

La curva de Szegő

por

Bernardo de la Calle Ysern y Francisco Carbajo Gibaja

RESUMEN. Los ceros de los polinomios de Taylor de la función exponencial tienden a infinito cuando el grado de los polinomios crece; sin embargo, convenientemente reescalados quedan confinados en una región compacta del plano complejo y dibujan una curva. Revisaremos el ingenioso procedimiento que llevó a Szegő a encontrarla así como a hallar la distribución que los ceros adoptan sobre ella. Del reescalamiento empleado en la curva de Szegő surge la cuestión de hallar la velocidad de divergencia a infinito de los ceros para el caso de una función entera arbitraria. En la segunda parte del artículo, analizaremos este tema junto con el de cómo el cero de mayor módulo del polinomio de Taylor determina si una función es o no entera y su crecimiento.

PRELIMINARES

Pocos conceptos hay más básicos e importantes en matemáticas que el de un polinomio o el de la función exponencial e^z . Ambos se aúnan si consideramos los polinomios de Taylor de e^z desarrollados en el origen, es decir,

$$P_n(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Cada polinomio P_n tiene n ceros en el plano complejo, mientras que la función exponencial no posee ninguno. ¿Adónde van los ceros de P_n cuando n se hace grande? Si, para infinitos n , al menos uno de los ceros de P_n permaneciese en una región compacta fija, entonces esta colección de ceros tendría un punto de acumulación en dicha región y, debido a la convergencia uniforme en compactos de P_n a e^z , resultaría que e^z se anularía en el punto de acumulación, lo cual es falso. Por tanto, una primera respuesta, más bien superficial, es que *todos* los ceros de P_n se van a infinito cuando n crece. Sin embargo, podemos seguir haciéndonos preguntas: sí, pero ¿cómo se van a infinito? y ¿a qué velocidad? En esta situación, un sencillo resultado [14, pp. 255, 271] sobre localización de ceros de polinomios viene en nuestra ayuda. Denotamos por \mathbb{D} al disco unidad abierto.

TEOREMA DE ENESTRÖM-KAKEYA. *Sea un polinomio $p(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$ con $0 \leq a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. Entonces, todos los ceros de p están en $\overline{\mathbb{D}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a_0 > 0$. Teniendo en cuenta que

$$(1 - z)p(z) = a_0 + (a_1 - a_0)z + (a_2 - a_1)z^2 + \cdots + (a_n - a_{n-1})z^n - a_nz^{n+1},$$

si escogemos un z tal que $p(z) = 0$ obtenemos

$$a_n z^{n+1} = a_0 + (a_1 - a_0)z + (a_2 - a_1)z^2 + \cdots + (a_n - a_{n-1})z^n,$$

o, lo que es lo mismo,

$$0 < a_n = \frac{a_0}{z^{n+1}} + \frac{a_1 - a_0}{z^n} + \frac{a_2 - a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_n - a_{n-1}}{z}.$$

Por tanto,

$$a_n = \left| \frac{a_0}{z^{n+1}} + \frac{a_1 - a_0}{z^n} + \frac{a_2 - a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_n - a_{n-1}}{z} \right|.$$

Si ahora suponemos que $|z| > 1$ y aplicamos la desigualdad triangular, entonces el lado derecho de la igualdad anterior es estrictamente menor que la suma de todos los numeradores, es decir, es menor que a_n , lo cual es absurdo y prueba que $|z| \leq 1$, como queríamos demostrar. \square

Los coeficientes de P_n no satisfacen la hipótesis del teorema de Eneström-Kakeya, pero esto lo arreglamos rápidamente considerando el polinomio

$$Q_n(z) = P_n(nz)$$

que sí la satisface y, por consiguiente, tiene sus ceros en el disco unidad, lo que a su vez implica que P_n tiene todos sus ceros en $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq n\}$. Esto nos da una primera pista de que quizás sea conveniente reescalar los ceros de P_n dividiéndolos por n o, lo que es lo mismo, estudiar los ceros de Q_n .

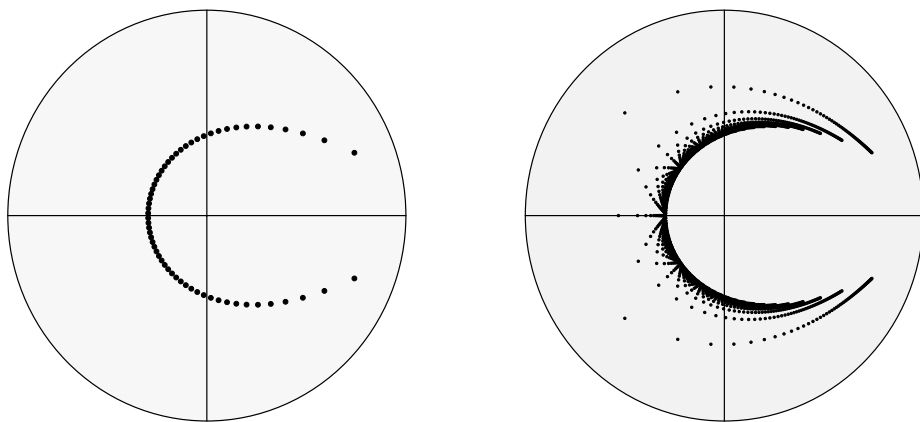


Figura 1: Ceros de Q_n para $n = 60$ (izquierda) y para $n = 1, 2, \dots, 60$ (derecha)

Llegados a este punto podemos sacar provecho de los sofisticados ordenadores que están a nuestra disposición hoy en día para ver directamente qué ocurre con los ceros de Q_n . En la Figura 1 se muestra a la izquierda el resultado para Q_{60} , mientras que a la derecha aparece el agregado de todos los ceros de Q_1, Q_2, \dots, Q_{60} ; en ambos casos

junto con la circunferencia unidad. Parece claro que los ceros tienden a adoptar una posición límite, aunque no es fácil imaginar la forma de ésta cuando nos desplazamos hacia la derecha en el dibujo. Otra información que este experimento proporciona de inmediato es que la distribución límite de los ceros sobre la posible curva no es en absoluto uniforme, ya que existen grandes diferencias en la densidad de los ceros que describen la curva.

En el año 1924, Szegő [20] descubrió este fenómeno, demostró que los ceros se acercan a una curva, halló su expresión y calculó la distribución límite de los ceros sobre ella. Las fórmulas obtenidas y las cuestiones planteadas nos llevarán a resultados de Kakeya y Tsuji sobre el cero de mayor módulo de los polinomios de Taylor. Estos dos temas configuran las dos secciones principales del trabajo, que en gran medida pueden ser leídas de modo independiente. Hemos cuidado especialmente de presentar las demostraciones originales porque creemos que en ellas se encuentra el espíritu de la época, si bien hemos puesto empeño en hacerlas lo más transparentes posible. La última sección trata de dar cierta perspectiva a los temas tratados y comentar desarrollos posteriores. Proponemos así al lector un viaje guiado por esta bella matemática, perteneciente a una época dorada del Análisis, donde con medios sencillos se hacían descubrimientos sorprendentes sobre cuestiones elementales.

1. LA CURVA DE SZEGŐ

Lo primero que haremos será transformar el problema de caracterizar los ceros de Q_n en otro equivalente que parece más complicado, pero en el cual la información relevante sale a la superficie con más facilidad.

