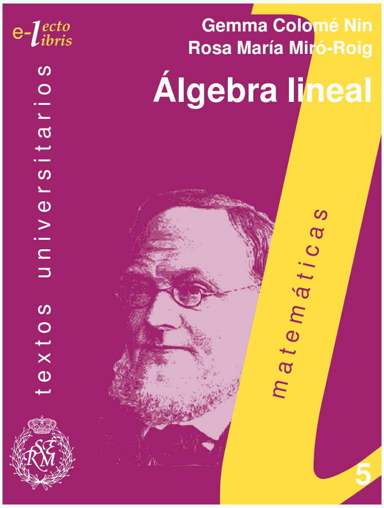
Reseña de libros

«Álgebra Lineal»,
de Gemma Colomé Nin y Rosa María Miró-Roig



Título: Álgebra Lineal
Autores: Gemma Colomé Nin y Rosa María Miró-Roig
Editorial: Ediciones Electolibris, coedición con la RSME
Fecha de publicación: 2014
Páginas: xii+358
ISBN: 978-84-940688-9-8

En todos los grados de las áreas de ciencias e ingeniería existe, más o menos explícita, alguna asignatura de álgebra lineal. Para los grados de matemáticas en particular, esta disciplina, junto con el cálculo, constituye uno de sus pilares fundamentales. Así, contar con un buen libro de álgebra lineal, como el que presentamos en esta reseña, resulta una herramienta esencial tanto para profesores como para alumnos universitarios. El libro de las doctoras Colomé Nin y Miró-Roig está avalado por la experiencia docente e investigadora de ambas y cuenta, además, con la colaboración de la doctora Irene Llerena, coautora del que ha sido libro de referencia en álgebra lineal para muchas generaciones, el «Castellet-Llerena».

El libro está estructurado en ocho capítulos, de los cuales podríamos decir que los cuatro primeros están básicamente dedicados a preliminares y cálculo matricial, mientras que los cuatro últimos abordan el álgebra lineal de manera más general. De esta manera, el libro se adecúa bien tanto a cursos destinados a grados en ingeniería como a grados de ciencias y, por supuesto, a grados en matemáticas. La lectura del libro es especialmente agradable, consiguiendo incluso que partes *a priori* tediosas de ciertas demostraciones resulten amenas. A esto contribuye la edición del texto que, sin recargarlo en exceso con ilustraciones y colores, consigue no hacerse monótono.

Cada capítulo cuenta con un buen número de ejemplos, incluidos varios que se ilustran con cálculos en *Mathematica* y *Maxima*, así como ejercicios (165 en total) que están resueltos en la web que acompaña el libro y son directamente accesibles desde la versión electrónica del mismo. Cuenta además con reseñas biográficas de los matemáticos que contribuyeron al desarrollo de la disciplina. En todos los capítulos se concluye con una aplicación de los resultados vistos en el mismo a otras ramas científicas, como química o computación.

El primer capítulo está dedicado a los preliminares y constituye un muy buen resumen de notaciones, construcciones algebraicas básicas y cálculo con números complejos. De esta manera se intenta cubrir los posibles agujeros que la formación previa del lector pueda tener, hecho que resulta especialmente importante teniendo en cuenta las carencias que habitualmente se observan en sus potenciales lectores, estudiantes de primer curso de universidad. Incluye también este primer capítulo una pequeña introducción a los programas *Mathematica* y *Maxima*. Concluye con una aplicación de lo visto sobre números complejos al estudio de fractales.

El segundo capítulo entra ya en materia abordando el cálculo matricial y vectorial. Aunque el objetivo principal es presentar el cálculo, no se ahorra en ningún momento rigor en la exposición y demostraciones. En este caso la aplicación escogida es en teoría de grafos, viendo cómo las potencias de la matriz de adyacencia de un grafo dan el número de caminos entre dos vértices.

