Matemáticas en las aulas de Secundaria

Sección a cargo de

Inmaculada Fuentes Gil

Un taller sobre Teoría de Juegos

por

Beatriz Bueno-Larraz, L. Felipe Prieto-Martínez, Raquel Sánchez-Cauce y Roberto Soto-Varela

Resumen. Existe una gran variedad de actividades divulgativas para realizar con estudiantes de enseñanza secundaria, que pretenden mostrar una cara más cercana y amigable de las Matemáticas. En este artículo se describe una, con estructura de taller, pensada para una sesión independiente y lúdica. Intentamos acercar algunas ideas matemáticas de la Teoría de Juegos, aplicándolas en situaciones cercanas a los estudiantes. Se ha intentando involucrar el mínimo número posible de contenidos, trabajar lo máximo posible el pensamiento científico y presentar la actividad de una forma atractiva para los estudiantes.

1. Contextualización e introducción

Este taller fue concebido para ser realizado durante la «Semana de la Ciencia» en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid. Esta actividad divulgativa se celebra anualmente y en ella se involucran doctorandos y jóvenes investigadores. Tiene como objetivo acercar las Matemáticas a estudiantes de 3.º y 4.º de la ESO y 1.º de Bachillerato, y se estructura en diferentes talleres independientes. Nosotros exponemos aquí uno de los que fueron realizados en la edición de noviembre de 2015.

Debido al contexto y circunstancias que envuelven esta actividad, se nos presentaban unas restricciones temporales importantes, entre las que se incluían que sólo se disponía de una hora y cuarto para realizar el taller, con un grupo de unos 15 estudiantes aproximadamente. No obstante, en la sección 7 abordaremos con mayor detalle este punto y otras posibles adaptaciones susceptibles de llevarse a término.

Tras analizar y evaluar los distintos talleres de ediciones anteriores, y tras cierta reflexión, decidimos crear para la edición de 2015 uno nuevo, para el que nos marcamos unos principios muy claros:

- Mantener el carácter lúdico de estos talleres: los alumnos vienen a unas jornadas especiales. Por ello es importante que el proceso de enseñanza-aprendizaje sea ameno para ellos.
- Incluir el mínimo contenido teórico posible. Para conseguir un aprendizaje significativo, hay que trabajar adecuadamente cualquier contenido teórico, y en este caso no hay demasiado tiempo disponible.
- Trabajar lo máximo posible el pensamiento científico (científico-matemático en este caso) y la competencia matemática.

¿Cómo podría llevarse a cabo? Decidimos mostrar a los estudiantes cómo «hacer ciencia», y hacerla abordando problemas cercanos a ellos. Faltaba elegir qué objeto estudiaríamos a modo de ejemplo. Por ello se consideraron los juegos (en el sentido matemático) como los protagonistas ideales para una actividad así, ya que son un objeto de apariencia lúdica y atractiva para los estudiantes. Además su estudio no se reduce a una «anécdota divertida», puesto que las aplicaciones del análisis de los juegos tienen un gran impacto en el mundo actual.

2. Objetivos de la actividad

2.1. Objetivos específicos

Nuestro objetivo principal es mostrar cómo se realiza un estudio científico y utilizar como ejemplo el estudio matemático de los juegos. Para ello, nos apoyamos en:

- Aprender las ideas básicas necesarias para realizar un estudio científico.
- Aprender la importancia de definir formalmente el objeto de estudio, en este caso, los juegos.
- Aprender a marcar unos objetivos claros y definidos y llegar a su consecución.
- Mostrar cómo se pueden sintetizar los elementos principales que intervienen en el objeto del estudio.
- Demostrar la utilidad del estudio particular que realizamos sobre los juegos mediante ejemplos interesantes o tratables.

Para conseguir estos objetivos necesitaremos desarrollar algunos **contenidos** de Teoría de Juegos, que serán detallados en la sección 4.

2.2. Objetivos transversales

Paralelamente, se trabajarán los siguientes objetivos más generales que, creemos, enriquecen el desarrollo personal del alumnado:

- Fomentar el uso del razonamiento abstracto en situaciones de la vida cotidiana. En este caso, la Teoría de Juegos se muestra como una herramienta útil para modelizar juegos de mesa, situaciones de competición entre empresas, conflictos entre países…

- Trabajar la comprensión lectora y la capacidad de expresarse con rigor.
- Mostrar la belleza de las Matemáticas.
- Comprender la existencia de limitaciones en los modelos matemáticos (o científicos) cuando estos se aplican a situaciones de la vida real.

