

---



---

## PROBLEMAS Y SOLUCIONES

Sección a cargo de

**Óscar Ciaurri Ramírez y José Luis Díaz Barrero**

---



---

*Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico [oscar.ciaurri@unirioja.es](mailto:oscar.ciaurri@unirioja.es) en archivos con formato  $\text{\LaTeX}$ . Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Madre de Dios 53, 26006, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 28 de febrero de 2017.*

*Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (\*) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.*

## Problemas

**PROBLEMA 297.** *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Gerona.*

Construir con regla y compás un pentágono convexo del que se conocen los puntos medios de los lados.

**PROBLEMA 298.** *Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.*

Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  tres números positivos tales que  $ab + bc + ca = 3abc$ . Demostrar que

$$\sqrt{\frac{a+b}{c(a^2+b^2)}} + \sqrt{\frac{b+c}{a(b^2+c^2)}} + \sqrt{\frac{c+a}{b(c^2+a^2)}} \leq 3.$$

**PROBLEMA 299.** *Propuesto por Ovidiu Furdui, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \int_0^n \frac{x^2}{1 + n^2 \cos^2 x} dx.$$

PROBLEMA 300. *Propuesto por Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Logroño.*

Evaluar la suma

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cosh\left(\frac{x}{2^k}\right) \sinh^2\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

PROBLEMA 301. *Propuesto por Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.*

Sean  $a = BC$ ,  $b = CA$  y  $c = AB$  las longitudes de los lados de un triángulo  $ABC$ . Si  $\angle BCA = C \geq \pi/3$ , demostrar que

$$(a+b) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 4 + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}}.$$

PROBLEMA 302. *Propuesto por Cornel Ioan Vălean, Teremia Mare, Timiș, Rumanía.*

Sea  $\{x\} = x - [x]$  la parte decimal de  $x$ . Probar que

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{x}{y} \right\} \left\{ \frac{y}{z} \right\} \left\{ \frac{z}{x} \right\} dx dy dz = 1 + \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{6} - \frac{3\zeta(2)}{4}.$$

PROBLEMA 303. *Propuesto por Florin Stănescu, Găești, Rumanía.*

Sea  $M_2(\mathbb{Z})$  el conjunto de las matrices cuadradas de orden dos cuyas entradas son números enteros. Determinar todas las matrices  $X_1, X_2, \dots, X_9 \in M_2(\mathbb{Z})$ , con  $\det(X_i) = 1$  para  $i = 1, \dots, 9$ , tales que

$$X_1^4 + X_2^4 + \dots + X_9^4 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_9^2 + 18 \cdot I_2.$$

PROBLEMA 304. *Propuesto por Marcel Chiriță, Bucarest, Rumanía.*

En un triángulo  $ABC$ , sean  $M$  el punto medio del lado  $BC$  y  $D$  el punto medio de la mediana  $AM$ . Si la recta perpendicular al segmento  $DM$  en su punto medio pasa por el ortocentro del triángulo  $ABC$ , probar que  $\angle BDC = \pi/2$ .

## Soluciones

PROBLEMA 273. *Propuesto por Larry Glasser, Clarkson University, Potsdam, Nueva York, EE.UU.*

Evaluar la integral

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} \left( |t| \sqrt{x} \frac{x-15}{x-1} \right) \frac{dx}{x-4}, \quad t \in \mathbb{R},$$

entendida como un valor principal.

*Solución enviada por el proponente.*

Denotando por  $f(t)$  la integral a evaluar, con el cambio de variable  $x = r^2$  y tomando la función  $\phi(r) = r \frac{r^2-15}{r^2-1}$ , tenemos

$$\begin{aligned} f(t) &= 2 \int_0^\infty \operatorname{sen}(|t|\phi(r)) \frac{r}{r^2-4} dr \\ &= \int_{-\infty}^\infty \operatorname{sen}(|t|\phi(r)) \frac{r}{r^2-4} dr \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_{-\infty}^\infty \operatorname{sen}(|t|\phi(r)) \frac{dr}{r-2} + \int_{-\infty}^\infty \operatorname{sen}(|t|\phi(r)) \frac{dr}{r+2} \right) \\ &= \int_{-\infty}^\infty \operatorname{sen}(|t|\phi(r)) \frac{dr}{r-2} \\ &= \int_{-\infty}^{-1} \operatorname{sen}(|t|\phi(r_1)) \frac{dr_1}{r_1-2} + \int_{-1}^1 \operatorname{sen}(|t|\phi(r_2)) \frac{dr_2}{r_2-2} \\ &\quad + \int_1^\infty \operatorname{sen}(|t|\phi(r_3)) \frac{dr_3}{r_3-2}. \end{aligned}$$

