Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri Ramírez y José Luis Díaz Barrero

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Madre de Dios 53, 26006, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 31 de octubre de 2017.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 313. *Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.*

Si B y C son dos vértices fijos de un triángulo ABC y la simediana que parte de B está contenida en una recta fija que pasa por B, determinar el lugar geométrico del vértice A. (Las simedianas de un triángulo son las rectas simétricas de las medianas respecto de las bisectrices interiores.)

Problema 314. *Propuesto por Manuel Benito Muñoz, Logroño, La Rioja.*

Consideramos el conjunto $A = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{4\}$, donde $n \geq 4$ es un número natural. ¿Para qué valores de n podemos descomponer A en dos conjuntos disjuntos B y C tales que el producto de todos los números pertenecientes a B y el producto de todos los números pertenecientes a C sean dos números consecutivos?

Problema 315. *Propuesto por Daniel Sitaru, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, probar que

$$\frac{e^b - e^a}{b - a} \geq \frac{e^a}{24}(b-a)^2 + \sqrt{e^{a+b}}.$$

PROBLEMA 316. *Propuesto por Cornel Ioan Vălean, Teremia Mare, Timiş, Rumanía.*

Evaluar la suma

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{k+n}\frac{H_{k+n}^2}{k+n},$$

donde $H_i = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{i}$ denota el i-ésimo número armónico.

PROBLEMA 317. *Propuesto por Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Logroño.*

Para cada $m \in [1, \infty)$ denotaremos por C_m la circunferencia de ecuación

$$(4x - (m+1)\sqrt{m^2-1})^2 + (4y - m(m-1))^2 = m^2(m-1)^2.$$

Dados x e y números reales positivos, probar que $x^2 \geq y$ si y solo si existe m tal que el punto (x, y) pertenece a la circunferencia C_m.

PROBLEMA 318. *Propuesto por Leonard Giugiuc, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Sean a, b, c y d números reales no negativos tales que $ab+bc+cd+da+ac+bd = 6$. Probar que

$$\frac{abc + abd + acd + bcd}{2\sqrt{2}} \leq 1 + (\sqrt{2} - 1)abcd.$$

PROBLEMA 319. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.*

Sean $\mathcal{T}$ el conjunto de todos los triángulos rectángulos con lados de longitud entera y n un número natural.

a) Probar que existen al menos dos triángulos en $\mathcal{T}$ cuya área es igual a n veces su perímetro.

b) Probar que existen infinitos triángulos en $\mathcal{T}$ para los que la diferencia entre las longitudes de la hipotenusa y del cateto mayor es igual a n.

c) Probar que existen infinitos triángulos en $\mathcal{T}$ para los que diferencia entre las longitudes de sus catetos es igual a n.

PROBLEMA 320. *Propuesto por D. M. Bătineţu-Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucarest, Rumanía, y Neculai Stanciu, "George Emil Palade" Secondary School, Buzău, Rumanía.*

Sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales positivos tal que $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = a$, siendo a un cierto valor real positivo. Consideramos la sucesión dada por $x_1 = 1$ y $x_n = \sqrt[n]{\sqrt{3!}\sqrt[3]{5!}\sqrt[4]{7!}\cdots\sqrt[n]{(2n-1)!}}$. Evaluar los límites

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}^3}{x_{n+1}} - \frac{a_n^3}{x_n}\right) \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{x_n}{a_n}\right).$$

Soluciones

Corrección a la solución del Problema 281. Como muy acertadamente nos ha hecho notar J. Antonio Pérez Poquet, en la primera fórmula de la solución al Problema 281 aparecida en el número anterior hay un error. En efecto, donde pone

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} \leq \operatorname{tg} A = \frac{r}{s-a} = \frac{2r}{b+c-a},$$

que es obviamente incorrecto, debería poner

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} \leq \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{s-a} = \frac{2r}{b+c-a}.$$

Damos las gracias a J. Antonio por su observación.

Problema 289. *Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.*

En el triángulo ABC, la bisectriz interior del ángulo A corta al lado opuesto en el punto D. Los puntos O, O_1 y O_2 son los centros de las circunferencias circunscritas a los triángulos ABC, ABD y ACD, respectivamente. Probar que $OO_1 = OO_2$.