3. Estructura del taller: Secuenciación de los acontecimientos

Hemos estructurado el desarrollo del taller en las siguientes tres actividades:

- ***Actividad 1***: Contenidos específicos de Teoría de Juegos para los estudiantes. Consiste en una exposición al gran grupo y una discusión guiada, para intentar conseguir que ellos desarrollen de manera crítica las bases del estudio de los juegos.
- ***Actividad 2***: Trabajo en pequeños grupos sobre ejemplos concretos de juegos. En primer lugar, dividimos al grupo en otros más pequeños de unos 4 o 5 estudiantes, y a cada uno de ellos le asignamos uno de los monitores. Después, la actividad se divide en 3 partes:
  a) A cada grupo le asignamos un juego y se realiza un análisis del mismo, guiado por el monitor.
  b) *(Este paso es opcional.)* Mientras acababan todos los grupos, decidimos pasarles a los estudiantes una pregunta, de la que hablaremos más adelante, para que contestaran en 30 segundos y comentar con ellos sus respuestas.
  c) Una vez finalizado el correspondiente estudio, los distintos grupos exponen a sus compañeros las conclusiones alcanzadas.
- ***Actividad 3***: Actividad final. Reorganizamos a los estudiantes (es importante romper los grupos de la actividad anterior) en 5 equipos.
  a) Les planteamos un juego que tenga elementos de cada uno de los juegos del punto anterior. Cada equipo actúa como un jugador y discute qué jugadas hacer.
  b) Por último, los monitores organizan una breve reflexión con los alumnos sobre el desarrollo de la partida.

4. Actividad 1

Como se indicó con anterioridad, esta primera actividad es una exposición de ciertos contenidos que, en nuestra opinión, debe ser lo más breve posible. En nuestro caso decidimos hacer dicha exposición con una presentación con diapositivas. A continuación, proponemos una posible selección de contenidos y la secuenciación de los mismos. Por supuesto, los contenidos pueden ser alterados si se pretenden otros objetivos. Incluiremos también algunas de nuestras experiencias con los estudiantes al desarrollar esta actividad.

1. **Objeto de estudio**:
   - *¿Qué es un juego?* En este punto intentamos que los estudiantes razonen cuál puede ser una definición formal de juego. Debemos alejarnos de la acepción coloquial que algunos estudiantes propusieron, en la que «juego» lleva implícito un componente lúdico. Para nosotros un juego será una *situación interactiva entre varios jugadores con intereses opuestos* ([5, pág. 1]), que está sujeta a algunas restricciones que se suelen llamar reglas.
   - *¿Por qué son interesantes?* La definición anterior engloba muchas situaciones, aparte de los juegos de mesa, pero que son matemáticamente similares a estos (véase, por ejemplo, [9], uno de los libros que se considera fundacional en Teoría de Juegos).
   - *¿Qué se pretende al estudiarlos?* Los estudiantes rápidamente identificaron que el objetivo es ganar, es decir, encontrar las estrategias que pueden llevar a uno de los jugadores a satisfacer sus objetivos. Aunque, como más adelante mostraremos, también puede ser interesante aprender a discutir si un juego es «justo».
2. **Amplitud del estudio**: En este punto preguntamos a los estudiantes si consideran posible encontrar estrategias ganadoras para cualquier juego.

   Con algunas pistas, pronto contestaron que no se podía hacer tal cosa para algunos juegos de dados, sorteos, juegos que requieren habilidad (como los dardos), etc.

   En vista de esto, aparece la necesidad de limitar el estudio a juegos que tienen:
   - poco componente aleatorio,
   - poco componente de habilidad.

   Estos factores, al igual que los demás jugadores, no pueden ser controlados por nuestra estrategia.
3. **Axiomas**: Los estudios se suelen limitar mediante el uso de *axiomas*, esto es, premisas extra. En este caso:
   - *Axiomas sobre las reglas*: como se dijo antes, nuestros juegos no pueden tener un gran componente aleatorio ni de habilidad.
   - *Axiomas sobre los jugadores*: debemos hacer ciertas presunciones sobre los jugadores. Las que se suelen hacer en la teoría clásica de juegos son las siguientes:
     - Inteligencia: los demás jugadores son al menos tan inteligentes como nosotros.
     - Racionalidad: los jugadores persiguen su objetivo, y no harán jugadas que les alejen de él. Para presentar este axioma, realizamos una actividad, el *ultimatum game*, que será comentado más adelante en esta sección.
4. **Dos tipos de juegos**: Presentamos dos tipos de juegos y mostramos cómo pueden analizarse.

   - *Juegos de Acción Simultánea*, en los que todos los jugadores realizan una única jugada todos a la vez y el juego termina. Los estudiantes identificaron el juego de «pares o nones» como uno de este tipo. Estos juegos suelen ser estudiados mediante el uso de tablas.
   - *Juegos por Turnos.* Los estudiantes identificaron varios ejemplos, como el ajedrez. Estos juegos se suelen estudiar mediante el uso de diagramas de árbol. Los estudiantes relacionaron estos diagramas con los que conocen de probabilidad.

5. **Equilibrio en juegos de acción simultánea**: En este punto, mostramos el concepto de *equilibrio* (véase por ejemplo [4, definición 1.8]) y el ejemplo clásico del dilema del prisionero ([4, subsección 5.2.2]).

El juego que elegimos para esta actividad fue el *ultimatum game* (véase [6]), que consiste en lo siguiente:

- El Jugador 1 recibe 10 monedas de chocolate.
- Debe repartirlas con el Jugador 2 dándole al menos una.
- El Jugador 2 puede aceptar el reparto, o puede tirar todas las monedas a la basura.

Por supuesto, el objetivo de ambos jugadores es obtener el máximo número de monedas posibles. Si ambos jugadores siguieran el axioma de racionalidad, el Jugador 1 le daría una única moneda al Jugador 2 y el Jugador 2 aceptaría, pues obtendría mayor ganancia que tirándolas todas.

Existen varios estudios sobre el *ultimatum game* con niños: véase por ejemplo [3], o el vídeo disponible en [7].