Es sencillo probar por inducción, mediante integración por partes, que

$$e^z = P_n(z) + \frac{e^z}{n!} \int_0^z e^{-t} t^n dt,$$

donde z puede ser un número complejo. Por tanto, las soluciones de la ecuación $P_n(z) = 0$ son las soluciones de la ecuación integral

$$1 = \frac{1}{n!} \int_0^z e^{-t} t^n dt. \tag{1}$$

A fin de controlar el tamaño de $1/n!$, y con la mente puesta en la fórmula de Stirling

$$\frac{n^n}{e^n n!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(1 + o(1)\right), \tag{2}$$

hacemos el cambio de variable $t = nu$ en (1) y se obtiene

$$1 = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^{z/n} e^{-nu} u^n du = \frac{n^{n+1}}{e^n n!} \int_0^{z/n} (e^{1-u} u)^n du.$$

No se puede por menos de admirar la maestría de Szegő, que con estos sencillos pasos ha logrado un triple objetivo: en primer lugar aparece de manera natural

la necesidad de reescalar el problema, de modo que buscaremos las soluciones de $P_n(nz) = Q_n(z) = 0$, que son las soluciones de la ecuación

$$1 = \frac{n^{n+1}}{e^n n!} \int_0^z (e^{1-u} u)^n du. \quad (3)$$

En segundo lugar consigue que el factor que aparece delante de la integral tenga un crecimiento polinomial, con lo que no va a ser relevante en la resolución del problema, ya que el integrando tiene un crecimiento exponencial. Y, por último, queda señalado sin lugar a dudas el lugar geométrico de los puntos z que podrían satisfacer la ecuación (3). Porque ¿cómo podría cumplirse la ecuación si $|e^{1-z} z| < 1$? Veremos más adelante que la integral que aparece en (3) no depende del camino que se elija para ir desde el origen hasta z , por lo que podemos considerar que todo el camino de integración está completamente contenido en la región donde se tiene $|e^{1-u} u| < 1$. El integrando, por tanto, tiende a 0 exponencialmente cuando n crece, de modo que el lado derecho de (3) se hace muy pequeño y nunca será 1. Por el contrario, si $|e^{1-z} z| > 1$, entonces parte del camino de integración estará contenido en la región donde se cumple $|e^{1-u} u| > 1$, por lo que el integrando se hace muy grande y tampoco se podrá satisfacer la ecuación. En consecuencia, si recordamos que los ceros de Q_n se encuentran en $\overline{\mathbb{D}}$, la expresión de la curva candidata a ser el lugar límite de los ceros es

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |e^{1-z} z| = 1, |z| \leq 1\}.$$

Llamaremos a esta curva S la *curva de Szegő*. En la Figura 2 se representan la curva de Szegő, la circunferencia unidad y los ceros de Q_{60} .

Se probará que si un punto z no está en S , entonces el lado derecho de (3) no tiende a 1 cuando n se hace grande. Con este fin estudiaremos el comportamiento asintótico de las funciones

$$H_n(z) = \int_0^z (e^{1-u} u)^n du, \quad (4)$$

puesto que el comportamiento de la fracción situada delante de la integral en (3) es conocido en virtud de la fórmula de Stirling. Y, en este estudio, la función

$$h(z) = e^{1-z} z$$

desempeñará un papel fundamental, por lo que es esencial que nos familiaricemos con ella. Si escribimos $z = x + iy = re^{i\theta}$, entonces

$$h(z) = re^{1-r \cos \theta} e^{i(\theta - r \sin \theta)}, \quad (5)$$

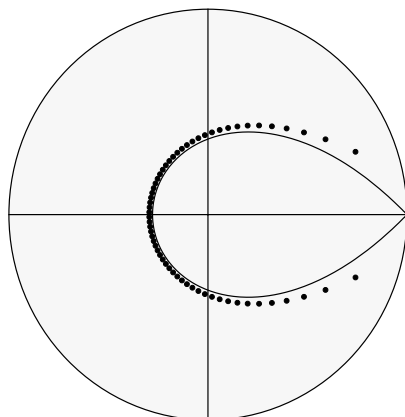


Figura 2: La curva de Szegő y los ceros de Q_{60}

y las curvas de nivel del módulo de h tienen la expresión

$$e^{1-x} \sqrt{x^2 + y^2} = c, \quad c \geq 0.$$

En la Figura 3 aparecen dibujadas mediante una escala de grises diferentes curvas de nivel de $|h|$. El tono más oscuro representa tanto valores muy grandes como muy pequeños, mientras que el blanco representa valores cercanos a 1. La rama que se autointersecta corresponde a la curva de nivel 1, que contiene a S . Esta curva divide el plano en tres regiones como indica la Figura 3.

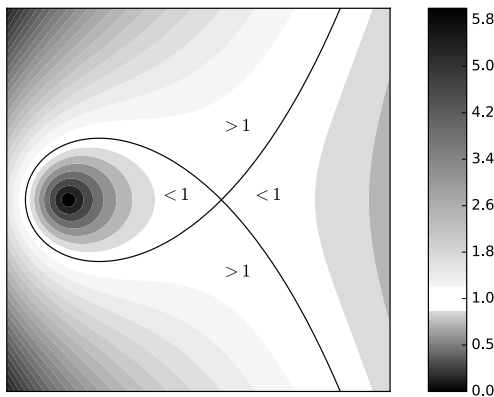


Figura 3: Módulo de h

Mucho más relevante para lo que nos concierne es el comportamiento del argumento de la función h . No es sencillo tratar de representar el argumento de una función analítica en blanco y negro. Necesariamente las gráficas que vamos a mostrar presentan limitaciones, aunque creemos que bastan para transmitir las ideas principales. Nos hemos inspirado en las bellas gráficas en color de E. Wegert [23, 24], que recomendamos a cualquier lector que sienta curiosidad por el tema.

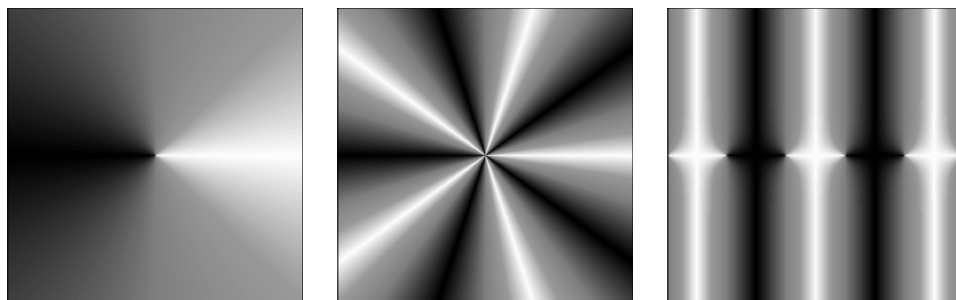


Figura 4: Argumento de $f_1(z) = z$, $f_2(z) = z^5$, $f_3(z) = \sin z$

La primera advertencia que hay que hacer es que, obviamente, esta representación no tiene nada que ver con la empleada en la Figura 3, si bien en ambos casos

se usa una escala de grises. Quizás la manera más sencilla de explicar el método sea la de mostrar unos ejemplos. En la Figura 4 aparece representado, de izquierda a derecha, el argumento de las funciones $f_1(z) = z$, $f_2(z) = z^5$ y $f_3(z) = \operatorname{sen} z$. Cada argumento (módulo 2π) es representado por un tono de gris y para conseguir una variación continua es necesario repetir el tono: de modo que desde 0 a π el tono varía de blanco a negro y desde π a 2π de negro a blanco. ¿Cómo saber entonces, para una función determinada, si el argumento ha dado una vuelta completa al desplazarnos por un camino o más bien se ha dado la vuelta en un punto determinado? Si tomamos por ejemplo el semieje positivo como referencia, es decir, partimos de un punto situado en una franja de color blanco, entonces el argumento dará una vuelta completa si regresa al color blanco *después* de cortar transversalmente un número *impar* de franjas de color negro. Si regresa a una franja de color blanco después de cortar transversalmente un número *par* (o cero) de franjas de color negro quiere decir que el argumento no ha variado pero se mueve a partir de ese momento en sentido *opuesto*. Recalcamos que para que esta regla sea consistente el camino debe estar situado en posición general con respecto a las franjas de color blanco y negro, que son las que separan las zonas donde pudiera haber ambigüedad. Es decir, el paso del camino por las franjas de color blanco y negro ha de ser transversal y completo. Un camino arbitrario siempre se puede reducir a uno en posición general mediante una pequeña perturbación. La segunda advertencia necesaria es que esta representación no distingue el sentido absoluto de giro del argumento, por lo que la representación de las funciones $f(z) = z$ y $f(z) = 1/z$ es idéntica. Esto no será un problema porque trataremos en todos los casos únicamente con funciones analíticas en dominios simplemente conexos.