La ecuación  $\phi(r) = u$  (o  $r^3 - ur^2 - 15r + u = 0$ ), con  $u \in \mathbb{R}$ , tiene tres raíces  $r_1(u)$ ,  $r_2(u)$  y  $r_3(u)$ , que cumplen  $r_1(u) < -1 < r_2(u) < 1 < r_3(u)$ . Además, por las fórmulas de Cardano,

$$r_1(u) + r_2(u) + r_3(u) = 1, \quad r_1(u)r_2(u) + r_2(u)r_3(u) + r_3(u)r_1(u) = -15 \quad (1)$$

y

$$r_1(u)r_2(u)r_3(u) = u. \quad (2)$$

Entonces, considerando los cambios  $r_i = r_i(u)$ , llegamos a que

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^\infty \operatorname{sen}(|t|u) \frac{dr_1(u)}{du} \frac{du}{r_1(u)-2} + \int_{-\infty}^\infty \operatorname{sen}(|t|u) \frac{dr_2(u)}{du} \frac{du}{r_2(u)-2} \\ &\quad + \int_{-\infty}^\infty \operatorname{sen}(|t|u) \frac{dr_3(u)}{du} \frac{du}{r_3(u)-2} = \int_{-\infty}^\infty \operatorname{sen}(|t|u) g(u) du, \end{aligned}$$

con

$$g(u) = \left( \frac{dr_1(u)}{du} \frac{1}{r_1(u) - 2} + \frac{dr_2(u)}{du} \frac{1}{r_2(u) - 2} + \frac{dr_3(u)}{du} \frac{1}{r_3(u) - 2} \right).$$

Usando (1) y (2), y siendo

$$h(u) = r_1(u)r_2(u)r_3(u) - 2(r_1(u)r_2(u) + r_2(u)r_3(u) + r_3(u)r_1(u)) + 4(r_1(u) + r_2(u) + r_3(u)),$$

resulta sencillo comprobar que

$$g(u) = \frac{1}{h(u) - 8} \frac{dh(u)}{du} = \frac{1}{3u + 22} \frac{d}{du}(3u + 30) = \frac{3}{3u + 22},$$

y de este modo

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(|t|u) \frac{du}{u + \frac{22}{3}} = \pi \cos \frac{22t}{3},$$

donde la última integral se ha evaluado como un valor principal.

*No se han recibido otras soluciones.*

PROBLEMA 274. *Propuesto por Ovidiu Furdui, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Sea  $k \geq 1$  un número entero. Probar que

$$\begin{aligned} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^{\infty} \frac{1}{i_1 i_2 \cdots i_k (i_1 + i_2 + \cdots + i_k)^2} \\ = \begin{cases} \frac{(k+1)!}{2} \zeta(k+2), & k = 1, \\ k! \left( \frac{k+1}{2} \zeta(k+2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \zeta(k+1-i) \zeta(i+1) \right), & k > 1, \end{cases} \end{aligned}$$

donde  $\zeta$  denota la función zeta de Riemann.

*Solución enviada por Anastasios Kotronis, Atenas, Grecia.*

Usando que

$$\frac{1}{\lambda^2} = \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-jx}}{j} = -\log(1 - e^{-x}),$$

tenemos

$$\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} \frac{1}{i_1 \cdots i_k (i_1 + \cdots + i_k)^2} = (-1)^k \int_0^{+\infty} x \log^k(1 - e^{-x}) dx,$$

y así, con el cambio de variable  $1 - e^{-x} = y$ , llegamos a

$$\begin{aligned} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} \frac{1}{i_1 \cdots i_k (i_1 + \cdots + i_k)^2} &= (-1)^k \int_0^1 -\frac{\log(1-y)}{1-y} \log^k y \, dy \\ &= (-1)^k \int_0^1 \left( \sum_{n=1}^{\infty} H_n y^n \right) \log^k y \, dy \\ &= (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} H_n \int_0^1 y^n \log^k y \, dy, \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que

$$-\frac{\log(1-y)}{1-y} = \sum_{n=1}^{\infty} H_n y^n.$$

De la identidad

$$\begin{aligned} \int y^n \log^k y \, dy \\ = y^{n+1} \left( \frac{\log^k y}{n+1} - \frac{k \log^{k-1} y}{(n+1)^2} + \frac{k(k-1) \log^{k-2} y}{(n+1)^3} - \cdots + \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}} \right) + C, \end{aligned}$$

válida para  $n$  y  $k$  enteros no negativos y que puede obtenerse usando integración por partes, deducimos fácilmente que

$$\int_0^1 y^n \log^k y \, dy = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}.$$

Por tanto,

$$\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} \frac{1}{i_1 \cdots i_k (i_1 + \cdots + i_k)^2} = k! \sum_{n \geq 1} \frac{H_n}{(n+1)^{k+1}}$$

y concluimos usando la identidad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{(n+1)^k} = \frac{k+1}{2} \zeta(k+2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \zeta(k+1-i) \zeta(i+1), \quad k = 1, 2, \dots,$$

donde la suma en el lado derecho debe tomarse como cero en el caso  $k = 1$ , ver [1, pág. 278].

## REFERENCIAS

- [1] D. Borwein, J. M. Borwein y R. Girgensohn, Explicit evaluation of Euler sums, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **38** (1995), 277–294; disponible online en <https://carma.newcastle.edu.au/db90/pdfs/db90-107.00.pdf>.

*También resuelto por L. Glasser, A. Stadler y el proponente.*

PROBLEMA 275. *Propuesto por Paolo Perfetti, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Tor Vergata, Roma, Italia.*

Sea  $\{a_k\}_{k \geq 1}$  una sucesión monótona de números reales positivos tal que la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  es convergente. Supongamos además que, para  $n \geq 0$  y  $2^n \leq k \leq 2^{n+1} - 1$ , se verifica

$$a_k - a_{k+1} \geq 2^{-n} a_{2^{n+1}}.$$

Probar que, si  $\alpha$  es un número irracional cuadrático, entonces la sucesión

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\operatorname{sen}(k\pi\alpha)}$$

es acotada.