Solución enviada por Pablo Decimavilla (estudiante), Colegio Marista San José, León.

Como se puede observar en la figura 1, las mediatrices de AB, AC y AD se cortan en los puntos O, O_1 y O_2 formando un triángulo. Como el ángulo que forman dos segmentos es igual al que forman las mediatrices de dichos segmentos, se cumple que $\angle OO_1O_2 = \angle OO_2O_1$, ya que $\angle BAD = \angle DAC$ por ser la recta AD la mediatriz del ángulo A. Por tanto, el triángulo OO_1O_2 es isósceles y $OO_1 = OO_2$.

También resuelto por F. D. Aranda, R. Barroso, R. S. Eléxpuru, A. Fanchini, I. Larrosa, J. Mir, J. Mozo, J. Nadal, B. Salgueiro, N. Stanciu y T. Zvonaru (conjuntamente) y el proponente.

Problema 290. *Propuesto por Ovidiu Furdui, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía, y Cornel Ioan Vălean, Teremia Mare, Timiş, Rumanía.*

Siendo $H_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ el n-ésimo número armónico, probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{H_{2n}}{2n+1} x^{2n+1} = -\frac{\operatorname{arc\,tg}(x)\log(1+x^2)}{2}, \quad x \in [-1,1].$$

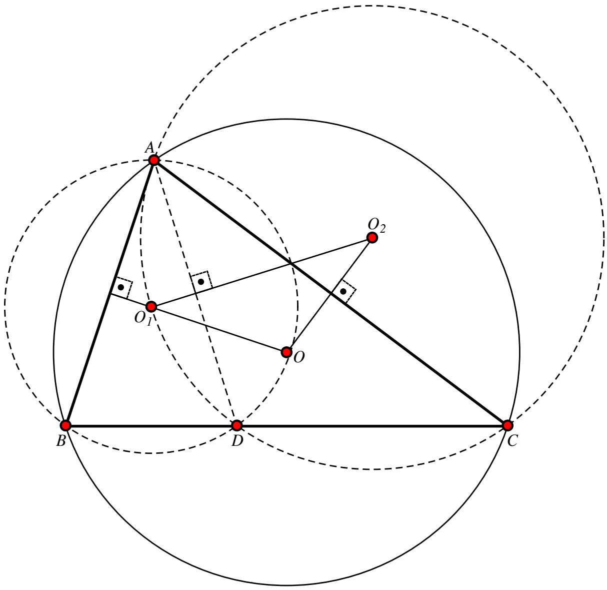

Figura 1: Esquema para la solución del Problema 289.

Solución enviada por Albert Stadler, Herrliberg, Suiza.

En primer lugar debemos observar que

$$H_{2n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 t^{j-1}\, dt = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{1-t}\, dt.$$

De esta forma tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n H_{2n} x^{2n} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{1-t}\, dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{(tx)^2}{1+(tx)^2} - \frac{x^2}{1+x^2} \right) \frac{dt}{1-t} \\
&= -\frac{x^2}{1+x^2} \int_0^1 \frac{1+t}{1+t^2x^2}\, dt \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{2x}{1+x^2} \operatorname{arc\,tg}(x) + \frac{1}{1+x^2} \log(1+x^2) \right) \\
&= -\frac{1}{2} \big(\operatorname{arc\,tg}(x) \log(1+x^2) \big)'.
\end{aligned}$$

El intercambio de la suma y la integral que hemos realizado en el cálculo anterior está justificado por la convergencia uniforme para $|x| < 1$ de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n H_{2n} x^{2n}$.

La identidad propuesta se obtiene para $|x| < 1$ a partir de aquí por un sencillo argumento de integración y, para $x = \pm 1$, como consecuencia del teorema de Abel, ya que la serie es convergente para esos valores por el criterio de Leibniz, y la función $\operatorname{arc\,tg}(x)\log(1+x^2)$ es continua en esos puntos.

También resuelto por A. Álamo, A. M. Encinas, L. Glasser, G. Hernández, J. Nadal, B. Salgueiro, J. Vinuesa y el proponente.

