

Entrevista a Nuno Freitas, Premio José Luis Rubio de Francia 2014

por

Montserrat Alsina

El investigador portugués Nuno Freitas, doctor por la Universitat de Barcelona, ha sido distinguido con el Premio José Luis Rubio de Francia de la Real Sociedad Matemática Española en su 11.ª edición, convocada en 2014.

*En su decisión, el jurado destacó: «Nuno Freitas ha realizado importantes contribuciones en el campo de la aritmética y la teoría de números. [...] Freitas y sus colaboradores Le Hung y Siksek han probado que todas las curvas elípticas definidas sobre cuerpos cuadráticos reales son modulares, extendiendo el trabajo pionero de Andrew Wiles y Richard Taylor sobre el Último Teorema de Fermat, en el que probaron el correspondiente resultado para las curvas elípticas definidas sobre los racionales. Este crucial resultado de Freitas y sus colaboradores supone un importante avance en la demostración de la Conjetura de Modularidad general, y ha sido publicado recientemente en la revista *Inventiones Mathematicae*».*

«Además el jurado quedó impresionado también por su reciente trabajo con Siksek», en el que demuestran que, para un conjunto infinito de cuerpos cuadráticos reales, la ecuación de Fermat no tiene soluciones relevantes cuando el exponente es suficientemente grande, «un resultado verdaderamente notable en el que los autores combinan la visión modular con técnicas de teoría analítica de números».



Nuno Ricardo Barroso Freitas (Guimarães, Portugal, 1984), estudió en el Instituto Superior Técnico de Lisboa, donde obtuvo la Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação en 2005 y el Mestrado em Matemática e Aplicações en 2008. Estuvo como estudiante Erasmus en la Universitat de Barcelona (UB), y posteriormente cursó también en la UB el Máster en Matemática Avanzada y Profesional y el doctorado, con una beca de la Fundação para a Ciência e a Tecnologia. En 2012 presentó su tesis doctoral *Some Generalized Fermat-type Equations via $\mathbb{Q}$ -Curves and Modularity*, dirigida por Luis Dieulefait, que recibió el Premio Extraordinario 2012–2013, que reconoce la mejor tesis doctoral en matemáticas de ese año en la UB. Ha realizado visitas y estancias posdoctorales en Luxemburgo, Londres y Bayreuth. Recientemente ha sido investigador posdoctoral en el Max-Planck-Institut für Mathematik en Bonn y actualmente es investigador visitante en la UB.

Desde que se estableció en 2004, es la primera vez que el Premio José Luis Rubio de Francia se otorga a un matemático de nacionalidad no española, gracias a la consideración del lugar donde ha recibido la mayor parte de su formación, la Universitat de Barcelona y el reconocido *Seminari de Teoria de Nombres de Barcelona*.

Montse Alsina: En primer lugar quiero felicitarte por la adjudicación del premio José Luis Rubio de Francia. ¿Cómo te sentiste al recibir la noticia?

Nuno Freitas: Hola, Montse, ¡muchas gracias! Cuando recibí la noticia por teléfono, alrededor de las 8:30 de la mañana, me quedé muy sorprendido durante toda la conversación. Terminada la llamada sentí una gran alegría.

MA: En la descripción de los resultados merecedores del premio, se hace referencia a que extienden los resultados que llevaron a la prueba del Último Teorema de Fermat (UTF). Éste es uno de los teoremas de matemáticas más famosos, con un enunciado comprensible, y las noticias relacionadas con él llaman la atención de la prensa, ¿verdad?

NF: Sí, el enunciado del UTF sólo utiliza matemáticas elementales. Recordémoslo: todas las soluciones de la ecuación

$$a^n + b^n = c^n, \quad n \geq 3, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$$

satisfacen $abc = 0$. Pero la forma en que se ha demostrado utiliza matemática muchísimo más avanzada. Además, el hecho de que Wiles dedicara muchos años y un enorme esfuerzo para terminar la demostración, publicada en 1995, contrastando totalmente con el hecho de que en 1637 Fermat dijera que tenía una bonita y simple demostración pero que no cabía en el margen de la página, lo hace una historia al gusto de la prensa.

