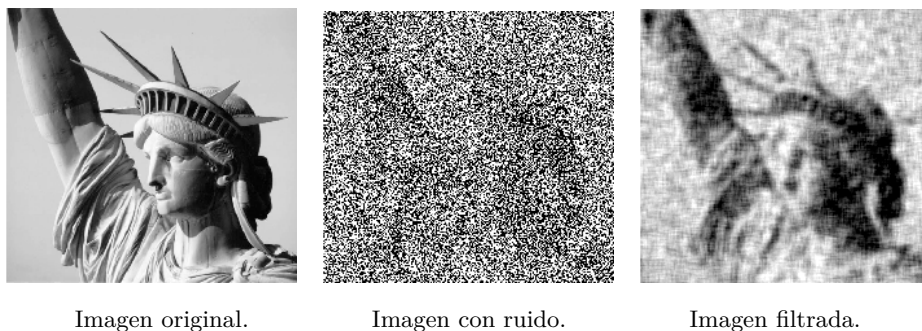


Figura 3: Filtro espacial 2D: promedios por filas y columnas.

demos que χ_A denota la función característica del conjunto A , y $|A|$ su medida de Lebesgue):

- Si $g(x) = \frac{1}{v_n} \chi_{B(0,1)}(x)$ y $g_h(x) = \frac{1}{h^n} g\left(\frac{x}{h}\right)$, donde v_n es el volumen de la bola unidad de \mathbb{R}^n , entonces

$$(f * g_h)(x) = \frac{1}{|B(x,h)|} \int_{B(x,h)} f(y) dy.$$

Así, si f es continua en x , se tiene que $\lim_{h \rightarrow 0} (f * g_h)(x) = f(x)$, que es, tal como hemos visto, el resultado principal en la demostración del teorema 1.1.

- Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, con $1/p + 1/p' = 1$, entonces

$$(f * g) \in C_0(\mathbb{R}^n).$$

En la figura 4 se muestra la gráfica (trazo grueso) de la convolución $(f * g)$ de las funciones escalonadas $f = -\chi_{(-2,-3/2)} + 2\chi_{(-3/2,1)} - \chi_{(1,2)}$ y $g = 4\chi_{(-1,-1/2)} - 2\chi_{(-1/2,3/2)} + \chi_{(3/2,3)}$. Obsérvese que $(f * g) \in C_0(\mathbb{R})$, mientras que f y g son discontinuas.

- Si $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ tiene soporte compacto y $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$(f * g) \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap C^k(\mathbb{R}^n).$$

1.2. OPERADORES MAXIMALES

La extensión del teorema 1.1 a funciones arbitrarias es conocida como *teorema de diferenciación de Lebesgue* [12]:

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\frac{1}{|B(x, h)|} \int_{B(x, h)} f(y) dy \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x), \text{ a.e. } x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

La prueba de este resultado es consecuencia de la acotación del *operador maximal de Hardy-Littlewood* [14]

$$Mf(x) = \sup_{h > 0} \frac{1}{|B(x, h)|} \int_{B(x, h)} |f(y)| dy, \tag{3}$$

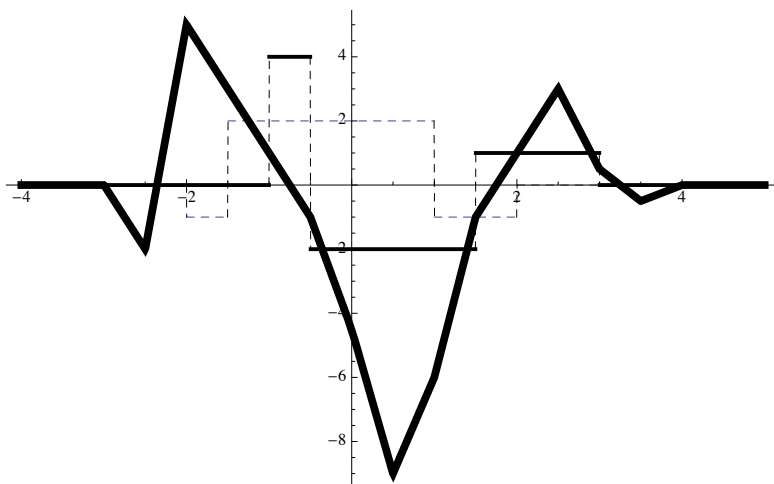


Figura 4: Gráfica de la convolución de dos funciones escalonadas.

que nos da el «mayor promedio», sobre todas las bolas centradas en el punto x , de la función $|f|$. El operador M es sublineal, positivo y acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$ (véase (10)). Sin embargo, la acotación en $L^1(\mathbb{R}^n)$ no es cierta: si $|x| \gg 0$,

$$M\chi_{B(0,1)}(x) \approx \frac{1}{|x|^n} \notin L^1(\mathbb{R}^n).$$

Es usual, en estos casos, sustituir la acotación en el extremo $p = 1$ por otra estimación más débil, mediante el control de la medida de los conjuntos de nivel de Mf (lo que se conoce como *función de distribución* de Mf):

$$\lambda_{Mf}(t) := |\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}| \leq \frac{C}{t} \|f\|_1,$$

que equivale a

$$\|Mf\|_{1,\infty} \leq C\|f\|_1, \quad (4)$$

donde el espacio de tipo débil $L^{1,\infty}$ se define por la condición

$$L^{1,\infty} = \{f : \|f\|_{1,\infty} = \sup_{t>0} t\lambda_{|f|}(t) < \infty\}.$$