Problema 291. *Propuesto por Larry Glasser, Clarkson University, Potsdam, Nueva York, EE.UU.*

Para $|a| < 1/2$, evaluar

$$\int_0^\infty \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\cos(at - \operatorname{sen} t)\frac{e^{\cos t}}{t}\,dt.$$

Solución enviada por el proponente (modificada por los editores).

Si $|a| < 1/2$, el valor de la integral propuesta es $\pi/2$.

Consideramos la función $f(u) = 1/\Gamma([u]+1)$, con $u > 0$. La transformada de Laplace de f puede calcularse del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(s) &= \int_0^\infty f(u)e^{-su}\,du = \sum_{k=0}^\infty \int_k^{k+1} \frac{e^{-su}}{k!}\,du \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}\int_0^1 e^{-s(k+z)}\,dz = \frac{1-e^{-s}}{s}\sum_{k=0}^\infty \frac{e^{-sk}}{k!} = \frac{1-e^{-s}}{s}e^{e^{-s}}.\end{aligned}$$

Puesto que $\mathcal{L}f(s)$ es una función analítica en todo el plano complejo, es claro que

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \mathcal{L}f(s)e^{us}\,ds$$

y, con el cambio de variable $s = it$, se tiene

$$\begin{aligned}f(u) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{i(u-1/2)t}\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\frac{e^{e^{-it}}}{t}\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{i((u-1/2)t-\operatorname{sen} t)}\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\frac{e^{\cos t}}{t}\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \cos((u-1/2)t-\operatorname{sen} t)\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\frac{e^{\cos t}}{t}\,dt \\ &\qquad + \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \operatorname{sen}((u-1/2)t-\operatorname{sen} t)\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\frac{e^{\cos t}}{t}\,dt.\end{aligned}$$

Puesto que el integrando de la primera integral de la última expresión es una función par y el de la segunda es impar, deducimos la identidad

$$f(u) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos((u-1/2)t - \operatorname{sen} t)\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)e^{\cos t}\,\frac{dt}{t}.$$

Ahora, tomando $u = a + 1/2$, con $|a| < 1/2$, concluimos el resultado, ya que, en ese caso, $f(u) = 1$.

No se han recibido otras soluciones.

PROBLEMA 292. *Propuesto por Marcel Chiriţă, Bucarest, Rumanía.*

Sea M un punto interior de un triángulo ABC, cuyos lados miden, denotados de la manera habitual, a, b y c. Probar que

$$MA + MB + MC \geq \sqrt[3]{a^2MA + b^2MB + c^2MC}.$$

Solución enviada por Leonard Giugiuc, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.

Probaremos la desigualdad

$$MA + MB + MC \geq \sqrt[3]{3(a^2MA + b^2MB + c^2MC)} \tag{1}$$

que, obviamente, implica la propuesta.

Consideraremos la notación $MA = x$, $MB = y$, $MC = z$, $\angle BMC = 2\alpha$, $\angle CMA = 2\beta$ y $\angle AMB = 2\gamma$. Notar que $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ y $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Por el teorema del coseno tenemos

$$a^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos 2\alpha, \quad b^2 = z^2 + x^2 - 2zx\cos 2\beta \quad \text{y} \quad c^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 2\gamma.$$

De esta forma, (1) es equivalente a

$$\frac{(x+y+z)^3}{3} \geq -2xyz(\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma) + \sum_{\text{cíclica}} xy(x+y). \tag{2}$$

Usando las identidades elementales

$$-2(\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma) = 1 + 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

$$2xyz + \sum_{\text{cíclica}} xy(x+y) = (x+y)(y+z)(z+x)$$

y

$$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x),$$

la desigualdad (2) se transforma en

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq 8xyz\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