Pusimos a los participantes en el taller a jugar a este juego. Como no teníamos tantas monedas, los agrupamos en parejas o tríos para jugar, y cada grupo actuaba como un solo jugador. Todos los grupos aceptaron el reparto. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

4-6	(eran grupos de 2 y 3 personas respectivamente)
8-2	(aceptaron el reparto argumentando que «algo es algo»)
5-5	
6-4	
5-5	
8-2	(después reconsideraron su postura a 5-5)
7-3	
6-4	

Sus respuestas en parte, creemos, pueden estar condicionadas por las siguientes circunstancias:

- Esperan un juicio por parte de los monitores, que les hace ser más cautos en la respuesta.
- Por otro lado, el hecho de estar observados por sus compañeros les cohíbe de tomar decisiones «egoístas».

Estas circunstancias pueden ser aprovechadas para mostrar otros factores que influyen en la toma de decisiones.

5. Actividad 2

Antes de empezar la actividad, repartimos las instrucciones de varios juegos por escrito a los estudiantes, junto con una serie de preguntas sobre la teoría vista en la Actividad 1. Estas preguntas sirven para guiarles en la identificación de los elementos que intervienen en el juego.

A continuación, describiremos tres de los juegos que utilizamos, aunque es posible elegir otros.

Antes de las exposiciones, aprovechando que los alumnos se encuentran divididos en grupos, les pedimos que respondan a una pregunta. En la sección correspondiente discutiremos lo que se busca con esta actividad.

5.1. Los Cochecitos

En este juego trabajamos la importancia del razonamiento probabilístico: vamos a tratar con un ejemplo que sí tiene un factor aleatorio considerable.

- Es posible hacer un análisis de decisión calculando probabilidades o haciendo simulaciones.
- Analizamos las distintas estrategias utilizadas por casinos y casas de apuestas para equilibrar este tipo de juegos probabilísticos.

El enunciado que entregamos a los alumnos es el siguiente:

¡Hagan sus apuestas! La carrera de cochecitos de juguete va a comenzar. Doce participantes numerados del 1 al 12 se colocan en la baldosa de salida.

SALIDA					*META*

El recorrido que deberán completar sobre el suelo de la clase consta de 5 baldosas (el primer coche en llegar a la baldosa de la meta, gana).

Tiramos dos dados y el cochecito cuyo número sea la suma de los resultados avanza una baldosa.

1. *¿Cuál crees tú que será el campeón?*
2. *Imagina que eres una casa de apuestas, ¿cómo equilibrarías el pago de las apuestas en este juego?*

Tras realizar el experimento varias veces, los estudiantes empezaron a llegar a algunas conclusiones, como que los coches con los números 6, 7 y 8 avanzaban con mayor frecuencia.

Refrescando el vocabulario que aprendieron en el primer ciclo de la ESO, en este punto podemos instarles a identificar sucesos imposibles (como que avance el coche con el número 1) y recordarles la aproximación inferencial de la probabilidad.

El tiempo no permite calcular la probabilidad que tiene cada coche de ganar, aunque podemos utilizar el término «campana de Gauss» y explicar el concepto informalmente, utilizando las experiencias realizadas.

El experimento, tal y como aparece en el enunciado, no es un juego en el sentido que dimos anteriormente. Sí lo es la situación descrita en la segunda pregunta, ya que si todos los jugadores apuestan por el mismo coche, recibirán menor beneficio (lo que introduce un componente de interacción entre los jugadores).

Podemos discutir con los estudiantes cómo deberían equilibrar el pago (diseñar el juego) en esta segunda situación. Los estudiantes, con muy poca ayuda, llegaron prácticamente por sí mismos a la solución.

5.2. Viaje de fin de curso

Las características que queremos destacar de este juego son las siguientes:

- Este es un ejemplo de juego en el que interviene una votación.
- Permite reflexionar sobre la «justicia» del diseño de algunos juegos.
- Permite mostrar dificultades reales en problemas de la vida cotidiana, como el diseño de votaciones que intenten resumir la opinión de un colectivo.

El texto que se proporcionó a los alumnos fue el siguiente:

> *Los felices estudiantes de 4.º de ESO de un instituto se disponen a organizar su viaje de final de ciclo, que se celebrará en febrero.*
>
> - *Son 41 estudiantes. Los profesores del centro han ofrecido tres posibles destinos: París, Roma y Santa Pola.*
> - *Por lo que sabéis después de haber hablado entre vosotros, el grupo tiene una opinión dividida: hay un empate entre París y Roma, y encarnizadas discusiones. Sólo un estudiante, que tiene auténtico pánico a volar en avión, defiende con uñas y dientes la idea de ir a Santa Pola. Ninguno de los otros quiere ir allí en invierno.*
> - *El sistema de votación, será el siguiente: cada alumno escribirá en una papeleta sus preferencias:*
>   - *Otorgará 5 puntos a su destino favorito.*
>   - *Otorgará 3 puntos a su siguiente destino favorito.*
>   - *Otorgará 1 punto a su destino menos favorito.*
> - *Tras el recuento, el destino que más puntos tenga, será el elegido para el viaje.*

En base a esto:

1. *Imagina que tú eres uno de estos estudiantes y que quieres ir a Roma, ¿qué harías?*
2. *¿Te parece que esta es una manera justa de efectuar la votación?*
3. *¿Qué otras formas de efectuarla se te ocurren?*

Se preguntó a los estudiantes a qué otras situaciones reales se podrían aplicar estas reglas. La respuesta fue las elecciones, aunque también se mencionó el concurso de Eurovisión y las decisiones familiares.