El tercer capítulo aborda el estudio de sistemas lineales. Se centra en el algoritmo de Gauss-Jordan, viendo cómo las operaciones con las filas de la matriz se relacionan con la manipulación de las correspondientes ecuaciones. Posteriormente se justifican dichas operaciones con las filas usando productos con matrices elementales y aprovechando esta relación para el cálculo de la matriz inversa. Finaliza el capítulo con una aplicación a la estequiometría, medición de los elementos que intervienen en una reacción química.

El cuarto capítulo está dedicado a los determinantes. La aproximación que se da al tema es, a criterio de quien suscribe, muy acertada desde el punto de vista pedagógico, especialmente para estudiantes de grados de matemáticas o aquellos estudiantes de otros grados que no busquen simples recetas. Se empieza definiendo las propiedades que se desea que tenga el determinante (multilineal, alternado y tomando valor unitario en la matriz identidad) para pasar al cálculo concreto en casos sencillos y a la expresión general habitual que usa los coeficientes de la matriz y el signo de las permutaciones. Posteriormente se estudian propiedades de los determinantes y su desarrollo por filas o columnas. Finalmente, se enlaza con el capítulo anterior definiendo el rango de una matriz, y viendo cómo se relacionan estos conceptos con la existencia de soluciones de sistemas lineales (teorema de Rouché-Frobenius) y su cálculo efectivo (regla de Cramer). Para este capítulo, la aplicación escogida es el cálculo de resultantes de polinomios, que puede ser especialmente interesante de cara a posteriores asignaturas de álgebra a las que tengan que enfrentarse los estudiantes.

El quinto capítulo se centra en el estudio de espacios vectoriales arbitrarios. Empezando por la definición de espacio vectorial y subespacio, siguen los conceptos de independencia lineal y base de un espacio vectorial, que permiten usar todo el lenguaje matricial introducido anteriormente. Se sigue con las operaciones de suma e intersección de subespacios vectoriales y la fórmula de Grassmann. La parte teórica del capítulo termina con la definición de suma directa, espacio cociente y subespacio complementario. La aplicación escogida para este capítulo es la compresión de imágenes, en concreto usando la ondícula de Haar.

Sigue, como es de esperar, un capítulo dedicado a las aplicaciones lineales. Empezando con las definiciones básicas, se pasa a estudiar la matriz asociada a una aplicación lineal respecto de bases para los espacios involucrados. Se introduce posteriormente la composición de aplicaciones lineales y su relación con las matrices. A esto le sigue el primer teorema de isomorfía. La parte teórica del capítulo acaba con el estudio del álgebra de homomorfismos y, en particular, el dual de un espacio vectorial, estudiando también los subespacios ortogonales (tanto de subespacios del espacio vectorial en cuestión como de su dual) y las aplicaciones duales. El capítulo finaliza con aplicaciones a la criptografía; en particular, una variación sobre el cifrado de Hill.

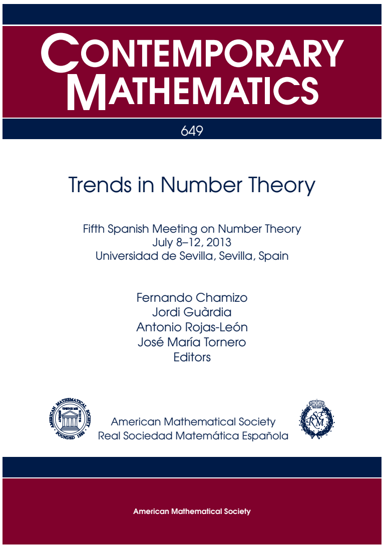
El séptimo capítulo del libro está dedicado a la diagonalización y forma de Jordan de endomorfismos. El capítulo empieza con las definiciones habituales de vector propio y valor propio, junto con la relación con los ceros del polinomio característico. Se introduce la multiplicidad algebraica y geométrica de un valor propio, que se usa para dar un criterio para decidir cuándo un endomorfismo es diagonalizable. Para poder estudiar el caso de endomorfismos no diagonalizables, se explican los teoremas de descomposición en términos de la factorización del polinomio mínimo y los respectivos subespacios invariantes por una parte, y los subespacios f-cíclicos por otra. Se concluye con la clasificación de los endomorfismos dados por la forma canónica de Jordan. La aplicación escogida en este capítulo son las cadenas de Markov.