Es fácil probar que $L^1 \subset L^{1,\infty}$ (*desigualdad de Chebyshev*) y que, si $p > 0$,

$$\|f\|_p^p = p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda_{|f|}(t) dt.$$

Si reemplazamos las bolas por una familia general de conjuntos \mathcal{B} (como cubos, intervalos, rectángulos, dilataciones de un conjunto convexo fijo, etc.) y definimos el correspondiente operador maximal

$$M_{\mathcal{B}}f(x) = \sup_{x \in B \in \mathcal{B}} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy,$$

se puede probar que las siguientes propiedades son, esencialmente, equivalentes [12, Chapter 6]:

- Acotaciones de $M_{\mathcal{B}}$.
- Propiedades geométricas de recubrimientos de \mathcal{B} .
- Diferenciación de integrales:

$$\lim_{\mathcal{B} \ni B \rightarrow x} \frac{1}{|B|} \int_B f(y) dy = f(x), \text{ a.e. } x.$$

Por ejemplo, si \mathcal{B} es una *base de diferenciación* (véase [12, p. 104]) y $1 < p < \infty$, entonces [12, Theorem 6.5.3]

$$\lim_{\mathcal{B} \ni B \rightarrow x} \frac{1}{|B|} \int_B f(y) dy = f(x), \text{ a.e. } x, \text{ para toda } f \in L^p,$$

si, y solo si, para todo $0 < |A| < \infty$, todo *cubrimiento de Vitali* \mathcal{V} de A (véase [12, p. 106]) formado por conjuntos de \mathcal{B} ,

$$A \subset \bigcup_{B \in \mathcal{V}} B,$$

y todo $\varepsilon > 0$, existe una sucesión $\{B_k\}_k \subset \mathcal{V}$ tal que

- $|A \setminus \bigcup_k B_k| = 0$;
- $|\bigcup_k B_k \setminus A| < \varepsilon$;
- tiene *solapamiento pequeño*, es decir,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_k \chi_{B_k}(x) - \chi_{\bigcup_k B_k}(x) \right)^{p'} dx < \varepsilon.$$

Obsérvese que $\sum_k \chi_{B_k}(x) - \chi_{\bigcup_k B_k}(x) = 0$ si, y solo si, los elementos de $\{B_k\}_k$ son disjuntos dos a dos.

Una última aplicación que nos gustaría mencionar del uso de estimaciones para operadores maximales, es la obtención de los resultados clásicos de *aproximaciones de la identidad*:

Si K es un núcleo positivo, con $\|K\|_1 = 1$ y con un buen decaimiento (en el infinito, o lejos del origen), entonces

$$(f * K_t)(x) \rightarrow f(x), \text{ a.e. } x.$$

La idea es probar que el operador maximal asociado a K ,

$$M_K f(x) = \sup_t |(f * K_t)(x)|,$$

está puntualmente acotado por el operador maximal de Hardy-Littlewood y, a partir de aquí, repetir la demostración del teorema de diferenciación de Lebesgue (2). Como aplicación podemos dar una idea de la prueba del teorema de Fejér (1). Si

$$S_n f(x) = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) e^{ikx} \quad \text{y} \quad \sigma_n f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n S_j f(x),$$

entonces $\sigma_n f(x) = (f * F_n)(x)$, donde

$$F_n(x) = \frac{1 - \cos nx}{n(1 - \cos x)}$$

es el *núcleo de Fejér*, que satisface todas las estimaciones de una «buena» aproximación de la identidad y, por lo tanto,

$$\sigma_n f(x) = (f * F_n)(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x), \text{ a.e. } x \in \mathbb{T}.$$

Es interesante observar que $S_n f(x) = (f * D_n)(x)$, donde

$$D_n(x) = \frac{\text{sen}((n+1/2)x)}{\text{sen}(x/2)}$$

es el *núcleo de Dirichlet*, para el que se verifica que $\|D_n\|_1 \approx \log n$.

2. PROMEDIOS Y MONOTONÍA

2.1. ¿POR QUÉ NOS INTERESAN LAS FUNCIONES DECRECIENTES?

Comenzamos con la siguiente cita extraída del libro [25]:

Uno de los teoremas más conocidos de Hardy y Littlewood hace referencia a la felicidad de un jugador de críquet: si tiene un mal día, puede consolarse promediando los resultados obtenidos en días anteriores. Si, por ejemplo, hoy hizo un «duck» (ningún punto), pero el día anterior consiguió 100 puntos, siempre puede decir «¡Bah!, de momento llevo 50...». Su felicidad en un día en concreto dependerá no solamente de sus últimos resultados, sino del máximo valor de una sucesión de puntuaciones promediadas... Y nos preguntamos, ¿en qué orden debería ordenar la Providencia dichas puntuaciones para darle al jugador la mayor felicidad posible?

La respuesta que dieron Hardy-Littlewood es probable que no satisficiera al clérigo preocupado por cuestiones de índole moral, aunque seguro que fue del total agrado de Hardy.

Lejos de lo que dicta el sentido común, de que hemos de ir mejorando día a día, la Providencia debería ordenar las puntuaciones en sentido decreciente (es decir, la felicidad máxima se alcanza cuanto peores nos volvamos con el paso del tiempo).