Volvamos ahora a nuestra función h . Se deduce de (5) que las curvas de nivel del argumento de h tienen la expresión

$$\theta - r \operatorname{sen} \theta = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

La Figura 5 muestra la variación del argumento de h . Para que sirva de referencia hemos incluido la curva $|h(z)| = 1$, que aparece dibujada con un trazo continuo de color negro. Especial relevancia tiene la curva de nivel correspondiente a $c = 0$, que en la Figura 5 aparece de color blanco. Está formada por la semirrecta $\theta = 0$, es decir, el semieje $[0, +\infty)$, y la curva

$$\Gamma = \left\{ z = re^{i\theta} : r = \frac{\theta}{\operatorname{sen} \theta}, \theta \in (-\pi, \pi) \right\}.$$

Esta curva Γ divide el plano complejo en dos regiones sobre las cuales el comportamiento de la función h es bastante diferente. Denotaremos por Ω al dominio limitado por Γ que contiene a la curva de Szegő S . Es fácil ver que $\mathbb{D} \setminus \{1\} \subset \Omega$ y que la función h transforma Ω de manera inyectiva en el dominio $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$, de manera que en este último dominio está definida la función analítica h^{-1} , que constituye por tanto una transformación conforme de $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$ en Ω . La región $\mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$ se descompone en una cantidad numerable de franjas cuasi-horizontales que, mediante h y a la manera de como lo hace la función exponencial, se aplican cada una de ellas

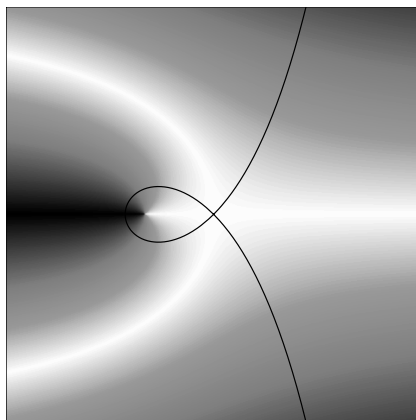


Figura 5: Argumento de h

de modo conforme sobre $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sin embargo, esto último no se utilizará en lo que sigue.

Como los ceros de Q_n se encuentran en $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$, es suficiente estudiar el comportamiento asintótico de las funciones H_n en Ω .

TEOREMA 1.1. *Se cumple la relación*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{H_n(z)}{[h(z)]^n} = \frac{z}{1-z}, \tag{6}$$

uniformemente en subconjuntos compactos de Ω .

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar observemos que, dado que las funciones $[h(z)]^n$ son analíticas en todo el plano complejo, la integral que define $H_n(z)$ no depende del camino que se elija para ir desde 0 hasta z (y ésta fue la razón para no haber especificado dicho camino antes). En particular, podemos elegir como camino de integración el que viene dado por las curvas de nivel del argumento de h , tal como se indica en la parte izquierda de la Figura 6. Denotamos dicha curva mediante γ_z .

Por otro lado, las funciones H_n/h^n son analíticas al menos en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, mientras que en $z = 0$ la función h^n tiene un cero de orden n . Pero H_n es la primitiva de h^n que en $z = 0$ toma el valor 0, por lo que tiene en $z = 0$ un cero de orden $n + 1$. Por tanto las funciones H_n/h^n son analíticas en todo el plano complejo y el límite (6) se cumple trivialmente en $z = 0$. Para probar la convergencia en $\Omega \setminus \{0\}$ efectuamos en la integral (4) el cambio de variable $w = h(u)$, obteniendo

$$H_n(z) = \int_0^{h(z)} w^{n-1} \frac{u}{1-u} dw = \int_0^{h(z)} w^{n-1} G(w) dw,$$

donde G denota la función

$$G(w) = \frac{h^{-1}(w)}{1-h^{-1}(w)}, \quad w \in \mathbb{C} \setminus [1, +\infty).$$

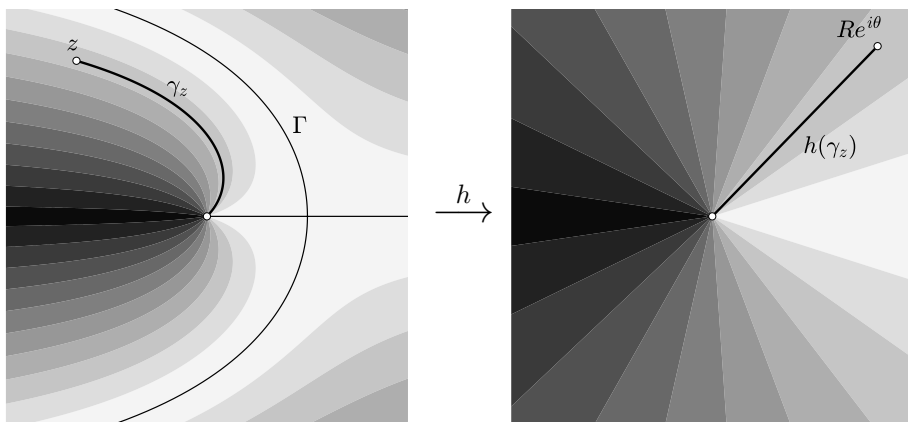


Figura 6: Demostración del Teorema 1.1

Obsérvese que G es analítica en $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$, ya que h^{-1} nunca toma el valor 1 en dicho dominio. Teniendo en cuenta que, fijado z , w recorre parte de una semirrecta vectorial, podemos efectuar el cambio de variable adicional $w = re^{i\theta}$, donde θ representa el argumento constante de w , véase la parte derecha de la Figura 6. Por tanto, si se escribe $h(z) = Re^{i\theta}$, tenemos

$$H_n(z) = \int_0^R \frac{w^n}{r} G(re^{i\theta}) dr = e^{in\theta} \int_0^R r^{n-1} G(re^{i\theta}) dr,$$

o, equivalentemente,

$$n \frac{H_n(z)}{[h(z)]^n} = \frac{n}{R^n} \int_0^R r^{n-1} G(re^{i\theta}) dr. \quad (7)$$

Llegados a este punto puede parecer complicado resolver la integral resultante y, en efecto, así lo es, ya que no tenemos suficiente información de la función G . Pero hay que recordar que únicamente necesitamos *estimar* la integral. Para ello recurrimos al sencillo lema siguiente.

LEMA 1.2. *Si la función real f es derivable con continuidad en $[0, +\infty)$, entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{R^n} \int_0^R r^{n-1} f(r) dr = f(R),$$

uniformemente en compactos de $R > 0$.

DEMOSTRACIÓN. Aplicando integración por partes, se tiene

$$\int_0^R r^{n-1} f(r) dr = \frac{R^n f(R)}{n} - \frac{1}{n} \int_0^R r^n f'(r) dr.$$

Por tanto,

$$\left| \frac{n}{R^n} \int_0^R r^{n-1} f(r) dr - f(R) \right| \leq M \frac{R}{n+1}, \tag{8}$$

donde M es una cota superior de $|f'(r)|$ en el intervalo $[0, R_1]$, $R_1 > R$. □

Observemos que el lema anterior se puede generalizar en la siguiente dirección. Supongamos que la función f depende de dos variables, digamos r y θ , y es una función cuyas derivadas parciales primeras son continuas; entonces, mediante una demostración análoga se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{R^n} \int_0^R r^{n-1} f(r, \theta) dr = f(R, \theta),$$

uniformemente en compactos de $R > 0$ y θ . Esto es así porque, en esta nueva demostración, en el lado derecho de (8) no aparece θ , salvo de manera indirecta en la cota M , que ahora es una cota superior de la función

$$\left| \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) \right|$$

en un rectángulo $[0, R_1] \times [\theta_1, \theta_2]$.