El último capítulo del libro se centra en las formas bilineales y cuadráticas. Se empieza dando las definiciones y propiedades básicas de ambos objetos, sus relaciones y sus expresiones matriciales. Se demuestra que toda forma cuadrática es diagonalizable, dando tres métodos de cálculo efectivo de la forma diagonal: usando el método de Gauss-Jordan, la completación de cuadrados y la diagonalización ortonormal. Para el caso de formas cuadráticas sobre el cuerpo de los números reales, se estudia el criterio de Sylvester para decidir cuándo una forma cuadrática es (semi)definida positiva (o negativa) o simplemente no definida. La aplicación que concluye este capítulo es un resultado que traduce el hecho de que un polinomio real tenga todas sus raíces reales a que una forma cuadrática asociada al mismo (y explícitamente calculable) sea definida positiva.

En resumen, se trata de un libro de álgebra lineal muy completo, tanto por el hilo teórico, con las definiciones, los resultados y sus demostraciones, como por los ejemplos que contiene, los ejercicios resueltos y las aplicaciones que ponen los temas tratados en un contexto más general. Si se le tuviera que poner una objeción al libro, sería haber dejado fuera algunos conceptos de espacios vectoriales euclídeos necesarios para asignaturas de geometría que son una continuación natural de las de álgebra lineal. Aun así, el material del último capítulo puede servir de base para el estudio de la geometría euclídea.

Gabriel Cardona, Departament de Ciències Matemàtiques i Informàtica, Universitat de les Illes Balears
Correo electrónico: `gabriel.cardona@uib.es`

«Trends in Number Theory», editado por Fernando Chamizo, Jordi Guàrdia, Antonio Rojas-León y José María Tornero



Título: Trends in Number Theory
Editores: Fernando Chamizo, Jordi Guàrdia, Antonio Rojas-León y José María Tornero
Editorial: AMS y RSME (Contemporary Mathematics, 649)
Fecha de publicación: 2015
Páginas: x + 244
ISBN: 978-0-8218-9858-1

El presente volumen de *Contemporary Mathematics* contiene trece artículos que, fundamentalmente, corresponden a exposiciones que se hicieron en el transcurso de las *Quintas Jornadas de Teoría de Números* celebradas en la Universidad de Sevilla en 2013. Esta serie de jornadas se inició en Vilanova i la Geltrú (Barcelona) en 2005, y desde entonces se han realizado ininterrumpidamente con carácter bienal, estando previstas las séptimas para 2017 en la Universitat de Lleida. Constituyen un lugar de encuentro, de intercambio de información y, también, de escaparate para los jóvenes investigadores en Teoría de Números. Por este motivo, los artículos son independientes y, en ellos, se presentan resultados inéditos de los autores o una visión general de un tema específico, junto con los avances más recientes obtenidos en esta área.

