La Olimpiada Matemática

Sección a cargo de

María Gaspar

43 Olimpiada Internacional de Matemáticas

por

Juan Manuel Conde Calero

La Olimpiada Internacional (IMO) ha cumplido este año su 43^a edición y se ha celebrado en Glasgow (Escocia) del 19 al 30 de julio.

Los participantes en este concurso internacional son jóvenes que no están realizando estudios universitarios o equivalentes, que no hayan cumplido 20 años antes de las fechas de las pruebas y que hayan sido elegidos (normalmente ganadores de las olimpiadas nacionales previas y de concursos de selección) para formar parte del equipo del país que representan. Los fines de la olimpiada (IMO) de forma sucinta son: 1°. Descubrir, potenciar y estimular a jóvenes talentos para las matemáticas de todos los países del mundo. 2°. Establecer y fomentar lazos académicos y de amistad entre los profesores de los distintos países. 3°. Crear la oportunidad para el intercambio de información de los diferentes programas educativos en matemáticas y la forma de llevarlos a la práctica.

Han participado 479 estudiantes de 84 países. Cada equipo está formado por un máximo de seis estudiantes. De manera no oficial se obtienen las puntuaciones de cada pais como suma de las puntuaciones de los estudiantes del equipo, pero la IMO es esencialmente una prueba individual. Consiste en en resolver seis problemas en dos sesiones de cuatro horas y media de duración. Cada problema se valora entre 0 y 7 puntos.

Las dos sesiones tuvieron lugar en "The Scottish Exhibition and Conference Centre" de Glasgow los días 24 y 25 de julio.

El equipo español estaba formado por los seis ganadores de la XXXVIII Olimpiada Matemática Española (OME) que se celebró en Logroño del 4 al 7 de abril de este año que a continuación se indican:

Daniel Rodrigo López (Montcada i Reixac, Barcelona), Luis Hernández Corbato (Madrid), Sergio Millán López (L'Hospitalet de Llobregat, Barcelona), David García Soriano (Madrid), Susana Ladra González (Santiago), y

José Miguel Manzano Prego (Motril, Granada). Los profesores acompañantes han sido María Gaspar como Jefe de Delegación y Juan Manuel Conde como Jefe Adjunto.

El equipo acompañado por el jefe adjunto llegó a Glasgow el día 22 de julio, y fueron alojados en la Universidad de Strathclyde. El día siguiente se realizó una pequeña sesión de preparación por la mañana. La preparación de estos estudiantes y la de los que obtuvieron medalla de plata o bronce en la OME y pueden seguir participando, se realizó en la Universidad Politécnica de Cataluña en la primera quincena de julio.

En la Olimpiada Internacional, las medallas de oro, plata y bronce se otorgan aproximadamente a la mitad de los participantes sin superar la razón 1:2:3. La medalla de oro se ha concedido a partir de los 29 puntos (39 estudiantes); la de plata entre los 23 y 28 puntos inclusive (73 estudiantes) y la de bronce entre los 14 y los 22 puntos inclusive (120 estudiantes). La puntuación máxima de 42 puntos la han alcanzado sólo tres concursantes, dos del equipo chino y uno del equipo ruso. Reciben además Mención Honorífica los estudiantes que, sin obtener medalla, resuelven completamente algún problema (siete puntos). Ha habido 66 Menciones.

Luis Hernández Corbato ha obtenido una medalla de bronce con 16 puntos y Sergio Millán López una Mención Honorífica por el cuarto problema.

El Jurado Internacional, presidido por el Profesor Adam McBride, trabajó desde el día 19 con la lista de 27 problemas, para seleccionar los seis propuestos, que han sido los siguientes:

Primer día: 24 de julio de 2002

Problema 1 (Propuesto por Colombia)

Sea n un entero positivo. Sea T el conjunto de puntos (x, y) del plano tales que x e y son enteros no negativos con $x + y < n$. Cada punto de T se colorea de azul o rojo. Si un punto (x, y) es rojo, entonces también son rojos todos los puntos (x', y') de T tales que $x' \leq x$ y $y' \leq y$.

Se dice que un conjunto de n puntos azules es de tipo X si las coordenadas x de sus puntos son todas distintas. Se dice que un conjunto de n puntos azules es de tipo Y si las coordenadas y de sus puntos son todas distintas.

Demostrar que el número de conjuntos de tipo X es igual al número de conjuntos de tipo Y.

Problema 2 (Propuesto por Corea)

Sea BC un diámetro de la circunferencia Γ de centro O. Sea A un punto de Γ tal que $0° < \angle AOB < 120°$. Sea D el punto medio del arco AB que no contiene a C. La recta que pasa por O y es paralela a DA intersecta a la recta AC en J. La mediatriz de OA intersecta a Γ en E y en F.

Demostrar que J es el incentro del triángulo CEF.

Problema 3 (Propuesto por Rumanía)

Hallar todas las parejas de enteros $m, n \geq 3$ para las cuales existen infinitos enteros positivos a tales que

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

es entero.