Si escribimos ahora $G(re^{i\theta}) = a(r, \theta) + ib(r, \theta)$, entonces las funciones a y b son de clase infinito y a ellas se les puede aplicar el razonamiento anterior por separado para obtener, de (7),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{H_n(z)}{[h(z)]^n} = G(Re^{i\theta}),$$

que es el límite buscado, pues $G(Re^{i\theta}) = G(h(z)) = z/(1-z)$. Además el límite es uniforme en compactos de $R > 0$ y θ , es decir, en compactos de $\Omega \setminus \{0\}$. De aquí se deduce, por el principio del máximo, que el límite es uniforme en compactos de Ω , y esto concluye la demostración del teorema. □

Ahora es muy fácil probar que los puntos de acumulación de los ceros reescalados de $P_n(z)$ tienen que estar en la curva de Szegő S . Denotamos por Z al conjunto de todos los ceros de los polinomios $Q_n(z) = P_n(nz)$ contados tantas veces como aparecieran para distintos n , si eso ocurriera. Z' es el conjunto derivado de Z , es decir, el conjunto de puntos de acumulación de Z .

COROLARIO 1.3. $Z' \subset S$.

DEMOSTRACIÓN. Como $Z \subset \overline{\mathbb{D}}$, se cumple $Z' \subset \overline{\mathbb{D}}$. Elijamos un $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus S$ y veamos que no puede ser punto de acumulación de Z . Es claro que $z \in \Omega$. Existen únicamente dos posibilidades: que $|h(z)| < 1$ ó que $|h(z)| > 1$. En el primer caso, por (2) y (6), existe un disco centrado en z tal que el lado derecho de (3) es, en módulo, menor, por ejemplo, que $1/2$ para todo n natural a partir de un cierto $N_1 \in \mathbb{N}$, de modo que en ese disco no hay ceros de Q_n para todo $n \geq N_1$. Por consiguiente, en dicho entorno de z sólo puede haber un número finito de elementos de Z y $z \notin Z'$. En el

segundo caso se razona análogamente: ahora en un entorno de z el lado derecho de (3) es, en módulo, mayor que 2 para todo n natural a partir de un cierto $N_2 \in \mathbb{N}$, y en dicho entorno no hay ceros de Q_n para todo $n \geq N_2$. Por tanto, también se tiene $z \notin Z'$. \square

Según lo que se ha probado hasta ahora, podría ocurrir que alguna parte de la curva S no contuviera puntos de acumulación de los ceros de los polinomios Q_n , es decir, que $S \not\subset Z'$. Szegő probó que esto no es posible y fue mucho más allá al ser capaz de hallar la distribución límite de los ceros.

Básicamente, Szegő demostró que los ceros se acercan a la curva S y se distribuyen uniformemente respecto a la variación del argumento de la función h sobre S . Es decir, que si, por ejemplo, nos fijamos nuevamente en la parte izquierda de la Figura 6, el número de ceros será igual asintóticamente en cada una de las franjas curvilíneas en que queda dividida la región Ω , pues dichas franjas se corresponden, mediante la función h , con sectores que tienen todos ellos el mismo ángulo, tal como aparece en la parte derecha de la misma figura.

Ya se vio al comienzo de esta sección que los ceros de Q_n se corresponden con las raíces de la ecuación (3). Por tanto, si llamamos

$$h_n(z) = \frac{n^n}{e^{nn!}} n H_n(z), \quad (9)$$

entonces los ceros de Q_n son precisamente los puntos donde la función h_n toma el valor 1.

A continuación, para enunciar el segundo teorema de Szegő necesitamos definir, por medio de la función h , entornos apropiados de arcos de la curva S . Para ello, dados los números

$$0 < r < 1 < R \quad \text{y} \quad 0 < \theta_1 < \theta_2 < 2\pi, \quad (10)$$

consideramos el cuadrilátero curvilíneo limitado por dos segmentos y dos arcos de circunferencia cuyos vértices en el sentido positivo de giro son

$$re^{i\theta_1}, Re^{i\theta_1}, Re^{i\theta_2}, re^{i\theta_2},$$

tal como se indica en la parte derecha de la Figura 7. La imagen en Ω de este cuadrilátero mediante la aplicación h^{-1} aparece en la parte izquierda de la Figura 7 y la denotamos por

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}(r, R, \theta_1, \theta_2). \quad (11)$$

TEOREMA 1.4. Sean r, R, θ_1, θ_2 y \mathcal{J} definidos como en (10) y (11). Entonces, el número de puntos en los cuales la función h_n toma el valor 1 en el interior de \mathcal{J} es igual a

$$n \frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} + O(1),$$

donde la constante correspondiente al término de error es independiente de n y sólo depende de r, R, θ_1 y θ_2 .

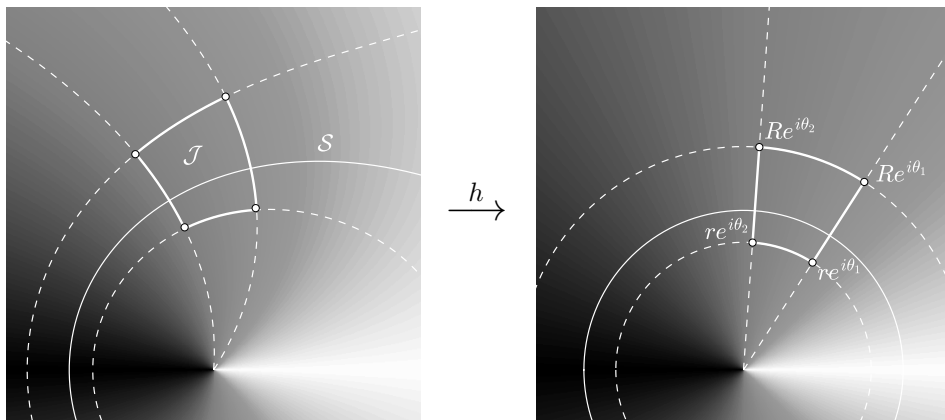


Figura 7: Cuadrilátero curvilíneo y su preimagen

DEMOSTRACIÓN. La demostración puede dividirse en tres pasos principales y tiene una relativa complejidad técnica. Por tanto, en este caso nos contentaremos con explicar las ideas que aparecen en la demostración y omitiremos los cálculos más engorrosos.

En primer lugar se aplica el Teorema 1.1 junto con la fórmula de Stirling (2) para llegar a la expresión

$$h_n(z) = \frac{z}{1-z} \frac{[h(z)]^n}{\sqrt{2\pi n}} (1 + \varepsilon(z)),$$

donde la función $\varepsilon(z)$ tiende a 0 uniformemente en compactos de Ω . Esto se comprueba fácilmente.