MA: En efecto, los detalles y las técnicas utilizadas para la demostración del UTF y las importantes conjeturas relacionadas son sofisticadas. ¿Podrías explicarnos cuál es tu aportación, en la línea de mejorar la comprensión de la ecuación de Fermat sobre los cuerpos cuadráticos reales, como señala el jurado del premio?

NF: Terminada la demostración del UTF es natural preguntarse si un resultado similar es cierto sobre otros cuerpos de números. Más concretamente, si en la ecuación anterior reemplazamos $\mathbb{Z}$ por el anillo de enteros de un cuerpo de números, nos preguntamos si será cierto que todas las soluciones todavía satisfacen $abc = 0$ para $n \geq 4$ (se sabe que no es cierto para infinitos cuerpos cuadráticos si $n = 3$).

En 2004, Frazer Jarvis y Paul Meekin probaron que la demostración del UTF se podría adaptar al cuerpo cuadrático real $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Para otros cuerpos de números (no sólo cuadráticos) reales, todos los intentos de aplicar la misma estrategia se encuentran con dos obstrucciones fundamentales: la necesidad de la modularidad de curvas elípticas y la existencia de formas modulares en ciertos niveles relevantes. Mi contribución se divide en dos partes. Por un lado, conjuntamente con Bao Le Hung y Samir Siksek demostramos la modularidad de curvas elípticas sobre cuerpos cuadráticos reales; por otro, en colaboración con Siksek, demostramos que la existencia de formas modulares en los niveles importantes, en el caso de cuerpos reales cuadráticos, no es necesariamente una obstrucción. Más exactamente, demostramos que para un conjunto de cuerpos cuadráticos reales, de densidad $5/6$, existe una constante B_K , que depende sólo del cuerpo K , tal que si el exponente n en la ecuación de Fermat es primo y es mayor que B_K entonces todas las soluciones en K satisfacen $abc = 0$. Demostramos también que para un conjunto complementario de densidad $1/6$, el resultado sigue siendo cierto si se asume la conjetura de Eichler-Shimura para esos cuerpos. Aquí es relevante notar que esto no se aplica por ejemplo al cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, en el que las formas modulares siguen siendo una obstrucción.

MA: Por lo que dices, la modularidad de curvas elípticas vuelve a tener mucho peso en la demostración del UTF sobre cuerpos cuadráticos reales, tal como había sucedido con el UTF original y el trabajo de Wiles. ¿Nos puedes explicar un poco cómo va vuestra demostración de modularidad?

NF: Una herramienta fundamental en la demostración es un teorema de levantamiento de modularidad de Christophe Breuil y Fred Diamond que se basa en trabajos previos de muchos matemáticos (ellos mismos incluidos), inspirados a su vez en el trabajo pionero de Wiles. Con este teorema entre manos, la demostración se divide en dos partes principales que ahora resumo.

Sea E una curva elíptica sobre un cuerpo cuadrático real F . Primero demostramos que la representación de Galois módulo 7 asociada con E es modular. Esto se suma a los hechos ya conocidos de que la representación módulo 5 y la módulo 3 (si es irreducible) son ambas modulares. Esta modularidad a nivel residual, junto con el teorema de Breuil-Diamond, nos permite concluir que la curva E es modular cuando al menos una de sus representaciones módulo 3, 5 o 7 tiene imagen suficientemente grande. Segundo, cada curva elíptica que no satisface lo anterior, es decir con imagen de las representaciones módulo 3, 5 y 7 pequeña, da origen a un punto cuadrático definido sobre F en una curva modular que pertenece a una lista (finita) de curvas modulares, algunas bastante complicadas. Finalmente, determinamos todos los puntos cuadráticos en dichas curvas modulares relevantes y verificamos que todos ellos se corresponden con curvas elípticas que se demuestra que son modulares por otras razones.

MA: En los avances realizados, ¿crees que ha tenido mucho peso un nuevo punto de vista o idea, o bien han sido fruto de persistencia, experiencia y paciencia?