Dos de los artículos, *Automorphic Galois Representation and the Inverse Galois Problem* y *From Galois to Hopf Galois: Theory and Practice*, están relacionados con la teoría de Galois. El primero está centrado en el llamado problema inverso de Galois, que pretende determinar los grupos finitos G para los cuales existe una extensión finita y normal $L/\mathbb{Q}$ cuyo grupo de Galois es isomorfo a G. En ese artículo, S. Arias de Reyna nos describe las técnicas y los resultados más recientes obtenidos por autores como Dieulefait, Khare, Larsen, Savie y Wiese, que se basan en explotar las propiedades de las representaciones de Galois asociadas a las formas modulares propias de los operadores de Hecke. Fundamentalmente, por esta vía se consigue probar que grupos de la forma $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{\ell^r})$, $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{\ell^r})$, $\mathrm{PSp}_{2n}(\mathbb{F}_{\ell^r})$, $\mathrm{PGSp}_{2n}(\mathbb{F}_{\ell^r})$, $\mathrm{G}_2(\mathbb{F}_{\ell^r})$ y otros se pueden realizar como grupos de Galois. En el segundo artículo, T. Crespo, A. Rio y M. Vela nos muestran una panorámica de la teoría de Hopf-Galois, teoría en fase de construcción, que generaliza la teoría clásica de Galois y cuyo alcance en cuanto a aplicaciones está todavía por determinar. El artículo se centra en las extensiones separables, que tienen una conexión importante con la teoría de grupos. En particular, se caracterizan todas las extensiones intermedias de la clausura normal de extensiones de grado pequeño (4, 5 y 6).

Los artículos *Covering Techniques and Rational Points on Some Genus* 5 *Curves* y *Elliptic Curves with Torsion Group* $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ *or* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ tratan de problemas diofánticos. En el primero, E. González-Jiménez centra su atención en dar un procedimiento para determinar los puntos racionales de curvas de género 5, que son intersección de dos curvas elípticas. El problema viene determinado por preguntas acerca de la existencia, en curvas definidas por ecuaciones de Pell o en curvas elípticas, de puntos racionales que contengan una secuencia que, en una coordenada, sea una progresión aritmética. Aplicando el procedimiento propuesto, se da una respuesta para el caso de la ecuación de Pell y se contesta también una pregunta formulada por Bremner sobre la imposibilidad de tener 9 puntos racionales de una curva elíptica en una determinada progresión aritmética. En el segundo, A. Dujella y J. C. Peral se concentran en la búsqueda de curvas elípticas racionales cuyo grupo de torsión G sea el que consta en el título y que tengan rango alto. Se ha constatado empíricamente que la existencia de torsión actúa como restricción para el rango. En el artículo prueban la existencia de una infinidad de curvas elípticas con grupo de torsión G (en ambos casos) y cuyo rango es como mínimo 3. El resultado supera en rango los ejemplos conocidos anteriormente de curvas elípticas con estos grupos de torsión.

En el artículo *Classification des représentations modulaires de* $\mathrm{GL}_n(q)$ *en caractéristique non naturelle*, A. Mínguez y V. Sécherre nos ofecen una visión global de la clasificación, debida a R. Dipper y G. James, de R-representaciones irreducibles de $\mathrm{GL}_n(k)$, donde k es un cuerpo finito, n es un entero ≥ 1 y R un cuerpo algebraicamente cerrado de característica distinta de la de k. Presentan el principio de clasificación del conjunto de clases de isomorfismo de representaciones irreducibles de $\mathrm{GL}_n(k)$ para todo $n \geq 0$ bajo una forma axiomática basada en la existencia de dos aplicaciones que satisfacen cuatro propiedades.

F. Fité, en *Equidistribution, L-Functions, and Sato-Tate Groups*, nos ofrece una amplia panorámica de un tema importante en el que recientemente se han producido notables avances en los que el autor ha tenido una relevante participación. La conjetura inicial de Sato-Tate, ya demostrada, concierne a la distribución de las trazas de los morfismos de Frobenius de una curva elíptica definida sobre $\mathbb{Q}$ sin multiplicación compleja. Serre generalizó esta conjetura a variedades proyectivas no singulares X definidas sobre un cuerpo de números. El artículo detalla la definición de equidistribución y su conexión con las funciones L provenientes de representaciones continuas de un grupo compacto G en $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$, la definición del grupo de Sato-Tate de la variedad X, y la conjetura generalizada de Serre que predice cómo la medida de Haar de este grupo gobierna la equidistribución de las clases de conjugación de la representación ℓ-ádica asociada a X. Se describen los resultados conocidos, y también los obtenidos más recientemente, relativos a variedades abelianas de dimensión ≤ 3. En el caso de superficies abelianas, el autor, Kedlaya, Rotger y Sutherland han probado que existen 52 grupos de Sato-Tate y los han determinado. De estos grupos, 38 corresponden a las superficies abelianas definidas sobre $\mathbb{Q}$.