El segundo paso consiste en sustituir las funciones h_n por las más sencillas

$$\hat{h}_n(z) = A \frac{[h(z)]^n}{\sqrt{2\pi n}},$$

donde A es una constante compleja no nula. Este cambio se realiza en dos etapas: sin pérdida de generalidad puede suponerse que el entorno \mathcal{J} es arbitrariamente pequeño, de modo que ahí la función $z/(1-z)$ varíe poco y podamos escribir

$$\frac{z}{1-z} = A (1 + \delta(z)) \quad \text{con} \quad |\delta(z)| < \frac{1}{2}, \quad z \in \mathcal{J}.$$

De este modo obtenemos

$$h_n(z) = \hat{h}_n(z) (1 + \varepsilon(z)) (1 + \delta(z)), \quad z \in \mathcal{J}. \tag{12}$$

Esta igualdad muestra que ambas funciones, h_n y \hat{h}_n , son relativamente «parecidas» en \mathcal{J} , lo cual permite probar con algo de trabajo que se satisfacen las hipótesis del teorema de Rouché. Como consecuencia, las dos funciones h_n y \hat{h}_n toman el valor 1 en el interior de \mathcal{J} el mismo número de veces. Por último queda contar el número

de veces que las funciones \hat{h}_n toman el valor 1 en el interior de \mathcal{J} . Para ello Szegő se sirve del principio del argumento. Dada la importancia de estos dos teoremas para la demostración, vamos a describirlos brevemente.

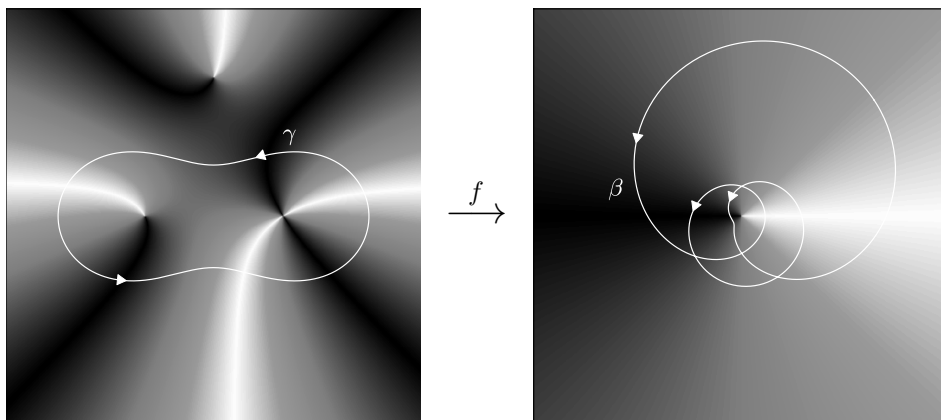


Figura 8: Principio del argumento

Sea f una función analítica en un abierto $A \subset \mathbb{C}$ y γ una curva cerrada, simple y contenida tanto ella como su interior en A . Si f no toma el valor a sobre γ , el número de soluciones de la ecuación $f(z) = a$ situados en el interior de γ (contando multiplicidades) coincide con el número de vueltas que da la curva $\beta = f(\gamma)$ alrededor del punto $z = a$. Este notable resultado, conocido como principio del argumento, fue enunciado por Cauchy en 1831.

El número de vueltas, que en muchos casos puede resultar incómodo de calcular de forma analítica, resulta fácilmente computable si se dispone de una representación conjunta del argumento de f y de la propia curva γ ; basta observar el cambio del argumento de $f(z) - a$ cuando z recorre la curva partiendo de cualquier punto y retornando al mismo punto. Ese cambio será un número entero de vueltas completas que coincidirán con las que da la curva $\beta = f(\gamma)$ alrededor del punto $z = a$.

Veamos la forma de calcular la variación del argumento con un ejemplo. Tomemos el polinomio $f(z) = (z - 2i)(z + 1)(z - 1)^2$ y representemos su argumento junto con la curva γ ; obtenemos entonces la parte izquierda de la Figura 8. Busquemos ahora el número de ceros del polinomio f en el interior de la curva. Si recorremos γ partiendo de un punto situado en una franja de color blanco, cada vez que se llegue a otra franja blanca después de cruzar transversalmente un número impar de franjas negras el argumento se habrá incrementado en 2π , es decir, habremos dado una vuelta completa. Si llegamos a una nueva franja blanca sin pasar por un número impar de franjas negras, entonces no se ha incrementado el argumento y continuaremos a partir de esta nueva franja el conteo de vueltas *pero* con el signo cambiado, ya que el argumento se estará moviendo a partir de ese momento en sentido opuesto. Como en nuestra representación en blanco y negro no podemos conocer el sentido absoluto de giro del argumento, es posible que obtengamos un

número negativo de vueltas, pero el signo es irrelevante para nuestro cálculo. En las representaciones en las que se pueda distinguir si el argumento crece o decrece, como la representación en color de Wegert, el número de vueltas siempre es un número positivo si se recorre la curva en sentido positivo (dejando el interior de la curva a la izquierda), véase [23, Section 3.4].

En la parte izquierda de la Figura 8 se observa que al recorrer la curva damos tres vueltas y, por lo tanto, γ incluye en su interior tres ceros del polinomio f (uno simple y otro doble). Si representamos ahora en el plano complejo la curva $\beta = f(\gamma)$ se obtiene la parte derecha de la Figura 8, donde claramente se aprecia que β gira tres veces alrededor del punto $z = 0$.

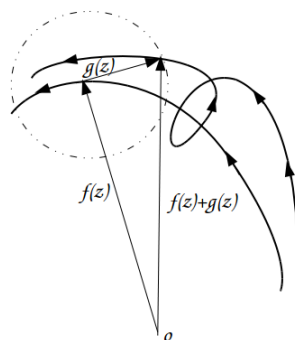


Figura 9: Teorema de Rouché

En cuanto al teorema de Rouché, afirma lo siguiente: sea, además de f , g otra función analítica en el abierto A . Si $|g(z)| < |f(z)|$ para todo $z \in \gamma$, entonces f y $f + g$ tienen el mismo número de ceros en el interior de γ contando multiplicidades. Nos podemos convencer de la veracidad del resultado

con el siguiente argumento: si recorremos γ , para cada $z \in \gamma$, el punto $f(z) + g(z)$ dista de $f(z)$ menos que la distancia de $f(z)$ al origen, véase la Figura 9. Por tanto, el número de veces que giran las curvas $f(\gamma)$ y $(f + g)(\gamma)$ alrededor del origen sería el mismo, y, por el principio del argumento, f y $f + g$ tienen el mismo número de ceros en el interior de γ . Como explica T. Needham muy gráficamente en [10], si una persona pasea un perro atado con una cuerda extensible mientras da vueltas alrededor de un árbol, entonces el perro dará las mismas vueltas al árbol que su dueño siempre que la longitud de la cuerda sea lo suficientemente corta para que no le permita llegar al árbol por sí mismo.

El principio del argumento y el teorema de Rouché no son en realidad resultados característicos de las funciones de variable compleja, sino que poseen un marcado carácter topológico y pueden extenderse a funciones continuas, lo cual es esperable dado que el mismo concepto de dar vueltas alrededor de un punto es ya topológico. Véase [10, Chapter 7] para más detalles al respecto.

Volviendo a la demostración del Teorema 1.4 y como se ha mencionado anteriormente, Szegő prueba mediante el teorema de Rouché y la igualdad (12) que las dos funciones h_n y \hat{h}_n toman el valor 1 en el interior de \mathcal{J} el mismo número de veces. Por razones técnicas modifica para ello ligeramente los entornos \mathcal{J} . Prescindiremos aquí de estos detalles y describiremos en esencia sus argumentos en \mathcal{J} relativos al principio del argumento. Szegő aplica dicho principio para estimar el número de soluciones de $\hat{h}_n(z) = 1$ y, consecuentemente, estudia la variación del argumento de la función $\hat{h}_n - 1$ cuando se recorre la frontera de \mathcal{J} en sentido positivo.