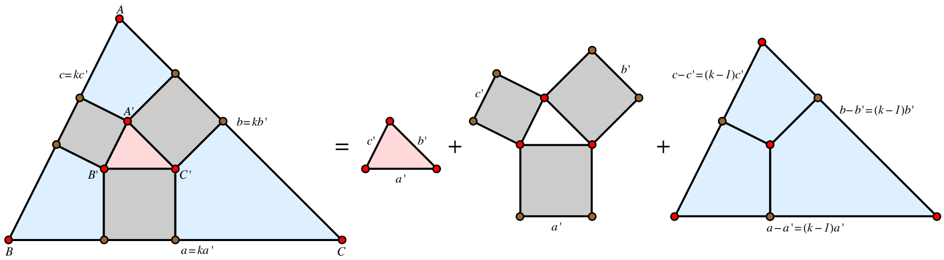

Figura 2: Esquema para la solución del Problema 293.

que puede probarse utilizando la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica y la desigualdad

$$8 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \leq 1,$$

que es la fórmula 2.24 del libro O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović y P. M. Vasić, *Geometric inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.

También resuelto por F. D. Aranda, J. Nadal, B. Salgueiro y el proponente.

Problema 293. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Gerona.*

Sobre cada uno de los lados de un triángulo ABC, y hacia su interior, levantamos un cuadrado de modo que los lados de estos cuadrados que son paralelos a los lados del triángulo, pero no están contenidos en ellos, forman un triángulo $A'B'C'$ interior al triángulo ABC (que obviamente es semejante a él). Si la razón de semejanza $|AB|/|A'B'| = k$, probar que $k \geq 2\sqrt{3} + 1$.

Solución enviada por Juan Mir Pieras, Lloseta, Mallorca.

Sean a, b, c, Δ y a', b', c', Δ' las longitudes de los lados y el área de los triángulos ABC y $A'B'C'$, respectivamente. Con la razón de semejanza dada k tenemos que $a = ka'$, $b = kb'$ y $c = kc'$.

El triángulo ABC puede descomponerse en tres figuras de área conocida tal y como se muestra en la figura 2. Así es evidente la identidad

$$\Delta = \Delta' + a'^2 + b'^2 + c'^2 + (k-1)^2\Delta'$$

y, como $\Delta = k^2\Delta'$, deducimos que

$$k = \frac{a'^2 + b'^2 + c'^2}{2\Delta'} + 1 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\Delta} + 1.$$

Ahora, el resultado pedido se sigue de manera inmediata de la conocida como *desigualdad de Weitzenböck*, $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\Delta$, que por completitud probamos a continuación para terminar.

En efecto, por el teorema del coseno y usando la identidad $\Delta = \frac{ab \operatorname{sen} C}{2}$, se verifica que

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}\Delta &= 2(a^2 + b^2) - 4ab\left(\frac{1}{2}\cos C + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} C\right) \\ &= 2(a^2 + b^2) - 4ab\cos(C - \pi/3) \\ &= 2(a - b)^2 + 4ab(1 - \cos(C - \pi/3)) \geq 0, \end{aligned}$$

lo que prueba la desigualdad. Es claro que la igualdad se alcanza si y solo si ABC es un triángulo equilátero.

También resuelto por C. Beade, R. S. Eléxpuru, A. Fanchini, I. Larrosa, B. Salgueiro, N. Stanciu y T. Zvonaru (conjuntamente) y el proponente (cuatro soluciones).

NOTA. B. Salgueiro hace remontar el problema al número 57 del libro *Pillow problems thought out during wakeful hours* de C. L. Dogson (más conocido como Lewis Carrol) del año 1894. I. Larrosa y N. Stanciu y T. Zvonaru observan en sus soluciones que el centro de la homotecia que relaciona los triángulos ABC y $A'B'C'$ es el *punto de Lemoine* (de concurrencia de las simedianas) del triángulo ABC. R. S. Eléxpuru e I. Larrosa anotan que la razón de la homotecia es $k = 2\cot\omega + 1$ donde ω es el *ángulo de Brocard* de ABC, aportando para esto R. S. Eléxpuru la referencia *Géométrie du triangle* de T. Lalesco, Gabay, París, 1987, págs. 117–118.