En primer lugar se preguntó cómo actuarían ellos si se encontrasen en esta situación, es decir, cómo realizarían las votaciones según las reglas del juego. Dado que los dos grupos mayoritarios están enfrentados, la votación lógica es dar la puntuación más baja al grupo contrario. Esta es la votación que propuso la mayoría de los estudiantes. Cuando alguno proponía otra cosa, sus propios compañeros explicaban por qué no era correcto ese razonamiento, sin necesidad de que interviniese el monitor. Si se escriben estas votaciones en forma de tabla, tenemos:

Votos / Destino	París	Roma	Santa Pola
20	5	1	3
20	1	5	3
1	1	3	5
TOTAL	$20 \cdot 5 + 20 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 121$	$20 \cdot 1 + 20 \cdot 5 + 1 \cdot 3 = 123$	$20 \cdot 3 + 20 \cdot 3 + 1 \cdot 5 = 125$

Observaron que, antes de que vote el alumno de Santa Pola, los tres destinos están empatados a 120 puntos, por lo que termina decidiendo este alumno, y no se obtiene ninguno de los destinos mayoritarios.

Este juego, que inicialmente parecía justo y equilibrado, ha demostrado no serlo, cosa que sorprendía mucho a los estudiantes. Su primer impulso era ver si se podía cambiar este resultado modificando las votaciones dentro de cada grupo, sin cambiar las reglas del juego. Para ello se les proporcionó un documento de Excel en el que se podían modificar las puntuaciones dadas tanto por el grupo completo como por personas individuales. Los grupos estaban codificados con colores, para facilitar la compresión de la tabla, y estaba programado de forma que el resultado final de la votación se actualizaba automáticamente al cambiar las votaciones.

Después de varias pruebas se convencieron de que no era posible que ganase uno de los grupos mayoritarios si ninguno de los jugadores renunciaba a darle la máxima puntuación a su destino favorito.

El siguiente paso fue pedir que propusiesen formas alternativas de realizar la votación de manera que ganase uno de los grupos mayoritarios. Las principales propuestas fueron:

- En dos vueltas, eligiendo en la primera vuelta sólo un destino y eliminando el menos votado. Para la segunda vuelta se propuso repetir el mismo procedimiento o elegirlo al azar.
- Elegir directamente al azar el destino. Ante la incapacidad de alcanzar un acuerdo, ellos sorprendentemente consideraban «más justo» tomar la decisión aleatoriamente, aunque así el resultado fuera un viaje a Santa Pola.

Se explicó a continuación que hay sistemas de elecciones en otros países que usan formatos de dos vueltas similares a los propuestos.

Sin embargo, nadie propuso cambiar el peso asignado a cada destino. Cuando se dio esta pista a los estudiantes, tuvieron muchos problemas para identificar cuál era el problema que estaba provocando el empate entre los tres destinos. Por ejemplo realizaron la propuesta 5, 3, 0, que produce un resultado aún más desequilibrado que el propuesto, ya que gana siempre Santa Pola, independientemente de lo que vote el alumno suelto. Deberían haber identificado que el peso dado al destino intermedio es muy alto, por lo que se van acumulando demasiados votos en Santa Pola. Sin embargo, empezaron a cambiar los pesos en el documento de Excel al azar, sin razonar qué pasaba en cada caso. Fue necesaria la intervención del monitor para llegar a una combinación de pesos que permitiese ganar a uno de los destinos principales (por ejemplo, 5, 2, 1).

5.3. Pueblo duerme

Los puntos a resaltar en el estudio de este juego son los siguientes:

- Es otro ejemplo de juego por votación.
- Permite reflexionar sobre el diseño de algunos juegos.
- Tiene una componente de habilidad, aunque no demasiado significativa.
- Se juega por turnos. Se aprecia bien cómo el análisis utilizando un árbol de decisión es adecuado para calcular la probabilidad de ganar o perder.

Es un juego bastante conocido por muchos estudiantes en edad escolar:

Se reparten unos roles (que serán secretos) entre los jugadores. Dos de ellos serán LOBOS, otro será LA NIÑA y el resto serán PUEBLERINOS. El monitor será el ALCALDE y dirigirá el juego.

Se juega por rondas. En cada ronda:

- *Cuando el alcalde diga «El pueblo duerme», todos los jugadores cerrarán los ojos.*
- *A continuación el alcalde dirá «Que se despierten los lobos», y los lobos abrirán los ojos y señalarán al jugador que quieren matar. La niña también podrá abrir los ojos en este momento, aunque deberá hacerlo disimuladamente, para evitar que los lobos la vean.*

- *Después el alcalde volverá a gritar «Que se duerman los lobos», y los lobos (y la niña si los ha abierto) volverán a cerrar los ojos.*
- *Por último el alcalde dirá «Que se despierte el pueblo», y ahora todos los jugadores abrirán los ojos.*
- *El alcalde comunica cuál de los jugadores ha sido asesinado por los lobos. Este jugador queda eliminado del juego.*
- *En este punto se realiza una votación, y todos los jugadores vivos deciden a quién quieren matar: el jugador que más votos reciba queda eliminado del juego y pone su carta boca arriba revelando su rol.*

El juego termina cuando los dos lobos han sido eliminados (ganan los pueblerinos), cuando todos los pueblerinos han sido eliminados (ganan los lobos), o bien cuando quedan sólo un lobo y un pueblerino (ganan los lobos).