Denotamos las cuatro esquinas de \mathcal{J} por z_i , $i = 1, 2, 3, 4$, con $h(z_1) = re^{i\theta_2}$ y el resto ordenadas según el sentido positivo de recorrido, véase la Figura 10. En el arco

que una z_1 con z_2 , los valores de $|\hat{h}_n|$ llegan a ser todo lo pequeños que se quiera cuando n es muy grande, ya que son directamente proporcionales a r^n/\sqrt{n} con $r < 1$; en consecuencia, los argumentos de $\hat{h}_n - 1$ en ese arco se acercan todos a π y no se produce variación. En los arcos que unen z_2 con z_3 y z_4 con z_1 la variación del argumento de $\hat{h}_n - 1$ permanece acotada para n grande. Esto se ve claramente si se piensa que la variación del argumento de $\hat{h}_n - 1$ sobre la frontera de \mathcal{J} es equivalente a la variación del argumento de la función

$$\frac{Aw^n}{\sqrt{2\pi n}} - 1$$

sobre la frontera de $h(\mathcal{J})$, véase la Figura 7. En definitiva, la variación del argumento queda esencialmente reducida a la variación sobre el arco que une z_3 con z_4 . Esto puede verse en la Figura 10, donde hemos tomado $n = 70$, $r = 0.9$, $R = 1.3$, $\theta_1 = 0.7$, $\theta_2 = 1.1$ y como A cierto valor de la función $z/(z-1)$ en un punto z situado en la parte central de \mathcal{J} .

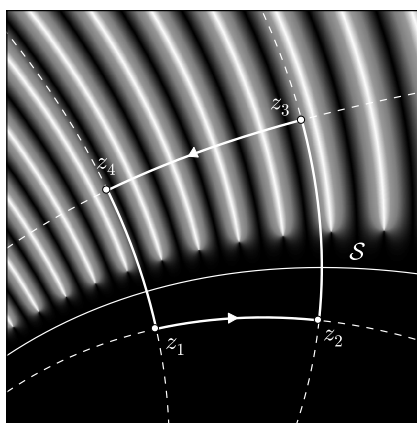


Figura 10: Variación del argumento de $\hat{h}_n - 1$ en la frontera de \mathcal{J}

Si se escribe $A = |A|e^{i\alpha}$, entonces en cualquier punto z del arco que une z_3 con z_4 se tiene

$$\hat{h}_n(z) = \frac{|A|R^n e^{i(n\theta + \alpha)}}{\sqrt{2\pi n}},$$

con $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, y cuando n es muy grande el argumento de $\hat{h}_n(z) - 1$ se acerca a $n\theta + \alpha$ ya que $|\hat{h}_n|$ tiende a infinito por ser $R > 1$. Como consecuencia, el incremento del argumento de $\hat{h}_n - 1$ cuando se recorre en sentido positivo la frontera de \mathcal{J} es $n(\theta_2 - \theta_1) + O(1)$, y de acuerdo con el principio del argumento, el número de soluciones de la ecuación $\hat{h}_n(z) = 1$ en \mathcal{J} para n grande es

$$\frac{n(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} + O(1),$$

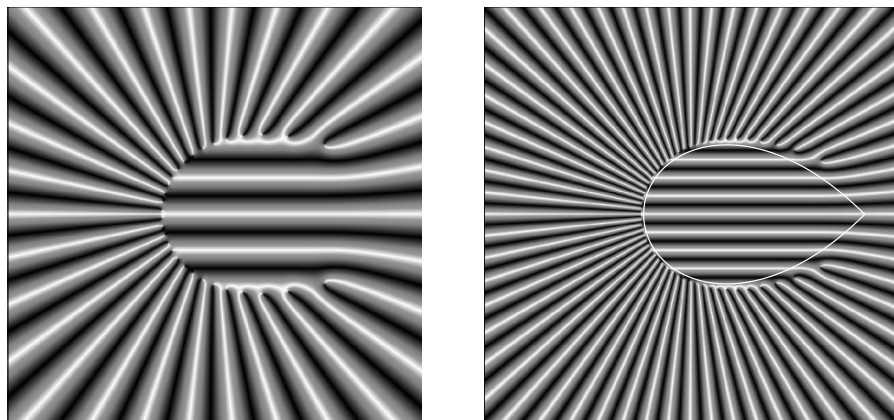


Figura 11: Distribución de los ceros de $P_n(nz)$ para $n = 30$ (izquierda) y $n = 60$ (derecha)

lo cual concluye la demostración del Teorema 1.4. □

Por tanto, como ya se ha comentado, los ceros reescalados de los polinomios de Taylor se distribuyen uniformemente respecto a la variación del argumento de la función h sobre S . La Figura 11 ilustra esta distribución, donde se ha representado a la izquierda el argumento del polinomio $P_{30}(30z)$ y a la derecha el de $P_{60}(60z)$ junto con la curva de Szegő.

Como aplicación del Teorema 1.4 podemos calcular la proporción de ceros que quedan en el semiplano de la izquierda. Basta hallar los dos puntos que constituyen la intersección de la curva de Szegő con el eje vertical, que resultan ser $z = \pm ie^{-1}$, y calcular la variación del argumento que se produce entre $h(ie^{-1})$ y $h(-ie^{-1})$. Unos sencillos cálculos muestran entonces que la proporción de ceros que se sitúan en el semiplano de la izquierda es

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi e},$$

lo cual corrobora una vez más el hecho de que la densidad de ceros es mayor en esta parte de la curva de Szegő.

2. CEROS DE TAYLOR Y CRECIMIENTO DE LA FUNCIÓN

Hemos visto en la Sección 1 que los ceros del polinomio de Taylor de orden n de la función exponencial se van a infinito precisamente a la misma velocidad que n . Se plantea entonces la cuestión de en qué medida esto ocurre en general para otras funciones enteras, y veremos que la respuesta a esta pregunta es realmente sorprendente. Naturalmente, no todos los ceros se irán a infinito en el caso general, pues, debido a que una función entera tiene usualmente un número infinito de ceros por el teorema grande de Picard [15, Section 10.4], muchos de los ceros de los polinomios de Taylor tendrán que acercarse a los ceros de la función. Por otro lado, es bien

conocida la profunda relación que existe entre los ceros de una función entera y su orden de crecimiento, véase el párrafo final de la Sección 3, aunque esta relación no es completamente unívoca porque hay funciones, como la exponencial, que no tienen ceros. Sin embargo, los polinomios de Taylor siempre tienen ceros, y es menos conocido el hecho de que el cero de mayor módulo del desarrollo de Taylor determina si una función es o no entera y caracteriza su orden de crecimiento. Sea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (13)$$

un desarrollo formal (convergente o no) de Taylor infinito (no es un polinomio) y denotemos por $R \in [0, \infty]$ su radio de convergencia. Además, sean

$$T_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

sus correspondientes polinomios de Taylor. Denotamos mediante r_n el mayor valor de los módulos de los ceros de T_n .

El resultado que vamos a presentar, Teorema 2.2, se conoce como teorema de Kakeya [17, 21] y liga el radio de convergencia R del desarrollo de Taylor con el comportamiento de los números r_n . Sin embargo, bien pudiera llamarse igualmente teorema de Porter, ya que, esencialmente, está contenido en la siguiente proposición demostrada por Porter [12] en 1906.

PROPOSICIÓN 2.1. *Dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe una subsucesión de números naturales $\{n_k\}$ tal que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |T_{n_k}(z)| = +\infty, \quad |z| \geq R + \varepsilon, \quad (14)$$

salvo quizás en un número finito de puntos. Además, la divergencia del límite (14) es uniforme en subconjuntos compactos del dominio $\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > 2R\}$.

DEMOSTRACIÓN. A fin de aislar la parte divergente del polinomio de Taylor T_n escribimos

$$T_n(z) = a_n z^n S_n(z), \quad (15)$$

si $a_n \neq 0$, con

$$S_n(z) = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{z^n}.$$

Las funciones S_n son analíticas en $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ y veremos que poseen subsucesiones convergentes que usaremos para demostrar el teorema.