PROBLEMA 294. *Propuesto por D. M. Bătineţu-Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucarest, Rumanía, y Neculai Stanciu, "George Emil Palade" Secondary School, Buzău, Rumanía.*

Sean $\{F_k\}_{k\geq 0}$ los números de Fibonacci (tomando $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$) y A, B y C matrices cuadradas de orden n, con $a_{i,j} = F_j$, $b_{i,j} = F_i$ y $c_{i,j} = F_{2i-1}$, para $i, j = 1, \ldots, n$. Si m y p son números enteros positivos, calcular $(A \cdot B)^m \cdot C^p$.

Solución enviada por Guillermo Hernández, Universidad de Salamanca, Salamanca.

Los elementos de la matriz $A \cdot B$ son de la forma

$$(A \cdot B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1},$$

donde la última identidad se sigue por un argumento de inducción. En consecuencia, $A \cdot B = F_n F_{n+1} \mathbf{1}_n$ donde $\mathbf{1}_n$ es la matriz $n \times n$ con todas sus entradas iguales a uno.

Si una matriz $M = (m_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ tiene todas sus filas iguales, es decir, si $m_{i,j} = k_i$ para $j = 1, \dots, n$, resulta sencillo comprobar la identidad

$$M^\ell = \Big(\sum_{k=1}^n k_i\Big)^{\ell-1} M.$$

Así, como las matrices $A \cdot B$ y C tienen todas sus filas iguales, deducimos las igualdades

$$(A \cdot B)^m = n^{m-1} F_n^m F_{n+1}^m \mathbf{1}_n$$

y

$$C^p = \Big(\sum_{k=1}^n F_{2k-1}\Big)^{p-1} C = F_{2n}^{p-1} C,$$

donde la anterior suma de números de Fibonacci se obtiene nuevamente por inducción. Por tanto, como

$$\mathbf{1}_n \cdot C = \Big(\sum_{k=1}^n F_{2k-1}\Big)\mathbf{1}_n = F_{2n}\mathbf{1}_n,$$

concluimos que

$$(A \cdot B)^m \cdot C^p = n^{m-1} F_n^m F_{n+1}^m F_{2n}^p \mathbf{1}_n.$$

También resuelto por A. Álamo, J. Mir, J. Nadal, Á. Plaza, B. Salgueiro y los proponentes.

Problema 295. *Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.*

En el triángulo ABC con incentro I, la recta perpendicular a AI que pasa por el punto I corta al lado AC en el punto D. Sean M y N los puntos medios de ID e IB, respectivamente, y el punto E la proyección ortogonal de I sobre BD. Probar que CE pasa por el punto medio de MN.

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Sean P el punto medio de MN, Q el punto de intersección con BD de la recta paralela a AB que pasa por I, $\alpha = \angle BAC/2$, $\beta = \angle CBA/2$, $\gamma = \angle ACB/2$ y $\delta = \angle DBI$, véase la figura 3. Demostrar que la recta CE pasa por P equivale a probar que los puntos C, E y P están alineados, es decir, que $\angle CED = \angle PEQ$.

Sea $D' = DI \cap AB$. Como $DI = ID'$, del teorema de Tales deducimos que Q y P son, respectivamente, los puntos medios de los segmentos BD e IQ.

Por otro lado, tenemos que $\angle ADI = \pi/2 - \alpha$ y, como IQ es paralela a AB, $\angle EQI = \angle DBA = \beta + \delta$, con lo cual $\angle PIE = \angle QIE = \pi/2 - \beta - \delta$. Al ser $\angle IEQ = \pi/2$, E pertenece a la circunferencia de diámetro IQ, cuyo centro es P, luego $PI = PE = PQ$, y EPQ es un triángulo isósceles con $\angle PEQ = \beta + \delta$.

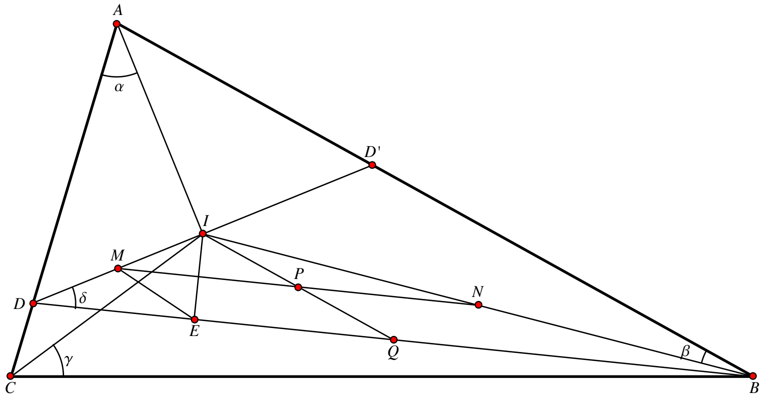

Figura 3: Esquema para la primera solución del Problema 295.