La demostración de este hecho, quizá paradójico, es en realidad un ejercicio inmediato. Dados $a = \{a_1, \dots, a_N\} \subset \mathbb{R}^+$, si reordenamos a en orden decreciente

$$a = \{a_j^*\}_{j=1, \dots, N}, \quad a_1^* \geq a_2^* \geq \dots \geq a_N^*,$$

entonces, de manera inductiva, se prueba que

$$\frac{a_1 + \dots + a_j}{j} \leq \frac{a_1^* + \dots + a_j^*}{j}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (5)$$

En general, esta desigualdad se puede extender fácilmente a promedios integrales de funciones. Para tal fin, dada f construimos su *reordenada decreciente* f^* de la siguiente manera: aproximamos $|f|$ mediante una sucesión creciente de funciones escalonadas $f_N \uparrow |f|$, reordenamos f_N como si fuera una sucesión numérica (véase la figura 5) y observamos que f_N^* converge, de manera creciente, a una función que denominamos f^* .

Las siguientes propiedades de f^* son sencillas de probar:

- f^* es la «inversa» de la función de distribución $\lambda_{|f|}$.
- Las funciones f y f^* son *equimedibles*: $|\{x : |f(x)| > s\}| = |\{t : f^*(t) > s\}|$.
- $\|f\|_p = \|f^*\|_p$.

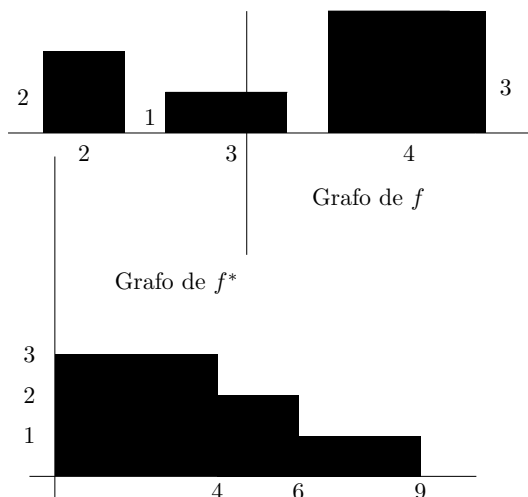


Figura 5: Reordenada decreciente de una función escalonada.

La extensión de (5), de sucesiones a funciones, se conoce como *desigualdad de Hardy-Littlewood*: si $E \subset \mathbb{R}^n$ y $|E| = t$, entonces

$$\frac{1}{|E|} \int_E |f(x)| dx \leq \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds.$$

¿Cómo se comporta la reordenación decreciente con respecto al promedio máximo? La respuesta la da el siguiente resultado fundamental, debido a F. Riesz, N. Wiener y C. Herz [3, Theorem III.3.8]:

$$(Mf)^*(t) \approx \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds, \quad t > 0. \tag{6}$$

Es decir, la reordenada del «mayor promedio» es el promedio de la reordenada. Obsérvese que de (6) se obtiene la siguiente equivalencia de «normas», de la que se deduce (4):

$$\|Mf\|_{1,\infty} = \sup_{t>0} t(Mf)^*(t) \approx \sup_{t>0} \int_0^t f^*(s) ds = \|f\|_1. \tag{7}$$

2.2. DESIGUALDADES DE HARDY

Si intentamos usar (6) para probar la acotación en L^p del operador maximal, $1 < p < \infty$, análogamente a lo que hemos hecho en (7), obtenemos

$$\|Mf\|_p = \|(Mf)^*\|_p \approx \left\| \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \right\|_p. \tag{8}$$

Así, necesitamos demostrar que

$$\left\| \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \right\|_p \leq C \|f^*\|_p. \quad (9)$$

Observamos que, de hecho, (9) es una equivalencia, pues trivialmente se tiene

$$f^*(t) \leq \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds, \quad t > 0.$$

La desigualdad (9) se demuestra a partir de las *desigualdades de Hardy* clásicas:

TEOREMA 2.1. Si $\alpha > -1$, $p > \alpha + 1$ y $p \geq 1$, entonces

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds \right)^p t^\alpha dt \leq \left(\frac{p}{p - \alpha - 1} \right)^p \int_0^\infty f(s)^p s^\alpha ds$$

para toda $f \geq 0$, y la constante es óptima.

DEMOSTRACIÓN. La demostración es una consecuencia de la desigualdad integral de Minkowski:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds \right)^p t^\alpha dt \right)^{1/p} &= \left(\int_0^\infty \left(\int_0^1 f(rt) dr \right)^p t^\alpha dt \right)^{1/p} \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^\infty f^p(rt) t^\alpha dt \right)^{1/p} dr = \left(\int_0^\infty f^p(t) t^\alpha dt \right)^{1/p} \int_0^1 r^{-(\alpha+1)/p} dr \\ &= \frac{p}{p - \alpha - 1} \left(\int_0^\infty f^p(t) t^\alpha dt \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

La optimalidad de la constante se obtiene tomando $f(t) = t^{-(\alpha+1)/p+\varepsilon} \chi_{(0,1)}(t)$ y haciendo tender $\varepsilon \rightarrow 0^+$. \square

Volviendo a (8), usando el teorema 2.1 con $\alpha = 0$ y $p > 1$, obtenemos finalmente la acotación de M en L^p :

$$\|Mf\|_p \approx \left\| \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \right\|_p \approx \|f^*\|_p = \|f\|_p. \quad (10)$$