Fijamos un número r de manera que se cumpla $R < r < +\infty$. Entonces

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n| r^n = +\infty. \quad (16)$$

En efecto, como consecuencia de la fórmula de Cauchy-Hadamard, sabemos que existen infinitos números naturales n tales que

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq \frac{1}{s} \iff |a_n| s^n \geq 1,$$

con $R < s < r$. Como $|a_n|r^n = |a_n|s^n (r/s)^n$, tomando límites superiores en esta expresión llegamos a (16).

Definimos ahora una subsucesión de números naturales $\{n_k\}$ de forma que para cada natural k se tenga

$$\text{máx} \{ |a_0|, |a_1|r, \dots, |a_k|r^k \} = |a_{n_k}|r^{n_k}.$$

Dado que f en (13) no es un polinomio, para k suficientemente grande se puede asegurar que $a_{n_k} \neq 0$. Es evidente que para la subsucesión así definida se tiene

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |a_{n_k}|r^{n_k} = +\infty$$

y, además, para cada número natural n con $n \leq n_k$ se verifica $|a_n|r^n \leq |a_{n_k}|r^{n_k}$. Es decir,

$$\frac{|a_n|}{|a_{n_k}|} \leq r^{n_k-n}$$

y, por tanto, si $z \neq 0$, para todo natural k suficientemente grande se cumple

$$\frac{|a_n|}{|a_{n_k}|} \frac{1}{|z|^{n_k-n}} \leq \frac{r^{n_k-n}}{|z|^{n_k-n}}. \tag{17}$$

Consideramos entonces las subsucesiones $\{T_{n_k}\}$ y $\{S_{n_k}\}$. Para los z que cumplen $|z| > r$ se tiene

$$|S_{n_k}(z)| \leq 1 + \frac{r}{|z|} + \frac{r^2}{|z|^2} + \dots + \frac{r^{n_k}}{|z|^{n_k}} < \frac{1}{1 - r/|z|}.$$

De esta forma, todas las funciones de la sucesión $\{S_{n_k}\}$ están uniformemente acotadas en subconjuntos compactos del dominio $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$. Es fácil ver, usando la fórmula integral de Cauchy, que funciones analíticas uniformemente acotadas son equicontinuas. El teorema de Ascoli-Arzelà garantiza entonces que existe una subsucesión $\{S_{m_k}\}$ de la sucesión $\{S_{n_k}\}$ que converge uniformemente a una función analítica S en subconjuntos compactos del dominio $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$. Este razonamiento constituye, en realidad, el teorema de Montel, aparecido un año después del trabajo de Porter y que, a la vista de la presente demostración, ya se encontraba por entonces en la cabeza de este último. La función S no puede ser nula, ya que $S_{n_k}(\infty) = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, con lo que $S(\infty) = 1$. Además, por ser analítica, tendrá un número finito de ceros en cada compacto del dominio. Considerando entonces la subsucesión $\{T_{m_k}\}$, se puede asegurar que, si elegimos un $r' > r$ arbitrariamente cercano a r , se cumple

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |T_{m_k}(z)| = +\infty, \quad |z| > r',$$

salvo quizás en un número finito de puntos. Esto prueba la primera afirmación del teorema, ya que a su vez podemos elegir r arbitrariamente cercano a R .

Por otro lado, fijamos $s > R$ y consideramos en (17) un r tal que $r < s$. Entonces las funciones S_{m_k} no tienen ceros en la región $\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| \geq 2s\}$, ya que si $|z| \geq 2s$ se deduce de (17) la desigualdad

$$|S_{m_k}(z)| \geq 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{m_k}} \right) = \frac{1}{2^{m_k}}.$$

Por lo que la representación (15) implica, si $|z| \geq 2s$, que

$$|T_{m_k}(z)| \geq |a_{m_k}| \frac{|z|^{m_k}}{2^{m_k}} \geq |a_{m_k}| r^{m_k}$$

y, por tanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |T_{m_k}(z)| = +\infty,$$

ahora sí, uniformemente en todo compacto del dominio $\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > 2R\}$. Con ello queda concluida la demostración del resultado. \square

TEOREMA 2.2. *Se cumple la relación*

$$R \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} r_n \leq 2R. \quad (18)$$

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a_0 \neq 0$. Si $R = 0$ la primera desigualdad es trivial. Sea entonces, para esta primera parte, $R > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$T_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{m_n} z^{m_n}, \quad a_{m_n} \neq 0,$$

y observemos que para el cálculo del radio de convergencia R sólo intervienen estos coeficientes a_{m_n} , $n \in \mathbb{N}$, pues el resto son cero. Es decir, se cumple

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m_n]{|a_{m_n}|} = \frac{1}{R}.$$

Entonces, si z_1, \dots, z_{m_n} denotan los ceros de T_n , tenemos

$$\left| \frac{a_{m_n}}{a_0} \right| = \frac{1}{|z_1 \cdots z_{m_n}|} \geq \frac{1}{r_n^{m_n}}.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[m_n]{|a_{m_n}|}}{\sqrt[m_n]{|a_0|}} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n} = \frac{1}{\liminf_{n \rightarrow \infty} r_n}.$$

Para demostrar la otra desigualdad, supongamos que $R < +\infty$ y que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} r_n > 2R.$$

Entonces, existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$r_n > 2R + \varepsilon$$

para todo $n \geq N$. Es decir, para todo $n \geq N$, existe un cero de T_n en la región $\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| \geq 2R + \varepsilon\}$. Pero esto es incompatible con la divergencia uniforme probada en la Proposición 2.1. \square

Una consecuencia inmediata de este resultado es el teorema de Okada [11].

COROLARIO 2.3. *El desarrollo formal infinito (13) representa una función entera si y sólo si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = +\infty.$$

Que no se puede sustituir en (18) el límite inferior por el superior fue demostrado mediante un ejemplo por Jentzsch [8]. De hecho, Jentzsch probó algo más: que existe una serie de potencias con radio de convergencia finito que posee una subsucesión de sumas parciales tales que todos sus ceros se van a infinito. Es decir, que si llamamos τ_n al menor módulo de los ceros de T_n entonces puede ocurrir que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \tau_n = +\infty$, aunque $0 < R < +\infty$.

Veamos ahora cuál es la relación entre los números r_n y el crecimiento de la función representada por la serie de potencias. Para ello, lo primero que necesitamos es precisar el concepto de crecimiento de una función. Si f es una función dada por (13) con $R = +\infty$, consideramos la función

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad r > 0,$$

y diremos que f es de orden finito si

$$M_f(r) < \exp\{r^a\} \tag{19}$$

para algún $a > 0$ y r suficientemente grande. El orden de f es el ínfimo de todos los números a verificando (19) y lo denotaremos por $\rho(f)$. Dado $\varepsilon > 0$, se deduce directamente de la definición que para infinitos $r > 0$ se cumple la desigualdad

$$\exp\{r^{\rho(f)-\varepsilon}\} < M_f(r),$$

mientras que, para todo $r \geq r_0$,

$$M_f(r) < \exp\{r^{\rho(f)+\varepsilon}\}.$$

Entonces se tiene

$$\rho(f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M_f(r)}{\log r}.$$

Un polinomio es una función entera de orden 0, mientras que la función exponencial o la función seno tienen orden 1. Es fácil caracterizar el orden de una función entera por el tamaño de sus coeficientes de Taylor. Aunque la demostración del siguiente resultado puede consultarse en cualquier libro de texto sobre funciones enteras, véanse por ejemplo [1, 9], la incluimos también aquí por comodidad para el lector.

TEOREMA 2.4. *El desarrollo formal (13) representa una función entera de orden finito si y sólo si el límite*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{-\log |a_n|} \tag{20}$$

es finito. En ese caso, (20) es igual a $\rho(f)$.