*Solución enviada por Moubinoöl Omarjee Lycée Henri IV, París, Francia.*

En primer lugar debemos recordar que si  $\alpha$  es un irracional cuadrático, existe una constante positiva  $C$  tal que  $|q\alpha - p| \geq C/q$  para cualesquiera enteros  $p$  y  $q$ . Denotando por  $\|x\|$  la distancia de  $x$  al entero más próximo, se tiene que  $|\operatorname{sen}(\alpha\pi x)| \geq 2\|k\alpha\| > 2C/k$ , donde en la última desigualdad hemos usado la observación anterior sobre irracionales cuadráticos. Entonces, es evidente que

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\operatorname{sen}(k\pi\alpha)} \right| \leq \frac{B}{n} \sum_{k=1}^n ka_k,$$

para una cierta constante  $B$ .

Comprobemos que la prueba se puede completar si damos por supuesto que la sucesión  $\{a_k\}_{k \geq 1}$  cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n n \log n = 0. \quad (1)$$

En efecto, en ese caso, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0$  tal que  $0 < na_n < \frac{\varepsilon}{\log n}$  para  $n \geq n_0$  y, así,

$$\sum_{k=1}^n ka_k = \sum_{k=1}^{n_0} ka_k + \sum_{k=n_0+1}^n ka_k \leq A(n_0) + \varepsilon \sum_{k=n_0+1}^n \frac{1}{\log k},$$

donde  $A(n_0)$  es una constante que depende de  $n_0$ . Como

$$\sum_{k=n_0+1}^n \frac{1}{\log k} = O\left(\frac{n}{\log n}\right),$$

llegamos a que

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\operatorname{sen}(k\pi\alpha)} \right| \leq \frac{B}{n} \left( A(n_0) + O\left(\frac{n}{\log n}\right) \right),$$

y la sucesión  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\operatorname{sen}(k\pi\alpha)}$  es acotada.

Veamos ahora una demostración de (1). De la condición  $a_k - a_{k+1} \geq 2^{-n} a_{2^{n+1}}$  para  $2^n \leq k \leq 2^{n+1} - 1$ , se deduce que la sucesión  $\{2^k a_{2^k}\}_{k \geq 1}$  es decreciente. En efecto,

$$a_{2^k} - a_{2^{k+1}} = \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} (a_j - a_{j+1}) \geq 2^{-k} a_{2^{k+1}} (2^{k+1} - 2^k) = a_{2^{k+1}},$$

lo que implica  $2^k a_{2^k} \geq 2^{k+1} a_{2^{k+1}}$ .

Recordemos que si una sucesión de términos positivos  $\{u_n\}_{n \geq 1}$  es decreciente y la suma  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  es convergente, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = 0. \quad (2)$$

De esta forma se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n 2^n a_{2^n} = 0.$$

Para cada  $n$  se verifica que  $2^{q_n} \leq n < 2^{q_n+1}$  con  $q_n = \left\lfloor \frac{\log n}{\log 2} \right\rfloor$ , siendo  $[x]$  la parte entera de  $x$ . Así, como  $q_n \leq \frac{\log n}{\log 2} < q_n + 1$  y  $a_n$  es decreciente, deducimos las desigualdades

$$\frac{q_n \log 2}{2(q_n + 1)} (q_n + 1) 2^{q_n+1} a_{2^{q_n+1}} \leq a_n n \log n < \frac{2(q_n + 1)}{q_n} q_n 2^{q_n} a_{2^{q_n}},$$

que implican (1).

*También resuelto por J. Nadal y el proponente.*

NOTA. El límite que aparece en (2) es una consecuencia del criterio de condensación de Cauchy. En efecto, por dicho criterio se tiene que la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k u_{2^k}$  es convergente y, por tanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 2^k u_{2^k} = 0.$$

Como  $\{u_n\}_{n \geq 1}$  es decreciente se cumple que

$$0 \leq n u_n \leq 2^k u_{2^k}, \quad n = 1, \dots, 2^k,$$

lo que implica (2).

**PROBLEMA 261.** *Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.*

En el triángulo escaleno  $ABC$  de incentro  $I$ , sea  $M_A$  el punto medio del lado  $BC$ . La recta que pasa por  $M_A$  y es paralela al lado  $AB$  corta a la recta  $BI$  en el punto  $P$  y a la recta  $CI$  en el punto  $Q$ . La recta que pasa por  $M_A$  y es paralela al lado  $AC$  corta a  $BI$  en el punto  $R$  y a  $CI$  en el punto  $S$ . Las rectas  $PS$  y  $QR$  se cortan en el punto  $J_A$ .

- Probar que la recta  $IJ_A$  es paralela al lado  $BC$ .
- Si se construyen de forma análoga, a partir de los puntos medios  $M_B$  y  $M_C$  de los lados  $CA$  y  $AB$ , puntos  $J_B$  y  $J_C$ , demostrar que los puntos  $J_A$ ,  $J_B$  y  $J_C$  están alineados.