1. *¿Cómo jugarías en cada caso?*
2. *¿Si tuvieras que apostar, quién crees que ganaría?*

El primer paso fue que los estudiantes jugaran al menos dos veces al juego (las partidas son largas y no es factible jugar demasiadas veces).

En las dos ocasiones que se explicó esta actividad, el monitor tenía 7 estudiantes. Por lo tanto la distribución de los roles fue: 2 LOBOS, 1 NIÑA, 4 PUEBLERINOS.

Los jugadores, descubrieron fácilmente los principios a seguir en las votaciones según su rol:

- El pueblo vota prácticamente de forma aleatoria, salvo que por alguna jugada anómala sea capaz de identificar a la niña o a los lobos.
- Los lobos deben intentar matar a la niña de forma prioritaria (si en un punto del juego fueran capaces de identificarla).
- La niña debe desequilibrar las votaciones para intentar matar a los lobos. Por otro lado, tampoco es conveniente que se delate frente a los lobos, pues correría el riesgo de ser eliminada en la siguiente ronda.

De la habilidad del jugador que interpreta a la niña puede depender el desarrollo de la partida.

Los estudiantes apreciaron rápidamente que el pueblo tenía pocas opciones de ganar, pese a estar en aparente mayoría. Por lo tanto, el monitor les invitó a formalizar esta intuición mediante un estudio más riguroso del juego utilizando un diagrama de árbol. Con una pequeña ayuda con la notación, llegaron a confeccionar el diagrama de la figura 1, en el que se ha equiparado la figura de la niña a la de un pueblerino más[1].

Los casos en los que ganan los lobos se destacan con las celdas coloreadas, y sin colorear el caso en el que gana el pueblo. Sin embargo, este estudio es incompleto:

[1]Desarrollamos el diagrama sólo hasta el momento en que las jugadas vienen todas forzadas.

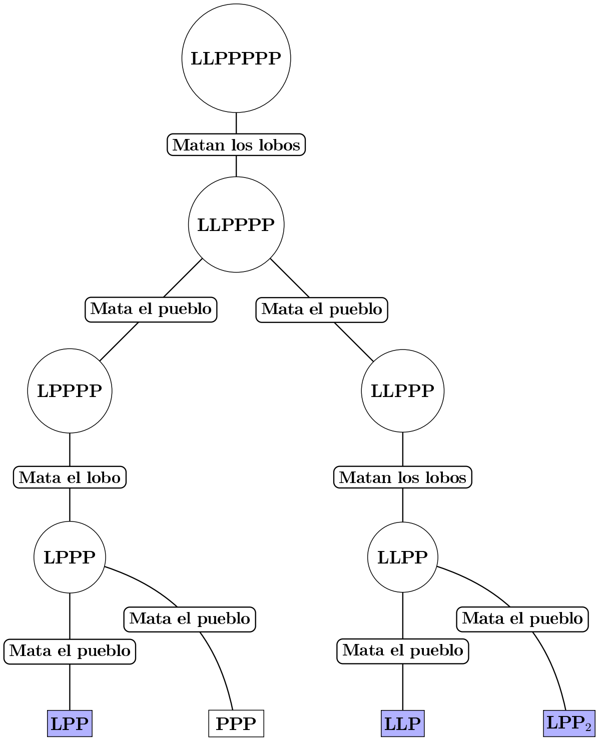

Figura 1: Diagrama del «pueblo duerme» elaborado por los alumnos.

este árbol no tiene en cuenta las distintas probabilidades de cada resultado en las votaciones. En la figura 2 mostramos otro diagrama corrigiendo este detalle (cuando hay más de una, ponemos entre paréntesis el número de formas de pasar de una situación a la siguiente).

Este árbol tiene las siguientes limitaciones:

- Desprecia la habilidad personal del jugador con el rol de la niña.
- Las votaciones se hacen de manera aleatoria. En la realidad, por un lado los lobos podrían colaborar para protegerse, y por el otro, es relativamente fácil que los lobos se delaten por sus gestos o comentarios durante las votaciones.

Pero aun así nos ofrece una buena perspectiva de los posibles finales del juego. Con estas simplificaciones, vemos que sólo en 2 de las 24 salidas será posible una victoria del pueblo. Esta aproximación también puede ser aprovechada para trabajar la idea de «modelo» y sus limitaciones.