Observamos que, en realidad, bastaría usar las desigualdades de Hardy solo en funciones positivas y decrecientes (en nuestro caso, para f^*). Este comentario merece ser estudiado con más detalle: los espacios funcionales X para los que la norma de una función solo depende de su reordenada (como es el caso de $X = L^p$), es decir,

$$\|f\|_X = \|g\|_X, \quad \text{si } f^* = g^*,$$

se denominan *invariantes por reordenamientos (r.i.)*. Esto es equivalente a la existencia de un *espacio funcional de Banach (BFS) \overline{X}* en \mathbb{R}^+ que satisfaga $\|f\|_X = \|f^*\|_{\overline{X}}$

(teorema de representación de Luxemburg [3, Theorem II.4.10]). Así, estudiar la acotación de M en un espacio X r.i. es equivalente a probar estimaciones del operador de Hardy

$$S(f^*)(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds$$

restringido a funciones decrecientes $f^* \in \overline{X}$. Un primer resultado en esta dirección es la siguiente extensión de las desigualdades de Hardy con pesos:

TEOREMA 2.2 ([1]). Si w es una función positiva, localmente integrable en \mathbb{R}^+ y $p > 0$, entonces

$$\int_0^\infty (S(f)(t))^p w(t) dt \leq C \int_0^\infty f(s)^p w(s) ds \tag{11}$$

para toda función decreciente f si, y solo si, $w \in B_p$: para todo $r > 0$,

$$\int_r^\infty \frac{w(x)}{x^p} dx \leq \frac{\|w\|_{B_p}}{r^p} \int_0^r w(x) dx, \tag{B_p}$$

donde $\|w\|_{B_p}$ es la mejor constante que satisface (B_p) .

Observamos que si $w(t) = t^\alpha$, con $-1 < \alpha < p-1$, este resultado es precisamente el teorema 2.1 restringido a funciones decrecientes. En particular, si definimos el espacio de Lorentz

$$\Lambda^p(w) = \left\{ f : \|f\|_{\Lambda^p(w)} = \left(\int_0^\infty f^*(t)^p w(t) dt \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

y el espacio de Lorentz de tipo débil

$$\Lambda^{p,\infty}(w) = \left\{ f : \|f\|_{\Lambda^{p,\infty}(w)} = \sup_{t>0} f^*(t) \left(\int_0^t w(s) ds \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

(nótese que si $w \equiv 1$, entonces $\Lambda^p(w) = L^p$ y $\Lambda^{p,\infty}(w) = L^{p,\infty}$), son conocidas las siguientes equivalencias entre propiedades funcionales de estos espacios, acotaciones del operador maximal M y desigualdades de Hardy en funciones decrecientes:

TEOREMA 2.3.

([21]) $p > 1$: $\Lambda^p(w)$ es un BFS $\iff w \in B_p \iff M : \Lambda^p(w) \rightarrow \Lambda^{p,\infty}(w)$.

([10]) $p = 1$: $\Lambda^1(w)$ es un BFS $\iff M : \Lambda^1(w) \rightarrow \Lambda^{1,\infty}(w)$.

([22]) $p > 0$: $\Lambda^{p,\infty}(w)$ es un BFS $\iff w \in B_p \iff M : \Lambda^p(w) \rightarrow \Lambda^p(w)$.

Este resultado se puede resumir diciendo que el espacio «fuerte» $\Lambda^p(w)$ es normable si, y solo si, $p \geq 1$ y el operador maximal es de tipo «débil»; y el espacio «débil» $\Lambda^{p,\infty}(w)$ es normable si, y solo si, $p > 0$ y el operador maximal es de tipo «fuerte».

3. PROMEDIOS Y OSCILACIONES

3.1. ¿POR QUÉ NOS INTERESAN LAS OSCILACIONES?

Empezaremos viendo un par de ejemplos, extraídos del ámbito del Análisis Armónico y de las EDPs, en los que un buen control de la oscilación de la reordenada de una función nos permite obtener resultados de inclusiones óptimas.

Uno de los espacios más importantes en Análisis, que mide la oscilación de una función, es el espacio de *oscilaciones de medias acotadas (BMO)*, que se define mediante la condición

$$\text{BMO} = \left\{ f : \|f\|_{\text{BMO}} = \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx \right) < \infty \right\},$$

donde, como es habitual, usamos Q para denotar cubos de \mathbb{R}^n y $f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx$. Aunque BMO no es un espacio r.i., se conocen estimaciones locales de la reordenada de una función de BMO [2]: si $\text{sop } f \subset Q_0$ y

$$f^\sharp(x) = \sup_{x \in Q \subset Q_0} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q| dy \right),$$

entonces

$$S(f^*)(t) - f^*(t) \leq c(f^\sharp)^*(t), \quad 0 < t < \frac{|Q_0|}{6}, \quad (12)$$

con c una constante que solo depende de la dimensión n . En particular, si

$$W(Q_0) = \left\{ f : \|f\|_{W(Q_0)} = \sup_{t>0} (S(f^*)(t) - f^*(t)) < \infty \right\},$$

entonces $W(Q_0)$ es la envolvente r.i. del espacio $\text{BMO}(Q_0)$ (¡aunque W no es un espacio vectorial!) y

$$L^\infty(Q_0) \subset \text{BMO}(Q_0) \subset W(Q_0) \subset L_{\text{exp}}(Q_0), \quad (13)$$

donde

$$\|f\|_{L_{\text{exp}}(Q_0)} = \sup_{0 < t < |Q_0|} \frac{S(f^*)(t)}{1 + \log(|Q_0|/t)}$$

y la última inclusión de (13) es consecuencia de la *desigualdad de John-Nirenberg* [3, Proposition V.8.6]. Así, de (12) podemos decir que $S(f^*)(t) - f^*(t)$ mide, de alguna manera, la oscilación de f^* . En otras palabras, la oscilación de la reordenada decreciente de una función no es mayor que la de la propia función.

