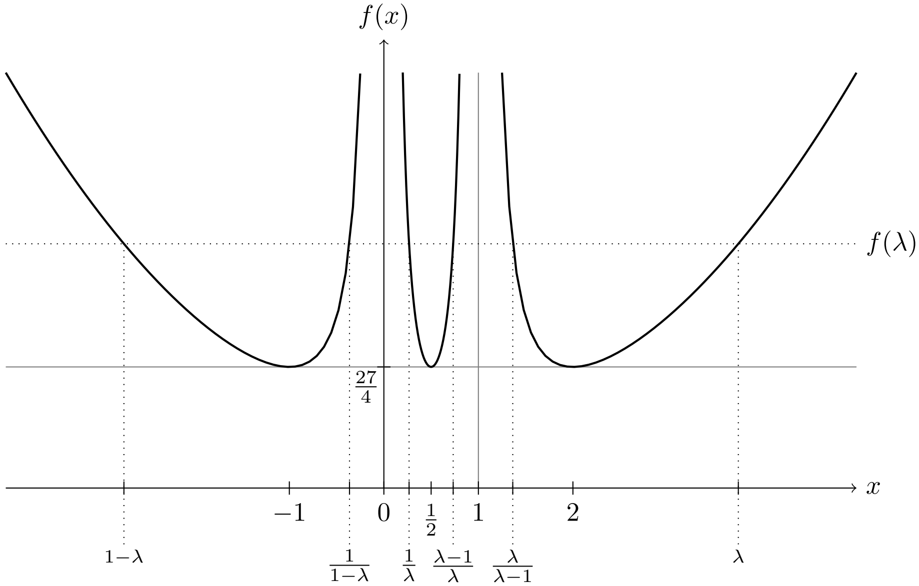
Miniaturas matemáticas de La Gaceta de la RSME
Vol. 19 (2016), Núm. 2, Pág. 344

Una función invariante respecto a un grupo de transformaciones

Sea
$$f(x) = \frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2}$$
y
$$H_1(x) = x, \qquad H_2(x) = \frac{1}{x}, \qquad H_3(x) = 1-x,$$
$$H_4(x) = \frac{1}{1-x}, \qquad H_5(x) = \frac{x-1}{x}, \qquad H_6(x) = \frac{x}{x-1}.$$
Estas funciones cumplen $f(H_i(x)) = f(x)$, $i = 1, \dots, 6$, como vemos observando la recta punteada horizontal en el gráfico:



Así hemos mostrado que la función $f(x)$ es invariante respecto al grupo de transformaciones $\{H_1(x), \dots, H_6(x)\}$.

Se pueden construir tales funciones invariantes eligiendo cualquier polinomio de seis variables $Q(x_1, \dots, x_6)$ simétrico y tomando $f(x) = Q(H_1(x), \dots, H_6(x))$. El ejemplo anterior se obtiene con $Q(x_1, \dots, x_6) = (x_1^2 + \cdots + x_6^2 + 3)/2$.

Juan Luis Varona, Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja
Correo electrónico: jvarona@unirioja.es
Página web: http://www.unirioja.es/cu/jvarona/