NF: Paciencia y persistencia son fundamentales para conseguir cualquier tipo de avance en matemáticas. Además de esto, fue muy importante para nosotros mantener la esperanza de que la existencia de formas modulares en los niveles importantes no sería una obstrucción. Este optimismo estaba fundado en el hecho de que conocíamos casos particulares como $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, donde su existencia no era una obstrucción, aunque también sabíamos de otros casos donde sí lo era, por ejemplo $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. La novedad principal en este punto fue que pudimos controlar la obstrucción para infinitos cuerpos a la vez. Una vez entendimos que los casos malos eran muy pocos (densidad 0) tuvimos motivación para persistir en la demostración de la modularidad.

MA: ¿Sigues trabajando en temas relacionados? ¿Hay una continuación natural de vuestros resultados?

NF: Sí, sigo trabajando con curvas elípticas y representaciones de Galois, motivado por las ecuaciones diofánticas, en particular el estudio de la Ecuación de Fermat Generalizada $x^r + y^q = z^p$ sobre $\mathbb{Z}$. Se conjetura que si los exponentes satisfacen $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} + \frac{1}{p} < 1$ entonces solamente hay una cantidad finita de soluciones satisfaciendo que a, b , y c no tengan un divisor común. El caso general es un problema muy difícil, pero estudiando distintos casos particulares de esta conjetura uno se encuentra con nuevos e interesantes retos y mucho trabajo para hacer. Otra continuación natural es estudiar la ecuación de Fermat sobre otras familias de cuerpos reales o cuerpos cuadráticos imaginarios. Entre otros temas, creo que seguiré interesado en este tipo de cuestiones durante un buen tiempo más.

MA: El premio se otorga a investigadores españoles o que se hayan formado en España. Ésta es la primera convocatoria en que se concede a un investigador de otro país, así que de momento eres un ejemplo único. Sin menospreciar la formación de base que obtuviste en el Instituto Superior Técnico de Lisboa, qué destacarías de la formación obtenida en la Universitat de Barcelona?

NF: Sin duda que en mi caso particular lo mejor de la UB fue la oportunidad de cursar un par de asignaturas en teoría de números, un tema en el que dispone de expertos investigadores. La teoría de números es un área sin representación en Portugal y había estado totalmente ausente de mi formación anterior.

MA: ¿Por qué elegiste venir a Barcelona, primero como estudiante Erasmus, y después para el máster y para el doctorado?

NF: Decidí venir para Barcelona como Erasmus en el 2006 porque había hablado con otras personas que habían cursado aquí su Erasmus y me contaban que era una ciudad muy agradable. Incluso tengo una prima que todavía vive en Barcelona desde su Erasmus. Después volví para Lisboa y decidí solicitar una beca para hacer el doctorado, aunque no tenía un tema favorito. Un par de mis profesores en Lisboa a los que consulté sobre el doctorado me dijeron que Barcelona y Madrid podrían

ser lugares interesantes, pues son lugares grandes y diversificados en los temas de matemáticas que se estudian, lo que me venía bien. Como vivir en Barcelona ya me había encantado, la decisión fue muy fácil. Decidí entonces cursar el Máster de la UB y fue ahí donde me encontré con la teoría de números y con Luis Dieulefait, mi director de tesis, por primera vez.

MA: ¿Cómo te ha influido tu experiencia en la UB y el Seminario de Teoría de Números de Barcelona (STNB) en la consecución de los resultados que ha destacado el Jurado del premio?

NF: Aunque los resultados destacados al concederme el premio han sido desarrollados durante estancias posdoctorales, fue en mi tesis doctoral en la UB, y consecuente colaboración con mi director Luis Dieulefait, donde se abrió la primera puerta en esa dirección. De hecho, tuve la suerte de que, de manera simultánea a mi interés por las ecuaciones diofánticas, aprendí con Luis sobre técnicas de levantamiento de modularidad y de bajada de nivel para cuerpos totalmente reales. Este tipo de maquinaria era extraña para la mayoría de los expertos en ecuaciones diofánticas, y nos permitió, todavía durante mi tesis, solucionar por primera vez ecuaciones de tipo Fermat utilizando formas modulares de Hilbert. Fue basado en esta nueva aplicación de las formas modulares de Hilbert como nació todo mi trabajo conjunto con Samir Siksek sobre la ecuación de Fermat y curvas elípticas sobre cuerpos cuadráticos reales.