Otro ejemplo en el que la diferencia $S(f^*)(t) - f^*(t)$ juega un papel relevante es en la demostración de las *inclusiones de Sobolev* en el extremo $p = n$, mediante el uso del *principio de simetrización de Pólya-Szegö* [16]:

$$S(f^*)(t) - f^*(t) \leq \sqrt{n} t^{1/n} S((|\nabla f|)^*)(t).$$

En particular, si $|\Omega| < \infty$, entonces

$$W_0^{1,n}(\Omega) \subset L^{\infty,n}(\Omega) \subset BW_n(\Omega),$$

donde $W_0^{1,n}(\Omega)$ es el espacio de Sobolev

$$W_0^{1,n}(\Omega) = \left\{ f \in L^n(\Omega) : f \text{ se anula en } \partial\Omega, \|f\|_{W_0^{1,n}(\Omega)} = \|f\|_n + \|\nabla f\|_n < \infty \right\},$$

$L^{\infty,n}$ se define como

$$\|f\|_{\infty,n} = \left\| t^{-1/n} (S(f^*)(t) - f^*(t)) \right\|_n$$

y BW_n es el espacio de Maz'ya-Hansson-Brézis-Wainger

$$\|f\|_{BW_n} = \left(\int_0^1 \left(\frac{f^*(t)}{\log(e/t)} \right)^n \frac{dt}{t} \right)^{1/n}.$$

Es decir, el espacio $L^{\infty,n}$, descrito en términos de $S - \text{Id}$, mejora la inclusión clásica de Sobolev $W_0^{1,n}(\Omega) \subset BW_n(\Omega)$.

3.2. EL OPERADOR DE OSCILACIÓN: $S - \text{Id}$

En los últimos años, y motivado por los resultados vistos en la sección 3.1, ha habido un creciente interés en el estudio de propiedades funcionales de los «espacios» definidos en términos del *operador de oscilación*

$$(S - \text{Id})(f), \quad f \downarrow,$$

como $L^{\infty,n}$ [11] (la figura 6 nos muestra un ejemplo de que la función $S(f) - f$, con f decreciente, no es en general decreciente y puede presentar una gran oscilación). Con más generalidad, también se han estudiado acotaciones del operador de Hardy menos la identidad en X_{dec} , el cono de las funciones decrecientes de X ,

$$\|S(f) - f\|_X \leq C\|f\|_{X_{\text{dec}}}$$

(denotaremos por $\|S - \text{Id}\|_{X_{\text{dec}}}$ la mejor constante en la desigualdad anterior). En particular, si $X = L^p$ se conocen las siguientes estimaciones:

TEOREMA 3.1. ([18]) Si $p \in \{2, 3, \dots\}$, entonces

$$\|S - \text{Id}\|_{L_{\text{dec}}^p} = \frac{1}{(p-1)^{1/p}}.$$

([5]) Si $p \geq 2$ o $p = 1$, y $w \in B_p$ es decreciente, entonces

$$\|S - \text{Id}\|_{L_{\text{dec}}^p(w)} = \|w\|_{B_p}^{1/p}.$$

([17]) Si $1 < p \leq 2$, entonces

$$\|S - \text{Id}\|_{L_{\text{dec}}^p} = \frac{1}{p-1}.$$

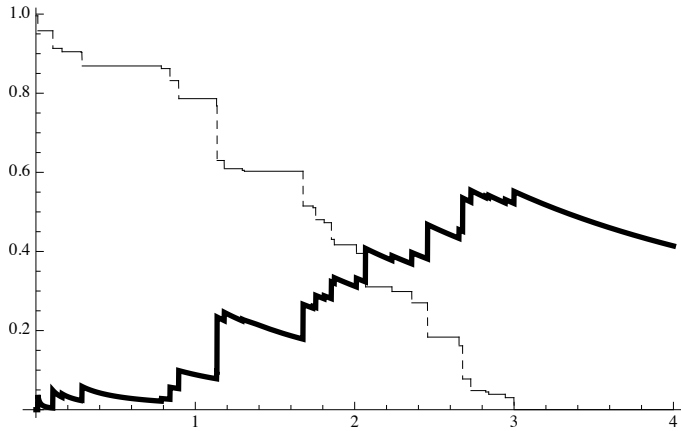


Figura 6: Ejemplo de f decreciente (trazo fino) y $S(f) - f$ (trazo grueso).