Segundo día: 25 de julio de 2002

Problema 4 (Propuesto por Rumanía)

Sea n un entero mayor que 1. Los divisores positivos de n son $d_1, d_2, ..., d_k$ con

$$1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n$$

Se define $D = d_1 d_2 + d_2 d_3 + ... + d_{k-1} d_k$.

(a) Demostrar que $D < n^2$

(b) Determinar todos los números n tales que D es un divisor de n^2.

Problema 5 (Propuesto por India)

Sea $\mathbf{R}$ el conjunto de los números reales. Hallar todas las funciones f de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ tales que

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

para todos los x, y, z, t en $\mathbf{R}$.

Problema 6 (Propuesto por Ucrania)

En el plano, sean $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$ circunferencias de radio 1, con $n \geq 3$. Sean sus centros $O_1, O_2, ..., O_n$ respectivamente. Supongamos que ninguna recta del plano intersecta a más de dos de las circunferencias dadas. Demostrar que

$$\sum \frac{1}{O_i O_j} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}$$

Los esquemas de puntuación de cada problema han estado muy polarizados entre el 0 + y el 7 -; es decir, que no se daba ningún punto por el estudio de casos especiales y se restaban puntos por no indicar explícitamente aspectos o casos particulares. Es difícil por tanto encontrar puntuaciones de tres o cuatro puntos en cualquiera de los problemas, excepto en el cuarto, que tenía dos apartados.

Las medias por problema y las frecuencias de puntuación han sido las que siguen:

	P1	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**
0	179	173	311	106	97	408
1	39	46	145	45	159	21
2	11	1	1	14	101	25
3	11	4	2	38	21	12
4	8	0	0	70	0	0
5	15	6	4	8	10	1
6	61	128	2	20	25	0
7	155	120	14	175	66	12
media	3,45	3,56	0,59	3,90	2,27	0,41

La próxima Olimpiada Internacional se celebrará en Japón en julio de 2003.

Juan Manuel Conde Calero
Dpto. Análisis Matemático y Matemática Aplic.
Universidad de Alicante
Apdo. Correos, 99
03080 Alicante
correo electrónico: `jm.conde@ua.es`

País	pt.	O	P	B	MH	País	pt.	O	P	B	MH
Albania	25	0	0	1	0	Kazajstán	133	0	3	3	0
Alemania	144	2	0	2	1	Kuwait	2	0	0	0	0
Argentina	96	0	0	5	0	Kirguizistán	17	0	0	0	1
Armenia	33	0	0	0	1	Latvia	75	0	1	2	2
Australia	117	1	2	1	1	Lituania	74	0	1	2	1
Austria	50	0	0	1	3	Luxemburgo	12	0	0	0	1
Azerbaiján	37	0	0	1	1	Macao	50	0	0	3	0
Bélgica	58	0	0	1	3	Macedonia	73	0	1	1	1
Belorrusia	135	1	2	3	0	Malasia	26	0	0	0	1
Bosnia	42	0	0	1	0	Marruecos	36	0	0	1	1
Brasil	123	0	1	5	0	Méjico	67	0	0	3	0
Bulgaria	167	3	2	1	0	Moldavia	60	0	0	2	0
Canadá	142	1	3	1	1	Mongolia	82	1	0	0	4
China	212	6	0	0	0	Noruega	72	1	0	1	1
Chipre	29	0	0	0	0	Nueva Zelanda	82	1	0	0	4
Colombia	81	0	0	3	3	Países Bajos	55	0	0	1	1
Corea	163	1	5	0	0	Paraguay	11	0	0	0	1
Croacia	70	0	0	2	1	Perú	59	0	0	2	0
Cuba	78	0	0	2	3	Polonia	123	0	4	1	1
Dinamarca	53	0	0	0	3	Portugal	15	0	0	0	0
Ecuador	3	0	0	0	0	Puerto Rico	17	0	0	0	0
EEUU	171	4	1	0	1	Reino Unido	116	0	2	2	0
Eslovaquia	119	0	2	4	0	Rep. Checa	115	0	2	3	0
Eslovenia	46	0	0	1	1	Rumanía	157	2	3	1	0
España	44	0	0	1	1	Rusia	204	6	0	0	0
Estonia	75	0	2	0	2	Singapur	112	0	2	2	1
Filipinas	18	0	0	0	1	Sri Lanka	16	0	0	0	1
Finlandia	79	0	0	3	3	Sudáfrica	90	0	1	3	0
Francia	127	0	2	3	0	Suecia	60	0	0	2	1
Georgia	84	0	0	2	2	Suiza	44	0	0	1	2
Grecia	62	0	0	2	0	Tailandia	123	0	2	2	2
Guatemala	4	0	0	0	0	Taiwán	161	1	4	1	0
Hong Kong	120	1	2	2	0	Trinidad-To	22	0	0	0	0
Hungría	142	1	2	3	0	Túnez	22	0	0	0	1
India	156	1	3	2	0	Turkmenistán	45	0	0	1	1
Indonesia	38	0	0	1	1	Turquía	135	1	1	4	0
Irán	143	0	4	2	0	Ucrania	124	1	3	0	0
Irlanda	25	0	0	0	1	Uruguay	1	0	0	0	0
Islandia	36	0	0	0	3	Uzbequistán	60	0	0	0	2
Israel	130	0	3	3	0	Venezuela	56	0	1	1	1
Italia	88	0	0	5	1	Vietnam	166	3	1	2	0
Japón	133	1	3	1	0	Yugoslavia	114	0	1	5	0