El contacto con otros investigadores en teoría de números también ha sido importante para sentirme uno de ellos. En particular, en mi primer año de tesis hubo un programa anual en el Centre de Recerca Matemàtica (CRM) dedicado a la teoría de números, en el cual matemáticos de distintas partes del mundo visitaron el CRM y dieron charlas y minicursos. En esa época no entendía nada de las charlas, pero ahora veo que lo importante fue realmente haber hecho contactos, que más adelante facilitaron el inicio de colaboraciones. Durante los años siguientes, la actividad principal del STNB fue el encuentro anual a finales de enero. En este seminario intensivo, en el que también hay presentaciones de trabajos y artículos, nos encontramos las personas que investigamos en teoría de números en el área de Barcelona, pero también propicia la participación de personas de otras áreas como Madrid, Bilbao o del extranjero. De hecho, estos años que no estoy en Barcelona sigo participando en el seminario y cada vez saco más provecho de ello.

Al nivel personal, mi estancia en la UB, y más generalmente en Barcelona, ha sido de cinco estrellas. Tuve la oportunidad de conocer y desarrollar amistades con diversas personas, tanto dentro como fuera del ámbito de las matemáticas. Como el quehacer matemático requiere trabajar de manera individual durante muchas horas, yo creo que el ambiente animado de Barcelona, aunque a priori puede parecer una distracción, ha jugado un papel importante para ayudar a mantener la motivación alta para reanudar el trabajo el día siguiente.

MA: Bien, esta afirmación ayuda a desterrar el prejuicio de que las personas que trabajamos en matemáticas somos gente aburrida. . .

NF: ¡Ja, ja! Desterrar ese prejuicio es otro de los curros más importantes en la vida de un matemático.

MA: En tu formación previa aparece también la informática. ¿Ha tenido algún papel en tus resultados? ¿Crees que es importante para complementar los resultados teóricos?

NF: Utilizar ordenadores se está volviendo un recurso muy importante en los avances de las matemáticas. Con ellos uno puede experimentar con muchas ideas o conjeturas, para evitar dedicar tiempo a intentar demostrar algo que con un ordenador rápidamente se verifique que es equivocado. En mi caso particular, he utilizado mucho Magma y SAGE en mi trabajo. Entre otras cosas, estos programas permiten calcular espacios de formas modulares o trabajar con curvas modulares complicadas. Sin el recurso del ordenador habría sido imposible demostrar la modularidad de las curvas elípticas sobre cuerpos cuadráticos reales. De hecho, los ordenadores tienen una influencia tan grande en mi trabajo que uno de mis grandes proyectos actuales incide en la mejora de ciertos algoritmos para calcular formas modulares.

MA: Estuviste como visitante en la Université du Luxembourg y en el King's College London. ¿Qué es lo que más recuerdas de tu experiencia en ellas?

NF: De mi visita a Luxemburgo, que tuvo lugar justo al final de mi tesis doctoral, lo que recuerdo mejor fue que por primera vez tuve relación continuada con posdocs. Desde entonces seguimos en contacto e incluso escribí un pequeño artículo con uno de ellos. De mi estancia en Londres, recuerdo bien haber conocido a Fred Diamond y enterarme de cómo los grupos de teoría de números de las distintas universidades se organizan para montar el «grupo de Londres». Es un seminario en el que se junta gente de diferentes universidades, como el STNB, y que dura todo el año, de forma que la gente va encontrándose un día por semana. Por la calidad de la teoría de números que se produce en Londres sólo se puede concluir que les resulta muy bien. Además, recuerdo la ciudad de Londres, que me encantó.

MA: Después has estado como posdoc en diversas universidades y centros de investigación de Alemania, como el Hausdorff Research Institute for Mathematics, la Universität Bayreuth y recientemente el Max-Planck-Institut für Mathematik. ¿Qué te han aportado, tanto a nivel de matemáticas como de experiencia personal?