Otras estimaciones que se conocen en los espacios de Lorentz de tipo restringido $L^{p,1}$ son las siguientes (recordemos que el espacio de Lorentz $L^{p,q}$ corresponde al caso $\Lambda^q(w)$, con el peso potencia $w(t) = t^{q/p-1}$):

TEOREMA 3.2 ([23]). Si $1 < p < \infty$ y $1 \leq q \leq p$, entonces

$$\|Sf - f\|_{L^{p,q}} \leq p^{-1/q'} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{(p-1)q}{p}\right)\Gamma\left(\frac{p+q}{p}\right)}{\Gamma(q+1)} \right)^{1/q} \|f\|_{L_{\text{dec}}^{p,1}}$$

(donde Γ es la función Gamma) y la desigualdad es óptima. En particular, si $p > 1$,

$$\|Sf - f\|_{L^p} \leq \frac{1}{p(p-1)^{1/p}} \|f\|_{L_{\text{dec}}^{p,1}}$$

y

$$\|Sf - f\|_{L^{p,1}} \leq \frac{\pi}{p \operatorname{sen}(\pi/p)} \|f\|_{L_{\text{dec}}^{p,1}};$$

es decir,

$$\|S - \operatorname{Id}\|_{L_{\text{dec}}^{p,1}} = \frac{\pi}{p \operatorname{sen}(\pi/p)}.$$

3.3. CASO ISOMÉTRICO: $p = 2$

El caso $p = 2$ del teorema 3.1 nos da la estimación $\|Sf - f\|_{L^2} \leq \|f\|_{L_{\text{dec}}^2}$. Sin embargo, mucho más se puede decir: $S - \operatorname{Id}$ es una isometría; i.e., para todas las funciones $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ (véase [8]),

$$\|Sf - f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

El mismo resultado es también válido para el operador de Hardy adjunto

$$S^*f(t) = \int_t^\infty f(s) \frac{ds}{s}.$$

Esto nos lleva a considerar la propiedad de isometría en L^2 , para operadores integrales de la forma

$$T_K f(t) = \int_0^\infty K(t, s) f(s) ds.$$

El hecho de que nos restrinjamos a L^2 se debe a que es, esencialmente, el único espacio r.i. para el que existen isometrías no triviales [26, 15].

TEOREMA 3.3 ([6]). *Los siguientes resultados son equivalentes:*

- (i) $T_K - \text{Id}$ es una isometría en $L^2(\mathbb{R}^+)$.
- (ii) $T_K - \text{Id}$ es una isometría en $L^2_{\text{dec}}(\mathbb{R}^+)$.
- (iii) Para todo $r, s > 0$,

$$\int_0^\infty K(x, r)K(x, s) dx = K(r, s) + K(s, r). \tag{14}$$

OBSERVACIONES 3.4.

- Para que la condición (14) sea válida en todo punto, el núcleo K ha de ser convenientemente normalizado. Por ejemplo, si consideramos el operador de Hardy

$$T_K f(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds,$$

entonces

$$K(t, s) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{si } s < t, \\ \frac{1}{2t} & \text{si } s = t, \\ 0 & \text{si } s > t. \end{cases}$$

- Es fácil probar que T es una isometría en un espacio de Hilbert si, y solo si, $T^*T = \text{Id}$. A partir de este resultado la condición (iii) es inmediata, y válida en cualquier espacio $L^2(X, d\mu)$.
- La parte más interesante del teorema 3.3 consiste en probar que es suficiente restringir $T_K - \text{Id}$ al cono de funciones decrecientes, ya que no es cierto que, para un T_K general,

$$\|T_K(f) - f\|_{L^2} = \|T_K(f^*) - f^*\|_{L^2}.$$

Por ejemplo, basta considerar el caso del operador de Hardy iterado:

$$T_K f(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \left(\frac{1}{s} \int_0^s f(x) dx \right) ds = \frac{1}{t} \int_0^t \log \left(\frac{t}{x} \right) f(x) dx.$$

EJEMPLOS 3.5.

- Operadores de convolución: el operador $T_K f(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x-y)f(y) dy$, con

$$K(x) = \frac{\text{sen}(2\pi^2 x)}{\pi x(2\pi x + 1)} \in L^1(\mathbb{R}),$$

satisface que $T_K - \text{Id}$ es una isometría en $L^2(\mathbb{R})$. Esto también se puede probar usando el teorema de Plancherel y que

$$\widehat{K}(\xi) = (1 + e^{i\xi})\chi_{[-\pi, \pi]}(\xi).$$

Así,

$$|\widehat{K}(\xi) - 1| = 1, \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}.$$

En particular, (14) nos da la identidad

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\text{sen}(2\pi^2(x-r))}{(x-r)(2\pi(x-r)+1)} \frac{\text{sen}(2\pi^2 x)}{x(2\pi x+1)} dx = \frac{2\pi \text{sen}(2\pi^2 r)}{r(1-(2\pi r)^2)}.$$

- Consideramos ahora operadores T_K asociados a funciones características; i.e., con núcleos de la forma $K(x, y) = \chi_E(x, y)$, siendo $E \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ un conjunto medible. En particular, fijado $N \in \mathbb{N}$, si \widetilde{E}_N está generado por una unión de cuadrados unidad de la forma $[j, j+1] \times [k, k+1]$, con $j, k \in \{0, \dots, N-1\}$, y

$$E_N = \bigcup_{l=0}^{\infty} (\widetilde{E}_N + (lN, lN)),$$

es decir, \widetilde{E}_N se repite periódicamente a lo largo de la diagonal $y = x$, se puede probar que los ejemplos de las figuras 7 y 8 representan todos los casos posibles de los conjuntos E_N , con $N = 3$ y 4 respectivamente, para los que $T_K - \text{Id}$ es una isometría en $L^2(\mathbb{R}^+)$.