PROBLEMA 276. *Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.*

En un triángulo escaleno  $ABC$ , sean  $I$  el incentro y  $M_A$  el punto medio de  $BC$  (véase el esquema de la figura adjunta). Supongamos que la recta paralela a  $AB$  pasando por  $M_A$  corta a  $BI$  y  $CI$  en los puntos  $P$  y  $Q$ , respectivamente, y que la recta paralela a  $AC$  pasando por  $M_A$  corta a  $BI$  y  $CI$  en  $R$  y  $S$  respectivamente. Las rectas  $PS$  y  $QR$  se cortan en un punto que denotaremos por  $J_A$ . Si de manera análoga se construyen otros dos puntos  $J_B$  y  $J_C$ , demostrar que los tres  $J_A$ ,  $J_B$  y  $J_C$  están alineados.

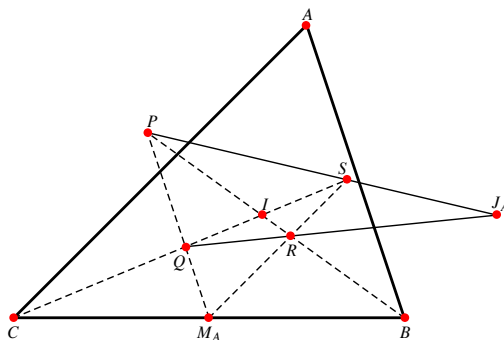


Figura correspondiente al Problema 276.

NOTA. Como en su momento observaron varios de nuestros lectores, los Problemas 261 y 276 son, esencialmente, el mismo, aunque con una redacción diferente. Este hecho se debió a una confusión de los editores por la que pedimos disculpas. Por esa razón hemos decidido presentar las soluciones a ambos problemas conjuntamente. Aunque las soluciones seleccionadas responden a los apartados a) y b) del Problema 261, han sido elaboradas con el material recibido para ambos problemas.

*Solución al Problema 261 enviada por Andrea Fanchini, Cantú, Italia.*

Usaremos coordenadas baricéntricas relativas con respecto al triángulo  $ABC$  de lados  $a, b, c$ , semiperímetro  $s$  y área  $S/2$ . Pondremos  $S_A = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2}$  y expresiones análogas para  $S_B$  y  $S_C$ .

Denotemos por  $A_\infty$ ,  $B_\infty$  y  $C_\infty$ , respectivamente, los puntos del infinito de las rectas  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$ . Se tiene  $A = (1 : 0 : 0)$ ,  $B = (0 : 1 : 0)$ ,  $C = (0 : 0 : 1)$ ,  $A_\infty = (0 : 1 : -1)$ ,  $B_\infty = (-1 : 0 : 1)$  y  $C_\infty = (1 : -1 : 0)$ . También,  $M_A = (0 : 1 : 1)$ ,  $M_B = (1 : 0 : 1)$ ,  $M_C = (1 : 1 : 0)$  e  $I = (a : b : c)$ .

a) La ecuación de la recta que pasa por  $M_A$  y es paralela al lado  $AB$  es

$$M_A C_\infty \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

es decir,

$$M_A C_\infty \equiv x + y - z = 0.$$

Por otro lado se tiene  $BI \equiv cx - az = 0$  y  $CI \equiv bx - ay = 0$ , por lo tanto

$$P = M_A C_\infty \cap BI = (a : c - a : c) \quad \text{y} \quad Q = M_A C_\infty \cap CI = (a : b : a + b).$$

Análogamente,  $M_A B_\infty \equiv x - y + z = 0$ ,  $R = (a : a + c : c)$  y  $S = (a : b : b - a)$ . Entonces,

$$PS \equiv (s - a)x - (s - b)y - (s - c)z = 0, \quad QR \equiv sx - (s - c)y - (s - b)z = 0$$

y  $J_A = PS \cap QR = (a(b - c) : S_C : -S_B)$ . La ecuación de la recta  $IJ_A$  es

$$IJ_A \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ a(b - c) & S_C & -S_B \end{vmatrix} = 0,$$

es decir,

$$IJ_A \equiv (bS_B + cS_C)x - a(S_B - c(c - b))y - a(S_C + b(c - b))z = 0.$$

Dado que

$$bS_B + cS_C = 2(b + c)(s - b)(s - c) \quad \text{y} \quad S_B - c(c - b) = S_C + b(c - b) = 2(s - b)(s - c),$$

la ecuación se simplifica a la expresión

$$IJ_A \equiv (b + c)x - ay - az = 0.$$

Obviamente, esta recta pasa por el punto  $A_\infty$ , luego en efecto es paralela al lado  $BC$ .

b) Por permutación cíclica de las letras obtenemos las coordenadas baricéntricas de los puntos análogos,  $J_B = (S_C : b(c - a) : S_A)$  y  $J_C = (S_B : -S_A : c(a - b))$ . La condición de colinealidad de los puntos  $J_A$ ,  $J_B$  y  $J_C$  es la anulación del determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a(b - c) & S_C & -S_B \\ -S_C & b(c - a) & S_A \\ S_B & -S_A & c(a - b) \end{vmatrix}.$$