Sea r el radio de la circunferencia inscrita al triángulo ABC. Se tiene $IA = r\operatorname{cosec}\alpha$, $IB = r\operatorname{cosec}\beta$, $IC = r\operatorname{cosec}\gamma$, $ID = IA\operatorname{tg}\alpha = r\sec\alpha$ e $IE = IB\operatorname{sen}\delta = r\operatorname{cosec}\beta\operatorname{sen}\delta$. Ahora bien, como

$$\pi - \beta - \gamma = \angle BIC = \angle BIP + \angle PIE + \angle EIC = \beta + \left(\frac{\pi}{2} - \beta - \delta\right) + \angle EIC,$$

y $2(\alpha+\beta+\gamma) = \pi$, resulta que $\angle EIC = \alpha + \delta$.

Por tanto, probar $\angle CED = \beta + \delta$ es equivalente a probar $\angle CEI = \pi/2 + \beta + \delta$. Esto último conlleva $\angle ICE = \gamma - 2\delta$ que, aplicando el teorema del seno al triángulo IEC, equivale a

$$\frac{r\operatorname{cosec}\gamma}{\operatorname{sen}(\pi/2+\beta+\delta)} = \frac{r\operatorname{cosec}\beta\operatorname{sen}\delta}{\operatorname{sen}(\gamma-2\delta)},$$

o bien, a que se cumpla la relación $\cot\delta = 2\cot\gamma + \cot\beta$.

Ahora bien, por otra parte, del hecho de ser $\angle ADB = \pi - 2\alpha - \beta - \delta$, se sigue que $\angle IDB = \pi - 2\alpha - \beta - \delta - (\pi/2 - \alpha) = \gamma - \delta$ y aplicando el teorema del seno en el triángulo IBD se obtiene

$$\frac{r\operatorname{cosec}\beta}{\operatorname{sen}(\gamma-\delta)} = \frac{r\sec\alpha}{\operatorname{sen}\delta},$$

de donde, usando la relación $\alpha = \pi/2 - (\beta+\gamma)$, se deduce que $\cot\delta - \cot\gamma = \cot\gamma + \cot\beta$, y hemos finalizado.

Solución enviada por el proponente.

Es inmediato comprobar que los triángulos CDI y CIB tienen los mismos ángulos, que son $\gamma/2$, $\alpha/2 + \pi/2$ y $\beta/2$, donde α, β y γ son los ángulos del triángulo

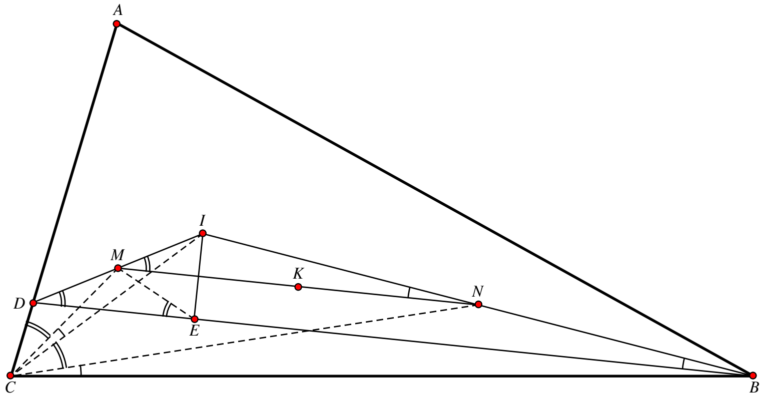

Figura 4: Esquema para la segunda solución del Problema 295.