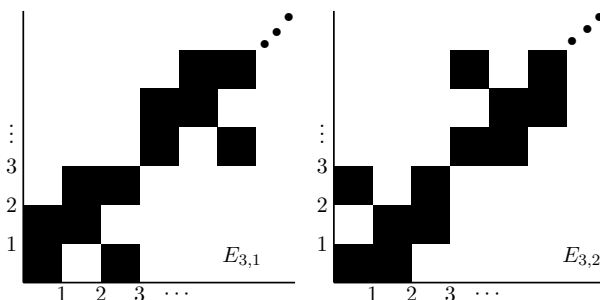


Figura 7: Conjuntos generados por un período 3×3 .

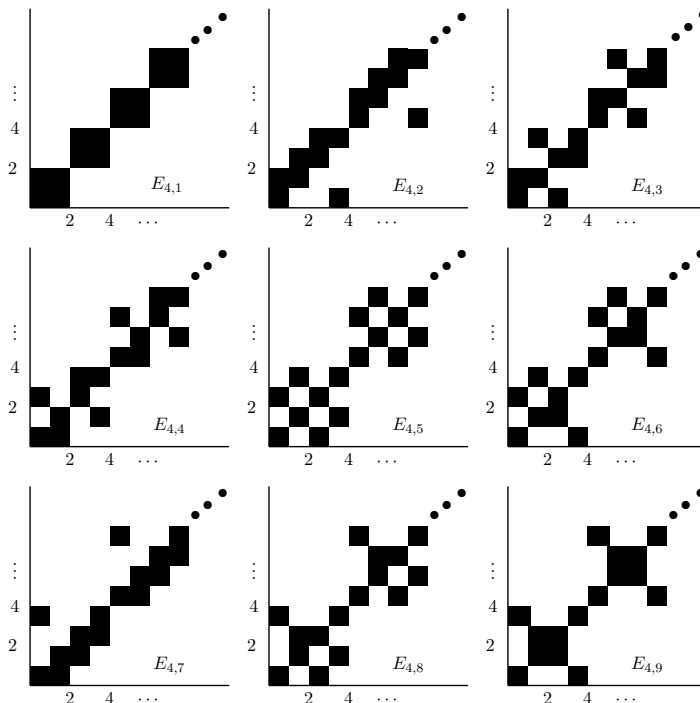


Figura 8: Conjuntos generados por un período 4×4 .

4. PROBLEMAS ABIERTOS

Terminamos enumerando una serie de preguntas que nos parecen interesantes y que recogen aspectos fundamentales de las diversas técnicas y principales resultados que hemos ido viendo en las secciones anteriores:

(a) ¿Para qué núcleos K el operador maximal

$$M_K f(x) = \sup_t |(f * K_t)(x)|$$

es de tipo débil $(1,1)$? Es decir, $M_K : L^1 \rightarrow L^{1,\infty}$. ¿Cuándo se verifica que $(f * K_t)(x) \rightarrow f(x)$, a.e. x ?

Se conocen algunas condiciones necesarias o suficientes:

- Si K es una función radial tal que $K(x)|x|^{-\alpha}$ es decreciente, para algún $\alpha \geq 0$, y $\|K\|_1 = 1$, entonces ambas propiedades son ciertas.
- Si $K \in L^1(\mathbb{R})$ es un núcleo continuo y $M_K : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^{1,\infty}(\mathbb{R})$, entonces $|K(x)| \leq C/|x|$ (véase [9]).
- Si $K \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, con $\|K\|_1 = 1$, y $(f * K_t)(x) \rightarrow f(x)$ en los

puntos de Lebesgue de toda función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces (véase [4])

$$\tilde{K}(x) = \sup_{|t| \leq |x|} |K(t)| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

(b) ¿Cuál es la mejor constante C_n en la desigualdad de tipo débil

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}| \leq \frac{C_n}{t} \|f\|_1,$$

donde Mf es el operador maximal de Hardy-Littlewood definido en (3)?

- Se sabe que $C_n = O(n)$ (véase [24]).
- Solo se conoce el valor para $n = 1$ (véase [19]):

$$C_1 = \frac{11 + \sqrt{61}}{12}.$$

(c) ¿Cuál es la mejor constante $C = \|S\|_{L^p_{\text{dec}}(w)}^p$ en (11)? Se sabe que

$$(1 + \|w\|_{B_p})^{1/p} \leq C^{1/p} \leq 1 + \|w\|_{B_p}$$

(la desigualdad inferior sale de coger la característica del intervalo $(0, r)$ y la superior, que no es inmediata, puede verse, explícitamente, en [20]).

(d) Si $1 < p < 2$ y $w \in B_p$ es un peso decreciente, ¿cuánto vale $\|S - \text{Id}\|_{L^p_{\text{dec}}(w)}$? A diferencia de lo que se probó en el teorema 2.1, este resultado no se conoce ni siquiera para el caso de pesos potencias $w(t) = t^\alpha$, $-1 < \alpha < 0$. Las estimaciones que se pueden probar en este caso son

$$\|w\|_{B_p}^{1/p} \leq \|S - \text{Id}\|_{L^p_{\text{dec}}(w)} \leq \frac{\|w\|_{B_p}^{1/p}}{(p-1)^{1/p'}}.$$

(e) ¿Para qué espacios de medida $(X, d\mu)$ existen operadores T_K que son promedios, es decir,

$$\int_X K(t, s) d\mu(s) = 1, \text{ a.e. } t \in X,$$

y tales que $T_K - \text{Id}$ es una isometría en $L^2(X, d\mu)$? Es inmediato probar que, si tal operador existe, necesariamente $\mu(X) = \infty$. ¿Es cierto el recíproco?