Otra posibilidad que ofrece esta actividad es la búsqueda de un ajuste que equilibre las posibilidades de los pueblerinos, esto es, puede pedirse a los estudiantes que determinen un número de lobos y pueblerinos adecuado para jugar a este juego «probando». Los alumnos propusieron jugar con 2 LOBOS, 1 NIÑA y 5 PUEBLERINOS. En esta situación un árbol de decisión similar al de la figura 1 muestra que

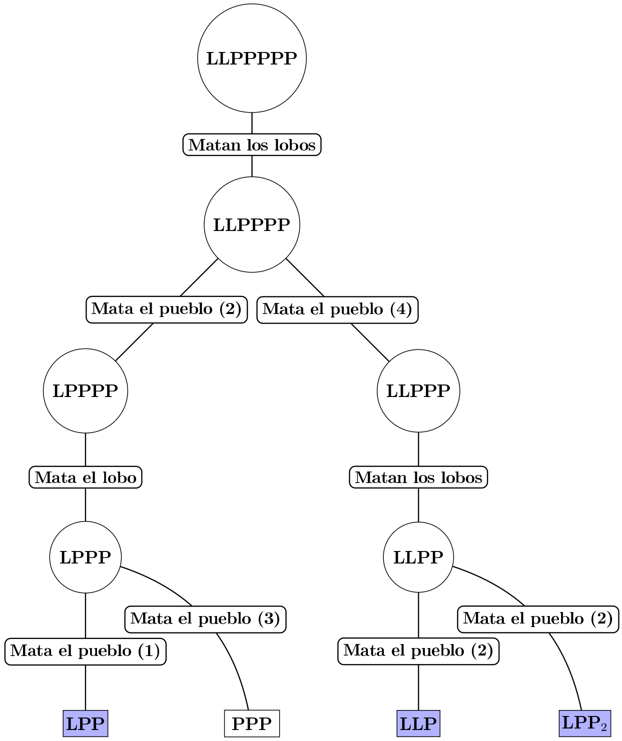

Figura 2: Diagrama del «pueblo duerme» con pesos.

el número de posibles finales distintos en los que gana el pueblo es el mismo que el de los que ganan los lobos. Estos finales no son igualmente probables, por lo que los lobos siguen teniendo más posibilidades de ganar, pero es una situación mucho más equilibrada. Por tanto, con las limitaciones impuestas por el modelo, los alumnos fueron capaces de equilibrar el juego.

5.4. Pregunta

Aprovechando la agrupación de los estudiantes de la Actividad 2, y como un método para amortiguar la diferente duración de cada una de las actividades del punto 2.a, podemos plantear a los estudiantes que resuelvan una de las siguientes preguntas:

- **Modelo 1**: Imagina que eres un general rodeado por una fuerza enemiga abrumadora que aniquilará tu ejército de 600 soldados a menos que te decidas por tomar una de las dos posibles vías de escape. Tus espías te dicen que si tomas la primera salida salvarás a 200 soldados, mientras que si te decides por la segunda hay una probabilidad de 1/3 de que los 600 consigan salvarse y una probabilidad de 2/3 de que no lo consiga ninguno. ¿Qué camino escogerías?

- **Modelo 2**: Imagina que eres un general rodeado por una fuerza enemiga abrumadora que aniquilará tu ejército de 600 soldados a menos que te decidas por tomar una de las dos posibles vías de escape. Tus espías te dicen que si tomas la primera salida perderás a 400 soldados, mientras que si te decides por la segunda hay una probabilidad de 1/3 de que ninguno muera y una probabilidad de 2/3 de que caigan todos. ¿Qué camino escogerías?

Esta pregunta sirve para motivar una muy breve explicación de la incidencia de factores psicológicos en la toma de decisiones. Para ello, el monitor puede utilizar unos minutos mientras los demás grupos terminan. Esta pregunta ha sido extraída y adaptada de [8]. En la siguiente tabla recogemos los resultados obtenidos en dicho artículo, que corresponde a un experimento con adultos, y en nuestro caso:

	Modelo 1	Modelo 2
Resultado de [8]	3 de cada 4 eligen la salida 1	4 de cada 5 eligen la salida 2
Nuestro ejemplo	8 de cada 15 eligen la salida 1	5 de cada 9 eligen la salida 2

Dado el reducido número de alumnos no consideramos que las diferencias sean significativas, o indicio de una incidencia importante de la etapa madurativa o de otras cuestiones generacionales en la decisión tomada, aunque nos ha parecido reseñable. Además, un alumno adolescente no tiene el mismo concepto de «guerra» y «muerte» que puede tener un adulto.

Concretamente, en el modelo 2 obtenemos lo contrario a lo que aparece en el artículo: muchos estudiantes argumentaban que una probabilidad de 2/3 de perder a todos los soldados es muy alta, y que prefieren perder a 400 directamente.

Otro posible motivo del desajuste es que no parecen manejarse correctamente con las fracciones, lo que ha afectado al resultado, provocando que la formulación de la pregunta no influya en su respuesta.

6. Actividad 3

El juego propuesto para esta tercera actividad es una versión simplificada del BANG! (véase [2]), que incluye muchos de los ingredientes anteriormente discutidos.

6.1. Breve descripción de las reglas

El juego está ambientado en el Viejo Oeste. A continuación se muestran las instrucciones que se dieron a los estudiantes.