ABC, véase la figura 4. Por tanto, las medianas CM y CN de estos dos triángulos los dividen en partes semejantes, obteniendo las igualdades

$$\angle ICM = \angle BCN =: \xi \qquad \text{y} \qquad \angle MCD = \angle NCI =: \theta.$$

Denotando por φ la semejanza (directa) de centro C tal que $\varphi(D) = I$ y $\varphi(I) = B$, vemos que $\varphi(M) = N$. Puesto que los triángulos de la forma $CX\varphi(X)$ son semejantes entre sí, se tiene en particular que el triángulo CMN es semejante a los triángulos CDI y CIB. Por tanto,

$$\angle NCK = \xi \qquad \text{y} \qquad \angle KCM = \theta,$$

donde K es el punto medio de MN.

Por otra parte, la igualdad $\angle CMN = \angle CIN$ implica que $CMIN$ es un cuadrilátero cíclico, y esto permite deducir que $\angle IMN = \angle ICN = \theta$. También se tiene que $\angle MDE = \theta$, por ser MN y DB paralelas, y $\angle MED = \theta$, por ser M el circuncentro del triángulo rectángulo DEI. De modo que el cuadrilátero $CDME$ es también cíclico. Por tanto, $\angle ECM = \angle EDM = \theta$, y ambos ángulos son iguales al $\angle KCM$, lo que nos permite concluir que las rectas CE y CK son la misma.

También resuelto por A. Fanchini y J. Nadal.

Problema 296. *Propuesto por Alberto Debernardi Pinos, Centre de Recerca Matemàtica, Barcelona.*

Sean $h_0(x) = 1$, $h_1(x) = \log x$ y $h_j(x) = \log(h_{j-1}(x))$, para $j \geq 2$. Para cada $r \in \mathbb{N}$ y $\beta > 0$, consideremos la serie infinita

$$S(r,\beta) = \sum_{n=n_r}^{\infty} \frac{1}{n\big(\prod_{j=0}^{r-1} h_j(n)\big)\big(h_r(n)\big)^{\beta}}\,,$$

donde n_r es el número natural más pequeño tal que $h_r(n_r) > 0$.

a) Determinar los valores de $r \in \mathbb{N}$ y $\beta > 0$ para los cuales la serie $S(r,\beta)$ es convergente.

b) Fijado $r \geq 2$, demostrar que, cuando $1 \leq m \leq r-1$, la serie

$$\sum_{n=n_r}^{\infty} \frac{h_m(n)}{n\big(\prod_{j=0}^{r-1} h_j(n)\big)\big(h_r(n)\big)^{\beta}}$$

es divergente para todo $\beta > 0$.

Solución enviada por Jaime Vinuesa, Santander.

Como consideración previa, tomaremos $h_0(x) = x$, en lugar de como está dada en el enunciado, ya que en ese caso $h_j(x) = \log(h_{j-1}(x))$ incluso para $j = 1$ y así

$$S(r,\beta) = \sum_{n=n_r}^{\infty} \frac{1}{\big(\prod_{j=0}^{r-1} h_j(n)\big)\big(h_r(n)\big)^{\beta}}.$$

Además, resulta útil observar que $h_j(x) = h_{j-1}(t)$, con $t = \log x$.

Puesto que $S(r,\beta)$ es una serie de términos positivos decrecientes, su convergencia es equivalente a la de la integral

$$I(r,\beta) = \int_{n_r}^{\infty} \frac{dx}{\big(\prod_{j=0}^{r-1} h_j(x)\big)\big(h_r(x)\big)^{\beta}}.$$

Para responder el apartado a) probaremos que $I(r,\beta)$ es convergente si y solo si $\beta > 1$. Y para ello usaremos un argumento de inducción sobre r. El caso $r = 1$ es obvio puesto que

$$I(1,\beta) = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\log(x))^{\beta}} = \int_{\log 2}^{\infty} \frac{dt}{t^{\beta}} < \infty \iff \beta > 1.$$