Es claro que, en \mathbb{R}^n , extensiones radiales del operador de Hardy nos dan ejemplos válidos. Sin embargo, el mismo argumento en \mathbb{N} no funciona: el operador discreto de Hardy (que es un operador de promedio)

$$S_d(\{a_m\}_{m \in \mathbb{N}})(n) = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

no satisface dicha propiedad (basta considerar $\{a_m\}_{m \in \mathbb{N}} = \{1, 0, 0, \dots\}$).

REFERENCIAS

- [1] M. A. ARIÑO Y B. MUCKENHOUPT, Maximal functions on classical Lorentz spaces and Hardy's inequality with weights for nonincreasing functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **320** (1990), 727–735.
- [2] C. BENNETT, R. A. DEVORE Y R. SHARPLEY, Weak- L^∞ and BMO, *Ann. of Math. (2)* **113** (1981), 601–611.
- [3] C. BENNETT Y R. SHARPLEY, *Interpolation of operators*, Pure and Applied Mathematics **129**, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.
- [4] P. A. BOO, Necessary conditions for the convergence almost everywhere of convolutions with approximation identities of dilation type, *University of Umeå*, 1978.
- [5] S. BOZA Y J. SORIA, Solution to a conjecture on the norm of the Hardy operator minus the identity, *J. Funct. Anal.* **260** (2011), 1020–1028.
- [6] S. BOZA Y J. SORIA, Isometries on $L^2(X)$ and monotone functions, *Math. Nachr.* **287** (2014), 160–172.
- [7] H. BRÉZIS, *Análisis funcional: teoría y aplicaciones*, Alianza Universidad: Textos **88**, Alianza Editorial, Madrid, 1984.
- [8] A. BROWN, P. R. HALMOS Y A. L. SHIELDS, Cesàro operators, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **26** (1965), 125–137.
- [9] M. T. CARRILLO, *Operadores maximales de convolución*, tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid, 1979.
- [10] M. J. CARRO, A. GARCÍA DEL AMO Y J. SORIA, Weak-type weights and normable Lorentz spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **124** (1996), 849–857.
- [11] M. J. CARRO, A. GOGATISHVILI, J. MARTÍN Y L. PICK, Functional properties of rearrangement invariant spaces defined in terms of oscillations, *J. Funct. Anal.* **229** (2005), no. 2, 375–404.
- [12] M. DE GUZMÁN, *Differentiation of integrals in \mathbb{R}^n* , Lecture Notes in Mathematics **481**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.
- [13] P. R. HALMOS, *Measure Theory*, Graduate Texts in Mathematics **18**, Springer, New York, 1974.
- [14] G. H. HARDY Y J. E. LITTLEWOOD, A maximal theorem with function-theoretic applications, *Acta Math.* **54** (1930), 81–116.
- [15] N. J. KALTON Y B. RANDRIANANTOANINA, Surjective isometries on rearrangement-invariant spaces, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **45** (1994), 301–327.
- [16] V. I. KOLYADA, Estimates for rearrangements and embedding theorems, *Mat. Sb. (N.S.)* **136 (178)** (1988), 3–23; traducido al inglés en *Math. USSR-Sb.* **64** (1989), 1–21.
- [17] V. I. KOLYADA, Optimal relationships between L^p -norms for the Hardy operator and its dual, *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* **193** (2014), 423–430.
- [18] N. KRUGLYAK Y E. SETTERQVIST, Sharp estimates for the identity minus Hardy operator on the cone of decreasing functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **136** (2008), 2505–2513.

- [19] A. D. MELAS, The best constant for the centered Hardy-Littlewood maximal inequality, *Ann. of Math. (2)* **157** (2003), 647–688.
- [20] C. J. NEUGEBAUER, Weighted variable L^p integral inequalities for the maximal operator on non-increasing functions, *Studia Math.* **192** (2009), 51–60.
- [21] E. SAWYER, Boundedness of classical operators on classical Lorentz spaces, *Studia Math.* **96** (1990), 145–158.
- [22] J. SORIA, Lorentz spaces of weak-type, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **49** (1998), 93–103.
- [23] J. SORIA, Optimal bounds of restricted type for the Hardy operator minus the identity on the cone of radially decreasing functions, *Studia Math.* **197** (2010), 69–79.
- [24] E. STEIN Y J.-O. STRÖMBERG, Behavior of maximal functions in \mathbb{R}^n for large n , *Ark. Mat.* **21** (1983), 259–269.
- [25] L. C. YOUNG, *Mathematicians and their times*, North-Holland Mathematics Studies **48**, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1981.
- [26] M. G. ZAIDENBERG, A representation of isometries on function spaces, *Mat. Fiz. Anal. Geom.* **4** (1997), 339–347.
- [27] A. ZYGMUND, *Trigonometric series*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

SANTIAGO BOZA, DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA IV, UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA, CAMPUS NORD, EDIFICIO C3, C/ JORDI GIRONA, 1-3, 08034 BARCELONA
Correo electr3nico: boza@ma4.upc.edu

JAVIER SORIA, DEPARTAMENTO DE MATEMÀTICA APLICADA Y ANÁLISIS, UNIVERSIDAD DE BARCELONA, AVDA. GRAN VÍA, 585, 08007 BARCELONA
Correo electr3nico: soria@ub.edu
Pàgina web: <http://www.maia.ub.es/~soria>