En el artículo *On Quantum Integers and Rationals*, B. Le Stum y A. Quirós proponen, con demostraciones completas, un marco general en el que tratar con los q-análogos de las unidades de un anillo. Muchas de las fórmulas que dan no hacen sino unificar las ya conocidas en diversos contextos, pero se presentan sin restricciones sobre la característica del anillo y permitiendo que la perturbación q pueda ser tanto transcendente como una raíz de la unidad. Introducen además algunos conceptos nuevos, como los de «platitud cuántica» y «característica cuántica positiva» que, juntos, generalizan la característica positiva usual. Además, estudian en detalle dos construcciones novedosas: los números racionales cuánticos en un anillo y las potencias divididas cuánticas.

En el artículo *A Space of Weight* 1 *Modular Forms Attached to Totally Real Cubic Number Fields*, G. Mantilla-Soler considera el conjunto de clases de isomorfismo de cuerpos de números cúbicos cuyo discriminante d es el discriminante fundamental de un cuerpo cuadrático real, y asocia a cada uno de estos cuerpos K una forma modular f_K de peso 1 y nivel N igual a $d/3$ o $3d$, dependiendo de que 3 divida a d o no, y con carácter de Dirichlet cuadrático de conductor $-N$. El autor prueba que esta asignación es inyectiva, es decir, f_K determina el cuerpo K.

A. Castaño, en *Two Mayer-Vietoris Spectral Sequences for $\mathcal{D}$-modules*, presenta dos sucesiones espectrales de la localización de Mayer-Vietoris de ciertos $\mathcal{O}_X$-módulos sobre el complemento de una subvariedad cerrada de una variedad algebraica X definida sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Como aplicación, calcula la cohomología del complemento de cualquier configuración de hiperplanos.

G. Márquez Campos y J. M. Tornero abordan, en *Characterization of*

Gaps and Elements of a Numerical Semigroup Using Groebner Bases, el estudio de semigrupos numéricos, esto es, semigrupos de los enteros positivos, dando una caracterización de sus elementos a través de bases de Groebner. Proporcionan también cotas superiores para el número de elementos esporádicos y para el conductor de un tal semigrupo.

F. Pablos nos ofrece, en *Reciprocity Laws Related to Finite Potent Endomorphism*, una visión general de resultados acerca la estructura de los endomorfismos finitos y potentes, así como las leyes de reciprocidad relacionadas con estos operadores lineales. Nos presenta también demostraciones del teorema del residuo y de la ley de reciprocidad para el emparejamiento de Segal-Wilson.

En *When the Modular World Becomes Non-Holomorphic*, D. Raboso presenta una introducción a los fundamentos de la teoría espectral de formas automorfas, subrayando las ideas subyacentes en los teoremas importantes de esta teoría y mostrando su contribución en algunos aspectos de esta área.

En *Fractional p-adic Differentiability Under the Amice Transform*, E. Nagel estudia las razones por las que los polinomios de Mahler constituyen simultáneamente una base ortogonal de las funciones continuas, diferenciables y localmente analíticas en $\mathbb{Z}_p$, aunque tiene diferentes propiedades de convergencia en cada uno de los tres espacios de funciones.

En su conjunto, los artículos recogidos en este volumen muestran una imagen fiel, aunque necesariamente parcial, de la mucha y buena actividad que se desarrolla en España en diversos aspectos de la Teoría de Números.

Josep González, Dpt. de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya
Correo electrónico: josep.gonzalez@upc.edu