Las relaciones

$$S^2 + S_A^2 = (bc \sin A)^2 + (bc \cos A)^2 = b^2 c^2, \quad S^2 + S_B^2 = c^2 a^2, \quad S^2 + S_C^2 = a^2 b^2,$$

pueden aligerar un poco esta comprobación final. En efecto,

$$\begin{aligned} \Delta &= abc(a - b)(b - c)(c - a) + a(b - c)S_A^2 + b(c - a)S_B^2 + c(a - b)S_C^2 \\ &= -a^2 bc^2(c - a) - a^2 b^2 c(a - b) - ab^2 c^2(b - c) \\ &\quad + a(b - c)(b^2 c^2 - S^2) + b(c - a)(a^2 c^2 - S^2) + c(a - b)(a^2 b^2 - S^2) \\ &= -(a(b - c) + b(c - a) + c(a - b))S^2 = 0. \end{aligned}$$

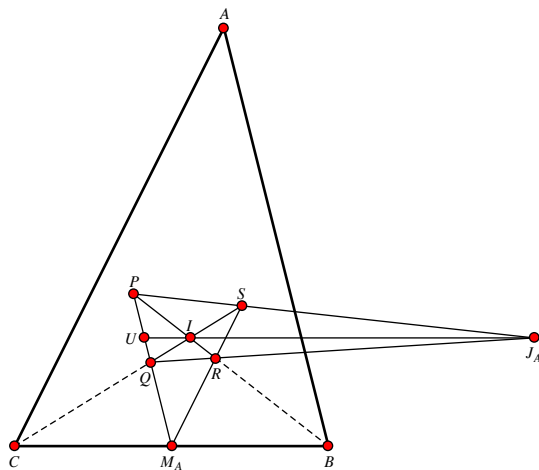


Figura 1: Esquema para la segunda solución al apartado a) del Problema 261.

*Solución al apartado a) del Problema 261 elaborada a partir de las enviadas por Saturnino Campo Ruiz, Salamanca, y el proponente.*

En el cuadrilátero  $PQRS$  (Figura 1) el punto de intersección de las diagonales es  $I$ , mientras que  $M_A$  y  $J_A$  son los puntos de intersección de los pares de lados opuestos. Es conocido que en esta configuración de cuadrilátero completo, la recta  $IJ_A$  corta al segmento  $PQ$  en un punto  $U$  que es el cuarto armónico del punto  $M_A$  respecto de los extremos  $P$  y  $Q$ , es decir, el punto  $U$  con razón doble  $(PQM_AU) = \frac{PM_A}{QM_A} : \frac{PU}{QU} = -1$  (segmentos orientados), lo que se puede demostrar, por ejemplo, así: por un lado, el teorema de Menelao aplicado al triángulo  $J_APQ$  cortado por la transversal  $M_AS$  da

$$\frac{M_AP}{M_AQ} \frac{RQ}{RJ_A} \frac{SJ_A}{SP} = 1;$$

y, por otro lado, el teorema de Ceva en el mismo triángulo, aplicado a las cevianas concurrentes  $PR$ ,  $QS$  y  $J_AU$ , da

$$\frac{RQ}{RJ_A} \frac{SJ_A}{SP} \frac{UP}{UQ} = -1.$$

Pues bien, en la proyección desde el punto exterior  $I$  de esta cuaterna armónica  $P, Q, M_A, U$  sobre la recta  $BC$  se obtiene otra cuaterna armónica  $C, B, M_A, X$ , ya que la razón doble de cuatro puntos es un invariante proyectivo. El punto  $X$ , homólogo del punto  $U$  en esta proyección, es el punto del infinito de la recta  $BC$  (al ser  $M_A$  el punto medio del segmento  $BC$  se tiene  $(CBM_AX) = \frac{BX}{CX} = -1$ ). Luego la recta  $IJ_A$  es paralela al lado  $BC$ .



*También resuelto por F. Aranda, S. Campo, D. Lasaosa, J. Mir, J. Nadal y B. Salgueiro.*

NOTA. Las soluciones de Aranda, Mir y Nadal al problema 261, la de Campo al apartado b) de ese problema y la solución de Salgueiro al problema 276 utilizan también coordenadas baricéntricas. Alternativamente, la solución de Lasaosa usa coordenadas trilineales.

PROBLEMA 277. *Propuesto por Marcel Chiriță, Bucarest, Rumanía.*

Demostrar que

$$\sqrt{\frac{x(x+y)}{x^2-xy+y^2}} + \sqrt{\frac{y(y+z)}{y^2-yz+z^2}} + \sqrt{\frac{z(z+x)}{z^2-zx+x^2}} \leq 3\sqrt{2},$$

donde  $x, y$  y  $z$  son números reales positivos.

*Solución enviada independientemente por Paolo Perfetti, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Tor Vergata, Roma, Italia, y Nicușor Zlota, "Traian Vuia" Technical College, Focșani, Rumanía.*

De la desigualdad  $4(x^2 - xy + y^2) \geq (x + y)^2$  deducimos inmediatamente que

$$\sqrt{\frac{x(x+y)}{x^2-xy+y^2}} \leq 2\sqrt{\frac{x}{x+y}},$$

luego el resultado propuesto viene implicado por

$$\sum_{\text{cíclica}} \sqrt{\frac{x}{x+y}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}. \quad (1)$$

Aplicando la desigualdad de Jensen con la función convexa  $\sqrt{z}$  se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cíclica}} \sqrt{\frac{x}{x+y}} &= \sum_{\text{cíclica}} \frac{x+z}{2(x+y+z)} \sqrt{\frac{4x(x+y+z)^2}{(x+y)(x+z)^2}} \\ &\leq \left( \sum_{\text{cíclica}} \frac{2x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

y concluiremos (1) probando que

$$\sum_{\text{cíclica}} \frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)} \leq \frac{9}{4}.$$

Esta desigualdad se transforma en

$$x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 \geq 6xyz,$$

que equivale a

$$\sum_{\text{cíclica}} z(x-y)^2 \geq 0,$$

y esta es claramente cierta.