NF: Lo principal de mi estancia en Alemania ha sido que he podido dedicarme totalmente a la investigación. Esto me ha permitido aprender muchas cosas nuevas y viajar bastante para quedar con mis colaboradores. Además tampoco me han faltado fondos para invitarlos.

MA: El Max-Planck-Institut für Mathematik es realmente un centro de prestigio, bien reconocido. ¿Qué te llama más la atención de él?

NF: Destaca la cantidad de gente que pasa por el Instituto. Uno acaba conociendo a bastante gente sin tener que esforzarse. Prácticamente cada día hay charlas, seminarios o minicursos en algún tema de las matemáticas, lo cual le da aún más vida. Además, la ubicación en el centro de la ciudad es perfecta.

MA: El Premio José Luis Rubio de Francia ratifica tu valía como investigador y puede contribuir a cierta estabilidad, pero ¿cómo ves tus perspectivas de futuro, para conseguir una plaza en una universidad o centro de investigación?

NF: Mi próximo contrato será como posdoc en la University of British Columbia, en Vancouver, una oferta que ya había recibido hace tiempo, aunque antes de incorporarme allí el próximo febrero estoy unos meses de visitante en la UB. Pero me gusta pensar que, cuando vuelva a solicitar trabajo, este premio pueda influir de forma positiva en mis oportunidades de conseguir algo más sólido.

MA: Además de los problemas en los que ya nos has contado que estás trabajando, ¿cuáles son los problemas que te parecen más interesantes en el entorno de la teoría de números?

NF: Ésta es una pregunta difícil, casi todo lo que se relacione con curvas elípticas me parece interesante, ¡ja, ja! Por elegir uno, diría que mi favorito es la Conjetura de Frey-Mazur. Es decir, existe una constante C tal que si dos curvas elípticas definidas sobre $\mathbb{Q}$ tienen sus representaciones de Galois módulo p isomorfas y $p > C$, entonces tienen que ser curvas isógenas.

MA: ¿Crees que es asequible? ¿Se resolverá próximamente?

NF: A mí me parece un problema inaccesible directamente, pero en realidad puede que se resuelva «próximamente». La conjetura de Frey-Mazur es una consecuencia de la conjetura ABC, y Mochizuki anunció una demostración de ésta (entre otras cuestiones) hace un par de años. Como sus técnicas y lenguaje son totalmente nuevos, todavía pasará algún tiempo hasta que la comunidad se ponga de acuerdo respecto a su validez. Pero si resulta que está todo correcto, entonces esta conjetura y otros varios problemas considerados imposibles ya estarían en realidad resueltos.

MA: Sabemos que la teoría de números abarca problemas muy diversos para los que se necesitan técnicas muy variadas, relacionadas con otras áreas como topología, geometría, análisis, etc. ¿Qué herramientas matemáticas te gustaría aprender?

NF: Diría que me interesa aprender más geometría algebraica. Pero en la práctica, uno acaba aprendiendo lo que le parece que puede resolver el problema en el que trabaja.

MA: No hay una receta mágica, pero ¿cuáles crees que son las buenas condiciones para trabajar en problemas matemáticos y obtener resultados?

NF: En mi caso, ha sido muy importante tener facilidad para viajar y contactar con los expertos en los temas que me interesan. Además, es importante disponer con frecuencia de bloques de horas sin interrupciones, para poder trabajar seguido. En todo caso, si las condiciones generales del trabajo, como el sueldo, estabilidad, estrés y expectativas, no permiten tener una vida personal relativamente tranquila, creo que nada funcionaría.

MA: En efecto, poder concentrarse en la investigación es una condición importante para obtener buenos resultados, y este premio colabora en esta dirección. Felicidades de nuevo y muchas gracias por el tiempo dedicado a esta entrevista

NF: Gracias de nuevo, y gracias también por tu tiempo. ¡Un saludo!

MONTSERRAT ALSINA, DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES, EPSEM, UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA, AV. BASES DE MANRESA 61-73, 08242 MANRESA

Correo electrónico: `montserrat.alsina@upc.edu`