Otros problemas de la I.M.O. de Washington 2001

por

Mercedes Sánchez Benito

Todos los años, en la Olimpiada Internacional, se celebran varias reuniones del Jurado Internacional para seleccionar los problemas que se propondrán a los estudiantes. Previamente se ha elaborado una colección de problemas, por supuesto inéditos, que se presenta con el nombre de *"short list"* en la cual los problemas están clasificados en cuatro grandes bloques: Álgebra, Combinatoria, Geometría y Números. Hay un compromiso no escrito de no hacer públicos los problemas que están en esa *"short list"* en el plazo de un año. Es un material muy valioso; son problemas que no se eligieron por causas muy variadas, –unos por razones estéticas, otros por parecerse a algún problema conocido ...–, en definitiva porque hay que elegir sólo 6. Fueron descartados en su día, y, sin embargo, también podrían haber sido seleccionados.

Pienso que es un material muy interesante que no hay que ocultar, no sólo por aquello de que *" en las habitaciones cerradas todo se enmohece"* sino porque es muy útil para futuros participantes de la Olimpiada Internacional y también,–¿por qué no?–, para todos aquéllos a los que nos gusta resolver problemas. Creo que en ningún caso hay que entender que la finalidad sea resolver el problema, sino aprender de la situación que plantea. La tarea no se acaba cuando se ha obtenido la solución sino cuando ya no se puede aprender nada nuevo.

En la Olimpiada de Washington nos presentaron una *"short list"* en la que había seis problemas de Álgebra, ocho de Combinatoria, ocho de Geometría y seis de Números, de los cuales se seleccionaron dos problemas de Geometría, dos de Combinatoria, uno de Álgebra y uno de Números, como ya saben todos los lectores de esta sección.

Ya ha habido otra Olimpiada, ha pasado más de un año, y ya podemos dar a conocer dichos problemas. Voy a seleccionar algunos que podrían haber sido elegidos, una olimpiada alternativa que pudo ser y no fue.

1. Sea ABC un triángulo acutángulo, y sea O un punto interior. El punto A_1 está sobre el lado BC de modo que OA_1 es perpendicular a BC. Se definen B_1 sobre CA y C_1 sobre AB, de forma análoga. Prueba que O es el centro de la circunferencia circunscrita si y sólo si el perímetro del triángulo $A_1B_1C_1$ es mayor o igual que cada uno de los perímetros de los triángulos AB_1C_1, BA_1C_1 y CA_1B_1.

2. Sean $x_1, x_2, \cdots, x_n$ números reales cualesquiera. Prueba la siguiente desigualdad:
$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \cdots + \frac{x_n}{1+x_1^2+\ldots+x_n^2} < \sqrt{n}.$$

3. Encuentra todos los enteros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que
$$\frac{99}{100} = \frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

siendo $a_0 = 1$ y $(a_{k+1} - 1)a_{k-1} \geq {a_k}^2(a_k - 1)$ para $k = 1, 2 \ldots, n - 1$.

4. Encuentra todas las n-uplas $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ tales que para cada j con $0 \leq j \leq n$, $\quad x_j$ es igual al número de veces que aparece j en la n-upla.

5. Sea A_1 el centro del cuadrado inscrito en un triángulo acutángulo ABC, de manera que dos de los vértices del cuadrado están sobre el lado BC, el otro vértice está sobre AB y el otro sobre AC. Los puntos B_1 y C_1 se definen de forma análoga inscribiendo cuadrados con dos vértices sobre los lados AC y AB respectivamente. Prueba que las rectas AA_1, BB_1 y CC_1 son concurrentes.

6. Se considera el sistema
$$\begin{cases} x + y & = z + u \\ 2xy & = zu \end{cases}$$
Encuentra el mayor valor del número real m tal que $m \leq x/y$ para todas las soluciones enteras positivas (x, y, z, u) del sistema, con $x \geq y$.

Estoy convencida de que resolver estos problemas requiere un gran esfuerzo, pero en ningún caso será inútil. Sin ninguna duda, la resolución de problemas es una gran ayuda para dejar de ver las situaciones como inevitables y considerarlas como problemas pendientes de solución.

Mercedes Sánchez Benito
IES Luis Buñuel
c/ Orquidea, 1
Móstoles
Madrid 28933
correo electrónico: merche_sanchez@mat.ucm.es