*También resuelto por Kee-Wai Lau, J. Nadal, B. Salgueiro, T. Zvonaru y N. Stanciu (conjuntamente) y el proponente.*

**PROBLEMA 278.** *Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez.*

Calcular el valor del determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} aa' - bb' - cc' & ab' + ba' & ac' + ca' \\ ab' + ba' & bb' - cc' - aa' & bc' + cb' \\ ac' + ca' & bc' + cb' & cc' - aa' - bb' \end{vmatrix}$$

cuando las ternas de números positivos  $(a, b, c)$  y  $(a', b', c')$  representan, respectivamente, las longitudes de los lados de dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  tales que  $\angle CBA = \angle C'B'A'$  y  $\angle BAC + \angle B'A'C' = \pi$ .

*Solución enviada por el proponente.*

En primer lugar presentamos un cálculo del determinante  $\Delta$  debido a T. Muir [1] (ver también [2, §72, págs. 100–103]).

Tomando  $S_3 = aa' + bb' + cc'$  y desarrollando  $\Delta$  en potencias de  $S_3$  se tiene

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 2aa' - S_3 & ab' + ba' & ac' + ca' \\ ab' + ba' & 2bb' - S_3 & bc' + cb' \\ ac' + ca' & bc' + cb' & 2cc' - S_3 \end{vmatrix} \\ &= -S_3^3 + S_3^2(2aa' + 2bb' + 2cc') \\ &\quad - S_3 \left( \begin{vmatrix} 2bb' & bc' + cb' \\ bc' + cb' & 2cc' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2aa' & ac' + ca' \\ ac' + ca' & 2cc' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2aa' & ab' + ba' \\ ab' + ba' & 2bb' \end{vmatrix} \right) \\ &\quad + \begin{vmatrix} 2aa' & ab' + ba' & ac' + ca' \\ ab' + ba' & 2bb' & bc' + cb' \\ ac' + ca' & bc' + cb' & 2cc' \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{1}$$

Ahora bien,

$$\begin{pmatrix} 2aa' & ab' + ba' & ac' + ca' \\ ab' + ba' & 2bb' & bc' + cb' \\ ac' + ca' & bc' + cb' & 2cc' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a' & 0 \\ b & b' & 0 \\ c & c' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

luego el término independiente de  $S_3$  en (1) es cero, ya que es igual al producto de dos determinantes nulos. Por otro lado, de la igualdad matricial

$$\begin{pmatrix} 2xx' & xy' + yx' \\ xy' + yx' & 2yy' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & x \\ y' & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}$$

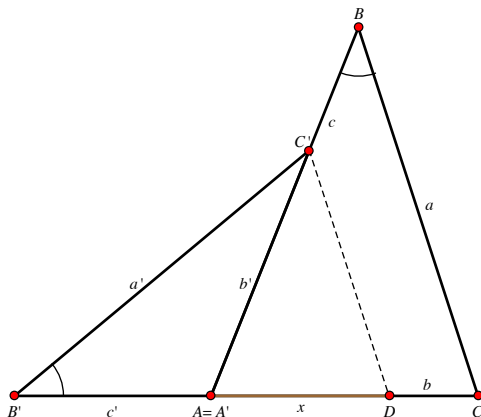


Figura 3: Esquema para la solución del Problema 278.

se sigue

$$\begin{vmatrix} 2xx' & xy' + yx' \\ xy' + yx' & 2yy' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}^2,$$

y utilizando esto vemos que el coeficiente de  $S_3$  en (1) es igual a

$$\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}^2 = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - S_3^2,$$

donde hemos considerado los vectores  $\mathbf{u} = (a, b, c)$  y  $\mathbf{v} = (a', b', c')$  y la relación

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|^2.$$

Con lo cual,

$$\begin{aligned} \Delta &= -S_3^3 + S_3^2 \cdot 2S_3 + S_3[(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - S_3^2] \\ &= S_3(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2). \end{aligned}$$

En segundo lugar, consideremos dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  que cumplen las condiciones del enunciado colocados como se ve en la Figura 3, con el vértice común  $A' \equiv A$  y los vértices  $B'$  y  $C$  alineados con  $A$  a uno y otro lado respectivamente. Los ángulos en  $B'$  y  $B$  son iguales. Trazando el segmento  $C'D$  paralelo al lado  $BC$ , donde  $D$  es un punto del segmento  $AC$ , se obtienen los triángulos  $AC'D$  y  $B'C'D$ , ambos semejantes al  $ABC$  como es sencillo ver. Pongamos  $x = |AD|$ . De la semejanza entre los triángulos  $AC'D$  y  $ABC$  se sigue

$$cx = bb', \quad (2)$$

y de la semejanza entre los triángulos  $C'B'D$  y  $ABC$  se sigue, usando (2), que

$$aa' = c(c' + x) = bb' + cc'. \quad (3)$$

Según la relación (3), entonces en este caso se tiene  $S_3 = 2aa'$  y, finalmente,

$$\Delta = 2aa'(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2).$$

## REFERENCIAS

- [1] T. Muir, Note on a special symmetrical determinant, *The Analyst* **8** (1881), 169–171.
- [2] T. Muir, *A Treatise on the Theory of Determinants*, MacMillan and Co., London, 1882.