Supongamos ahora que $I(r,\beta)$ converge si y solo si $\beta > 1$ para $r = 1, 2, \ldots, m$. Se tiene

$$\begin{aligned} I(m+1,\beta) &= \int_{n_{m+1}}^{\infty} \frac{dx}{\big(\prod_{j=0}^{m} h_j(x)\big)\big(h_{m+1}(x)\big)^{\beta}} \\ &= \int_{\log(n_{m+1})}^{\infty} \frac{dt}{\big(\prod_{j=1}^{m} h_{j-1}(t)\big)\big(h_m(t)\big)^{\beta}} \\ &= \int_{\log(n_{m+1})}^{\infty} \frac{dt}{\big(\prod_{j=0}^{m-1} h_j(t)\big)\big(h_m(t)\big)^{\beta}} \end{aligned}$$

que, de acuerdo con la hipótesis de inducción, converge si y solo si $\beta > 1$.

La divergencia de la serie del apartado b) se seguirá de la divergencia de la integral

$$J(m,r,\beta) = \int_{n_r}^{\infty} \frac{h_m(x)}{\big(\prod_{j=0}^{r-1} h_j(x)\big)\big(h_r(x)\big)^{\beta}}\, dx$$

para $\beta > 0$ (lo que, por cierto, también implica la divergencia para $\beta \leq 0$). Procediendo como en el caso anterior,

$$\begin{aligned} J(m,r,\beta) &= \int_{h_1(n_r)}^{\infty} \frac{h_{m-1}(x)}{\big(\prod_{j=0}^{r-2} h_j(x)\big)\big(h_{r-1}(x)\big)^{\beta}}\, dx = \cdots \\ &= \int_{h_m(n_r)}^{\infty} \frac{h_0(x)}{\big(\prod_{j=0}^{r-m-1} h_j(x)\big)\big(h_{r-m}(x)\big)^{\beta}}\, dx \\ &= \int_{h_m(n_r)}^{\infty} \frac{dx}{\big(\prod_{j=1}^{r-m-1} h_j(x)\big)\big(h_{r-m}(x)\big)^{\beta}}. \end{aligned}$$

Puesto que $h_j(x) \leq \log x$ para $j \geq 1$, deducimos que

$$J(m,r,\beta) > \int_{h_m(n_r)}^{\infty} \frac{dx}{(\log x)^{r-m-1+\beta}}$$

y, como es conocido, esta última integral es divergente.

Solución enviada por Alfonso Álamo Zapatero, Universidad de Valladolid, Valladolid.

Dadas dos series de números reales, escribiremos $\sum a_n \sim \sum b_n$ si ambas series tienen el mismo carácter. Obsérvese que se está obviando el índice desde el que se empieza a sumar, pues es irrelevante.

a) Veamos que $S(r,\beta) \sim \sum \frac{1}{n^{\beta}}$ independientemente de r, con lo cual $S(r,\beta)$ converge si y solo si $\beta > 1$, para cada valor de r.

Si $r > 1$, aplicando el criterio de condensación de Cauchy, se tiene

$$\begin{aligned} S(r,\beta) &\sim \sum \frac{2^n}{2^n\big(\prod_{j=0}^{r-1} h_j(2^n)\big)\big(h_r(2^n)\big)^{\beta}} \\ &\sim \sum \frac{1}{n\big(\prod_{j=0}^{r-2} h_j(n)\big)\big(h_{r-1}(n)\big)^{\beta}} = S(r-1,\beta), \end{aligned}$$

pero, usando de nuevo el criterio de condensación de Cauchy, $S(1,\beta) \sim \sum \frac{1}{n^{\beta}}$, que es lo que queríamos ver.

b) Una repetida aplicación del criterio de condensación muestra que

$$\sum \frac{h_m(n)}{n\big(\prod_{j=0}^{r-1} h_j(n)\big)\big(h_r(n)\big)^{\beta}} \sim \sum \frac{b_{m-r}(n)}{n^{\beta}},$$

donde la sucesión $b_k(n)$ está definida por $b_1(n) = 2^n$ y $b_{k+1}(n) = 2^{b_k(n)}$. Como $r - m \geq 1$ deducimos inmediatamente la divergencia de la serie propuesta.

También resuelto por R. de la Cruz, G. Hernández y el proponente.