Roles y sus objetivos: *Cada jugador recibirá al principio del juego una carta con su rol (secreto). Los roles son los siguientes:*

- *Sheriff (este es el único rol público): su objetivo es matar a los forajidos y al renegado. Recibe una penalización (pierde todas sus cartas) si mata al Alguacil.*
- *Alguacil: su objetivo es ayudar al Sheriff, y sus condiciones de victoria son las mismas que las del Sheriff. Si el Sheriff muere, pierde la partida.*
- *Forajido: su objetivo es matar al Sheriff. Cualquier jugador que mate a un forajido obtiene 3 cartas de recompensa.*
- *Renegado: su objetivo es ser el último en morir.*

Comienzo del juego: *Los jugadores reciben un PERSONAJE (público) que les aplica ciertas bonificaciones durante la partida (vienen especificadas en la carta correspondiente). También reciben 3 cartas para comenzar a jugar.*

¿Cómo se eliminan los jugadores? *Cada jugador tiene un número de vidas especificado en su carta de personaje. Una vez que estas se reduzcan a 0 (con la excepción de que el jugador tenga una carta de cerveza), el jugador es eliminado, y revela su rol.*

Estructura de las rondas: *El primer jugador en efectuar su jugada en cada ronda es siempre el Sheriff. Al principio de su turno, el jugador robará dos cartas del mazo. Después puede jugar tantas cartas como quiera y las reglas permitan (la única excepción es la carta BANG, que sólo puede usarse una vez por turno). Al finalizar el turno, no puede tener más cartas en la mano que vidas.*

Cartas: *El funcionamiento de las cartas viene descrito en las mismas (véase la figura 3). Hemos eliminado muchas de las cartas del juego original y hemos eliminado la distancia entre los jugadores.*

6.2. Análisis de una partida jugada por los estudiantes

Como el tamaño del grupo condicionaba el tiempo y el desarrollo de esta última actividad, tomamos la decisión de dividir a los estudiantes en pequeños grupos, cada uno de los cuales actuaría como un único jugador y se tomarían las decisiones por consenso. Se asignaron 5 roles: 1 SHERIFF, 1 ALGUACIL, 2 FORAJIDOS y 1 RENEGADO.

A continuación incluimos unas directrices generales para cada rol. Estas directrices no fueron comunicadas a los estudiantes, pues uno de los objetivos era que las descubrieran por sí mismos.

- SHERIFF: Debe esperar a que los forajidos se descubran para empezar a atacar, pues bajo ningún concepto debe debilitar al ALGUACIL. Tiene la dificultad de distinguir entre RENEGADO y ALGUACIL, y debe mostrar una postura defensiva en este caso.

Figura 3: Cartas seleccionadas del Bang!

- ALGUACIL: Debe proteger al SHERIFF. Él puede atacar a todos los demás desde el principio.
- FORAJIDO: Debe atacar al SHERIFF. Será su actuación la que rompa el equilibrio y permita al resto de jugadores identificar algunos roles. También puede ser aconsejable no revelar el rol desde el principio hasta tener una posición sólida.
- RENEGADO: Es el rol más complicado de jugar. Debe proteger al SHERIFF en primer término, pues si él muere, ganan los forajidos. Una vez los forajidos hayan sido eliminados, debe enfrentarse al alguacil (si aún vive) y, por último, eliminar al SHERIFF. Deberá juzgar en cada momento de la partida hasta qué punto brindará su ayuda al SHERIFF, siempre intentando no significarse ante el SHERIFF.

El análisis de la partida jugada es lo más importante de esta actividad, pues obliga a los estudiantes a hacer una reflexión sobre los conceptos que les presentamos anteriormente.

Comentamos a continuación lo acontecido en la primera ronda de la partida que jugaron los estudiantes, como un ejemplo del análisis que se puede realizar después de la misma. Recordamos que los roles son secretos, excepto el de Sheriff, pero los monitores sí los conocíamos y los hemos incluido al realizar el análisis.

Jugador	Jugada y comentarios[2]	
J1. Sheriff	*No hizo nada.* Identificó adecuadamente que la mejor estrategia era no actuar hasta tener más información sobre los roles.	(!)
J2. Renegado	*No hizo nada.* Esta sería una buena estrategia en este punto, aunque esta inactividad no debe mantenerse a lo largo de la partida. Sin embargo, creemos que en este caso se debió a que no entendieron realmente su papel (que, admitimos, es difícil).	(?!)
J3. Forajido	*BANG al Sheriff.* Jugada directa que permite que se vayan esclareciendo los roles.	(!?)
J4. Alguacil	*Ataca al J3.* Jugada directa que revela sus intenciones (ya que podría ser también el renegado).	-
	Dispara al J5. Deduce que J2 no es forajido, ya que no ha atacado al Sheriff y, por lo tanto, tiene que serlo el jugador que falta.	(!!)
J5. Forajido	*Ataca al J4.* Aunque la jugada es correcta, su motivación fue «por venganza».	(?!)

Al tomar las decisiones en grupo, a nuestro juicio, reflexionaron más sobre las jugadas, en comparación con lo que suele suceder en una partida normal, donde cada rol es ejercido por una sola persona.

7. Comentarios finales y agradecimientos

1. El comportamiento de los estudiantes fue impecable y nos permitió un aprovechamiento completo del taller. Creemos que ellos también disfrutaron con este taller, ya que pidieron unos minutos extra para poder finalizar las actividades.
2. Por otro lado, el tiempo disponible se mostró muy escaso para esta estructura, porque la participación de los estudiantes fue más entusiasta de lo esperado. Hubo que renunciar a que los estudiantes presentaran sus conclusiones en el punto 2.c (que fueron expuestas concisamente por los monitores) y hubo que acortar significativamente la actividad final. Uno de los grupos renunció al descanso de media mañana para que pudiéramos realizar completamente la actividad 3 y conseguimos realizar el taller completo en hora y media.