*También resuelto por J. Nadal y B. Salgueiro.*

**PROBLEMA 279.** *Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.*

Sea  $r$  una recta tangente en  $T$  a una circunferencia  $\Gamma$ . Sea  $k > 0$  una constante y sean  $A$  y  $B$  dos puntos variables de  $r$  tales que  $TA \cdot TB = k$ , donde se consideran distancias orientadas. Sea  $T'$  el punto de  $\Gamma$  diametralmente opuesto a  $T$ . Probar que si las rectas  $T'A$  y  $T'B$  cortan de nuevo a  $\Gamma$  en  $P$  y  $Q$ , respectivamente, entonces la recta  $PQ$  pasa por un punto fijo al variar  $A$  y  $B$ .

*Solución enviada por Titu Zvonaru, Comănești, Rumanía, y Neculai Stanciu, Buzău, Rumanía.*

Considerando que la circunferencia  $\Gamma$  tiene radio unidad, tomamos un sistema de coordenadas tal que la ecuación de  $\Gamma$  es  $x^2 + y^2 = 1$ , la ecuación de la recta  $r$  es  $y = -1$ ,  $T = (0, -1)$ ,  $T' = (0, 1)$ ,  $A = (a, -1)$  y  $B = (b, -1)$ , con  $a \neq b$  y  $ab = k > 0$ . De este modo, las rectas  $T'A$  y  $T'B$  tienen, respectivamente, las ecuaciones

$$2x + ay = a \quad \text{y} \quad 2x + by = b,$$

y obtenemos que

$$P = \left( \frac{4a}{a^2 + 4}, \frac{a^2 - 4}{a^2 + 4} \right) \quad \text{y} \quad Q = \left( \frac{4b}{b^2 + 4}, \frac{b^2 - 4}{b^2 + 4} \right).$$

Luego la recta que pasa por  $P$  y  $Q$  es

$$2x(a + b) + y(k - 4) - (k + 4) = 0$$

y, si  $k \neq 4$ , pasa por el punto fijo  $F = (0, \frac{k+4}{k-4})$ . Cuando  $k = 4$ , la recta  $PQ$  es perpendicular a la recta  $r$ .

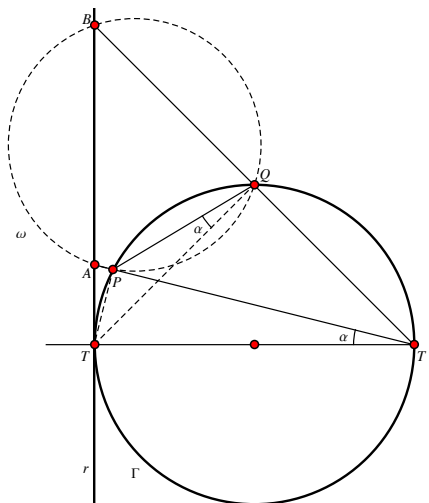


Figura 4: Primer esquema para la segunda solución del Problema 279.

*Solución enviada por Florentino D. Aranda Ballesteros, Córdoba.*

Probemos en primer lugar que el cuadrilátero  $ABQP$  es siempre cíclico. Poniendo para abreviar  $\angle T'T'A = \angle PQT' = \alpha$  (ver la Figura 4), tenemos

$$\angle BAP = \angle BAT' = \pi - \angle TAT' = \frac{\pi}{2} + \alpha,$$

y

$$\angle BQP = \pi - \angle PQT' = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

así que  $\angle BAP + \angle BQP = \pi$  y los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $Q$  y  $P$  están en una misma circunferencia  $\omega$ .

Ahora nos referiremos a la Figura 5. Sean  $A$  y  $B$  dos puntos de  $r$  tales que  $TA \cdot TB = k > 0$ . Podemos considerar, sobre la recta  $r$ , el punto (fijo)  $C$  tal que  $TC^2 = k$ . Sabemos que la circunferencia  $\gamma$  de centro  $T$  y radio  $TC$  es entonces ortogonal a la circunferencia  $\omega$  circunscrita al cuadrilátero  $ABQP$ , ya que  $\gamma$  es la circunferencia doble de la inversión de centro  $T$  en la que  $A$  y  $B$  son puntos inversos y la circunferencia  $\omega$  es su propia inversa.

Al variar los puntos  $A$  y  $B$ , visto al contrario, las circunferencias  $\omega$ ,  $\omega'$ , etc., son siempre ortogonales a la circunferencia  $\gamma$ . Entonces forman un *haz de circunferencias coaxiales* (es decir, circunferencias que comparten el eje radical de dos cualesquiera de ellas) *no intersecantes* (ver [1, § 6.5, págs. 113–115]). Los centros de las circunferencias del haz están sobre una recta  $r_c$  paralela a la recta  $r$ . El punto  $T$ , al tener la misma potencia respecto de toda circunferencia  $\omega$ , pertenece al eje radical del haz,

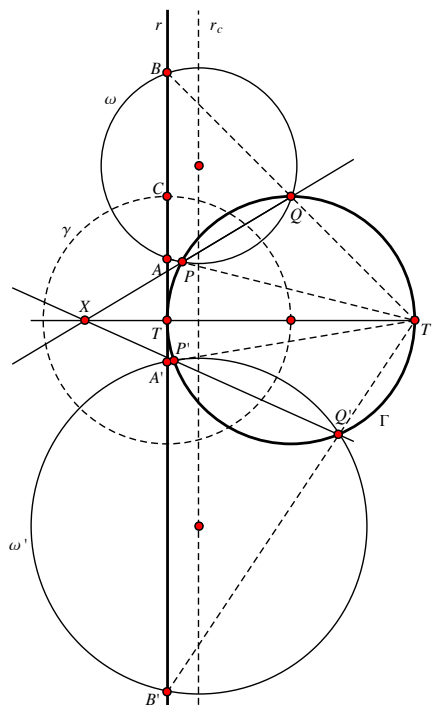


Figura 5: Segundo esquema para la segunda solución del Problema 279.

que debe ser una recta perpendicular a la línea de centros  $r_c$ ; por lo tanto, el eje radical del haz de las circunferencias  $\omega$  es precisamente la recta  $TT'$ .

Si la circunferencia  $\omega$  del haz corta a la circunferencia  $\Gamma$  en los puntos  $P$  y  $Q$ , la recta  $PQ$  es el eje radical de  $\omega$  y  $\Gamma$ . Si  $\omega'$  es otra circunferencia cualquiera del haz, las rectas  $PQ$  y  $P'Q'$  se cortan en un punto  $X$  que es el centro radical de las tres circunferencias  $\omega$ ,  $\omega'$  y  $\Gamma$  y en particular pertenece al eje radical  $TT'$  del haz. Este punto fijo  $X$  es el centro radical del haz y la circunferencia  $\Gamma$ .

## REFERENCIAS

- [1] H. S. M. Coxeter, *Fundamentos de Geometría*, Limusa, México D.F., 1971.

*También resuelto por J. Mir, J. Nadal, B. Salgueiro y el proponente.*

PROBLEMA 280. *Propuesto por D. M. Bătinețu-Giurgiu, “Matei Basarab” National College, Bucarest, Rumanía, y Neculai Stanciu, “George Emil Palade” Secondary School, Buzău, Rumanía.*

Sea  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  una función continua. Si para  $a \in [0, 1]$  consideramos las

sucesiones  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a}$  y  $b_n = n \sqrt[n]{a_n}$ , calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{f(x - b_n)}{f(b_{n+1} - x) + f(x - b_n)} dx.$$

*Solución enviada por Jon Asier Bárcena Petisco (estudiante), Université Pierre et Marie Curie, París, Francia.*

El valor del límite solicitado es  $1/2$  para todo  $a \geq 0$  (la hipótesis  $a \in [0, 1]$  no es necesaria).

Con el cambio de variable  $y - b_n = b_{n+1} - x$  podemos verificar que

$$\int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{f(x - b_n)}{f(b_{n+1} - x) + f(x - b_n)} dx = \int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{f(b_{n+1} - y)}{f(b_{n+1} - y) + f(y - b_n)} dy$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{f(x - b_n)}{f(b_{n+1} - x) + f(x - b_n)} dx &= \frac{1}{2} \left( \int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{f(x - b_n) + f(b_{n+1} - x)}{f(b_{n+1} - x) + f(x - b_n)} dx \right) \\ &= \frac{b_{n+1} - b_n}{2}. \end{aligned}$$

Así, basta probar que, para  $a \geq 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_{n+1} - b_n) = 1. \quad (1)$$

Por la desigualdad triangular tenemos que

$$|b_{n+1} - b_n - 1| \leq |n^{1/(n+1)} - 1| + |n(n^{1/(n+1)} - n^{1/n})| + |n(n^{1/n} - n^{1/(n+1)})| \quad (2)$$

y será suficiente verificar que cada uno de los tres sumandos tiende a cero.

Como

$$1 \leq n^{1/(n+1)} \leq n^{1/n},$$

usando  $n^{1/n} \rightarrow 1$  deducimos que  $|n^{1/(n+1)} - 1| \rightarrow 0$ .

Para analizar los dos sumandos restantes en (2) aplicaremos el teorema del valor medio. Para cada  $a \geq 0$ , tomando  $g(x) = n^{1/x}$ , existirán  $\theta_n \in (a_n, a_{n+1})$  tales que

$$\begin{aligned} n(n^{1/(n+1)} - n^{1/n}) &= ng'(\theta_n)(a_{n+1} - a_n) \\ &= \frac{n}{(n+1)^{a+1}} \frac{1}{\theta_n^{1-1/(n+1)}} \leq \frac{1}{a_n^{1-1/n}} \frac{1}{n^a} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Finalmente, considerando  $h(x) = a_n^{1/x}$ , existirán  $\xi_n \in (n, n+1)$  que cumplen

$$n(n^{1/n} - n^{1/(n+1)}) = -nh'(\xi_n) = \frac{n}{\xi_n^2} a_n^{1/\xi_n} \log a_n \leq n^{1/n-1} \log n \rightarrow 0,$$

con lo que habremos concluido.

*También resuelto por M. Omarjee, P. Perfetti, D. Văcaru y los proponentes. Se ha recibido una solución incorrecta.*