   Por lo tanto, aunque sea posible realizar el taller en hora y media, según las necesidades del centro, este es susceptible de ser adaptado:

   - a una sola sesión de dos horas que incluya un pequeño descanso,
   - o a dos sesiones no consecutivas de una hora cada una.

[2] Símbolos usados para comentar partidas de ajedrez: (!) Buena jugada, (!!) Jugada brillante, (?) Mala jugada, (??) Muy mala jugada, (!?) Jugada interesante, (?!) Jugada dudosa.

No consideramos en ninguno de los casos conveniente alargar la actividad 1, sino las actividades 2 y 3, en las que invirtiendo más tiempo se obtiene, en nuestra opinión, mucho mayor beneficio en el aprendizaje de los estudiantes.

Si se opta por uno de estos formatos alternativos, creemos que el momento adecuado para interrumpir la actividad es entre los puntos 2.b y 2.c. Si se ha elegido un formato en dos sesiones, se recomienda que los estudiantes preparen en el aula una exposición más completa de sus conclusiones, ya que disponen de los recursos necesarios.

3. Nos gustaría destacar los siguientes puntos observados en la actividad 2:

    - *Los cochecitos*: Los estudiantes mostraron cierta inseguridad con los razonamientos probabilísticos, aunque eran capaces de llegar adecuadamente a las conclusiones. Por eso creemos que este tipo de actividades ayudan a asentar sus conocimientos en un bloque tan importante como este, sobre el que tanto se ha escrito, destacando sus obstáculos en el aprendizaje (véase por ejemplo [1] para más información).
    - *Viaje de fin de curso*: Los estudiantes no están acostumbrados a encontrar problemas sin solución. Cuando veían el resultado de su votación inicial, intentaban cambiar de manera desorganizada sus votos para ganar y les fue difícil identificar el problema: que no existe una solución «buena».

      En general, los estudiantes de este nivel parecen acostumbrados a resolver problemas elementales aplicando un par de reglas o fórmulas y por ello creemos que se lanzaban a «hacer cuentas» sin un mínimo análisis previo.

      Consideramos, por tanto, que actividades de este tipo ayudan a corregir estas tendencias y trabajar la competencia matemática y de autonomía e iniciativa personal de los estudiantes, así como permiten mostrar la utilidad de las matemáticas para tratar problemas reales, que no tienen una solución elemental o una solución que sea *la correcta*.
    - *Pueblo duerme*: creemos que al ser este un juego conocido por la mayoría de estudiantes, permitió un aprovechamiento mucho mayor de la actividad, ya que comprendían perfectamente sus propios objetivos y las dificultades del juego. El análisis que llevaron a cabo nos parece que fue bastante acertado.

4. Por último, nos gustaría agradecer su colaboración:

    - A Alessandro Audrito, que participó con nosotros en el desarrollo del taller y a Daniel Estévez por su apoyo técnico.
    - A Ana Bravo y a Adolfo Quirós por sus consejos para la elaboración del taller y posteriormente de este artículo.
    - Al Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid y a Semana de la Ciencia por darnos esta oportunidad, y también al IES Avenida de los Toreros, por su entusiasta participación en la actividad.

Sin su inestimable ayuda este taller no hubiera sido posible.

REFERENCIAS

[1] C. S. CASTRO, Sesgos en el razonamiento probabilístico y efectos de la instrucción estadística elemental, *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas* **28** (1998), 37–52.

[2] EDGE, BANG!, http://www.edgeent.com/juegos/coleccion/bang.

[3] W. W. HARBAUGH, K. KRAUSE Y S. J. LIDAY, Bargaining by Children, *University of Oregon Economics Working Paper*, n.º 2002-4, 2003.

[4] P. MORRIS, *Introduction to Game Theory*, Springer Verlag, New York, 1994.

[5] R. B. MYERSON, *Game Theory: Analysis and conflict*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1991.

[6] G. SAAD Y T. GILL, Sex differences in the ultimatum game: An evolutionary psychology perspective, *Journal of Bioeconomics* **3** (2001), 171–193.

[7] P. TALWALKAR, The ultimatum game played by children; entrada en el blog *Mind your decisions*, http://mindyourdecisions.com/blog/2009/11/03/.

[8] A. TVERSKY Y D. KAHNEMAN, Judgment under uncertainty: Heuristics and biases, *Science* **185** (1974), n.º 4157, 1124–1131.

[9] J. VON NEUMANN Y O. MORGENSTERN, *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1944.

BEATRIZ BUENO-LARRAZ, DPTO. DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID
Correo electrónico: beatriz.bueno@uam.es, beatriz.bueno.larraz@gmail.com

L. FELIPE PRIETO-MARTÍNEZ, DPTO. DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID
Correo electrónico: luisfelipe.prieto@uam.es, prieto.martinez@gmail.com

RAQUEL SÁNCHEZ-CAUCE, DPTO. DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID
Correo electrónico: raquel.sanchezc@uam.es, r.cauce@gmail.com

ROBERTO SOTO-VARELA, DPTO. DE DIDÁCTICA Y TEORÍA DE LA EDUCACIÓN, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID
Correo electrónico: robertosotovarela@gmail.com