DEMOSTRACIÓN. De la definición de orden de una función entera se deduce que para todo $\varepsilon > 0$ se cumple

$$M_f(r) < \exp\{r^a\}, \quad r \geq r_\varepsilon,$$

donde $a = \rho(f) + \varepsilon$. Entonces, usando las desigualdades de Cauchy, se obtiene

$$|a_n| \leq \frac{M_f(r)}{r^n} < \exp\{r^a - n \log r\}, \quad r \geq r_\varepsilon.$$

Si ahora derivamos el lado derecho respecto de la variable r vemos que el mínimo se alcanza en $r_n = (n/a)^{1/a}$. Para n suficientemente grande podemos asegurar entonces que $r_n \geq r_\varepsilon$, y llegamos a la desigualdad

$$|a_n| \leq \left(\frac{ea}{n}\right)^{n/a}, \quad n \geq n_\varepsilon.$$

Es decir,

$$a \geq \frac{n \log n}{-\log |a_n|} + \frac{\log(ea)}{1/n \log |a_n|}, \quad n \geq n_\varepsilon.$$

Obsérvese que si $a_n = 0$ la desigualdad se cumple trivialmente. Tomando límites en la expresión anterior, primero cuando n tiende a infinito y luego cuando ε tiende a cero, obtenemos

$$\rho(f) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{-\log |a_n|}, \quad (21)$$

lo cual prueba que el límite (20) es finito y una parte de la segunda afirmación.

Recíprocamente, supongamos que el límite (20) es finito y por tanto existen $b < +\infty$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que

$$\frac{n \log n}{-\log |a_n|} \leq b, \quad n \geq N. \quad (22)$$

Entonces se tiene

$$|a_n| \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{n/b}, \quad n \geq N,$$

y esto prueba que f representa una función entera.

Consideramos la función $g(z) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n z^n$, que difiere de f en un polinomio. Bastará entonces probar que g es de orden finito, ya que entonces f también lo es. Si $|z| = r$ se tiene

$$|g(z)| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| r^n \leq \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{n/b} r^n = \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{r}{n^{1/b}}\right)^n = S.$$

Para estimar la serie S la dividimos en dos partes: $S = S_1 + S_2$, donde S_1 consta de los términos de la serie tales que $n \geq (2r)^b$ y S_2 está formada por los restantes, que son un número finito. Claramente

$$S_1 \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} < 1.$$

En cuanto a S_2 , sustituyendo el valor de r^n por su mayor valor posible, obtenemos

$$S_2 \leq r^{(2r)^b} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{n/b} = C_1 \exp\{2^b r^b \log r\} < \exp\{r^{b'}\},$$

con $b' > b$ también una cantidad finita, lo que prueba que g , y por tanto f , es de orden finito. Además, como podemos elegir b' arbitrariamente cercano a b se tiene que $\rho(f) \leq b$, y de aquí se concluye la última parte de la segunda afirmación del teorema, puesto que si tuviéramos una desigualdad estricta en el límite (21), entonces podríamos elegir $b < \rho(f)$ en (22) y llegaríamos a una contradicción. \square

Tsuji [22] demostró que el cero de mayor módulo del polinomio de Taylor también determina el orden de una función entera mediante un límite casi idéntico a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\log r_n}, \tag{23}$$

pero en el que hay que modificar la definición de los números r_n . Veamos en primer lugar por qué los números r_n tal como son *no* pueden servir para caracterizar el orden de una función. Obsérvese que la presencia de lagunas en el desarrollo de Taylor (cadenas de términos cuyos coeficientes son cero) no cambia necesariamente el orden de una función, pues los correspondientes coeficientes principales, que son cero, no alteran el cálculo del límite (20), mientras que lagunas de gran extensión sí alteran el límite (23), pues, al recorrer los términos que forman la laguna, el denominador permanece constante mientras que el numerador crece. Por tanto, para dotar al límite (23) de coherencia con respecto al crecimiento de la función, es necesario cambiar ligeramente nuestra definición de los números r_n , en el sentido de que el polinomio de Taylor de orden n tenga exactamente n ceros, y la única manera sensata de hacer esto, teniendo en cuenta la representación (o su análoga si $a_0 = 0$)

$$T_n(z) = a_0 \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{z}{z_j}\right),$$

es considerar que los ceros que faltan están en el infinito. Así, para cada número natural n , definimos

$$\rho_n = \begin{cases} r_n, & \text{si } a_n \neq 0; \\ +\infty, & \text{si } a_n = 0. \end{cases}$$

TEOREMA 2.5. *El desarrollo formal (13) representa una función entera de orden finito si y sólo si el límite*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\log \rho_n} \tag{24}$$

es finito. En ese caso, (24) es igual a $\rho(f)$.

DEMOSTRACIÓN. Obviamente podemos suponer que $a_0 = 1$ a lo largo de toda la demostración. Si f es una función entera de orden finito, por el teorema anterior, dado $\varepsilon > 0$, se tiene

$$\frac{n \log n}{-\log |a_n|} \leq a, \quad n \geq n_\varepsilon,$$

con $a = \rho(f) + \varepsilon$. Es decir,

$$\frac{1}{|a_n|} \geq n^{n/a}, \quad n \geq n_\varepsilon.$$

Ahora nos restringimos a aquellos n para los cuales $a_n \neq 0$, ya que son los únicos que intervienen en el cálculo del límite (24). Para esos n se cumple

$$\rho_n^n \geq |z_1 \cdots z_n| = \frac{|a_0|}{|a_n|} = \frac{1}{|a_n|} \geq n^{n/a}, \quad n \geq n_\varepsilon,$$

donde z_1, z_2, \dots, z_n son los ceros de T_n . En consecuencia,

$$\frac{\log n}{\log \rho_n} \leq a, \quad n \geq n_\varepsilon,$$

de donde se deduce

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\log \rho_n} \leq \rho(f). \quad (25)$$

Recíprocamente, supongamos que el límite (24) es finito y que, por tanto, existen $b < +\infty$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que

$$\frac{\log n}{\log \rho_n} \leq b < +\infty, \quad n \geq N \iff \rho_n \geq n^{1/b}, \quad n \geq N. \quad (26)$$

Buscamos ahora relacionar ρ_n con los coeficientes a_n . Nos centramos nuevamente en aquellos n tal que $a_n \neq 0$. Si z es la raíz de módulo máximo de T_n , obviamente se cumple $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + 1 = 0$. Por tanto,

$$|a_n| \rho_n^n \leq |a_{n-1}| \rho_n^{n-1} + \cdots + |a_1| \rho_n + 1. \quad (27)$$

En un principio parece complicado poder extraer de esta recurrencia información sobre el tamaño de los coeficientes a_n , pero es posible hacerlo si se construye una demostración por inducción. Podemos suponer que

$$|a_n| \leq M \frac{2^n}{(n!)^{1/b}}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (28)$$

eligiendo $M > 1$ suficientemente grande. Demostraremos entonces por inducción que la desigualdad (28) se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando (26), (27) y la hipótesis de inducción, obtenemos

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \frac{|a_{n-1}|}{\rho_n} + \cdots + \frac{|a_1|}{\rho_n^{n-1}} + \frac{1}{\rho_n^n} \leq \frac{|a_{n-1}|}{n^{1/b}} + \cdots + \frac{|a_1|}{n^{(n-1)/b}} + \frac{1}{n^{n/b}} \\ &\leq M \left(\frac{2^{n-1}}{(n-1)!^{1/b} n^{1/b}} + \frac{2^{n-2}}{(n-2)!^{1/b} n^{2/b}} + \cdots + \frac{1}{n^{n/b}} \right) \\ &\leq \frac{M}{(n!)^{1/b}} (2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 1) = M \frac{2^n}{(n!)^{1/b}}, \end{aligned}$$

con lo que (28) es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$, y el desarrollo formal de f representa una función entera. Además,

$$\rho(f) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{-\log |a_n|} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{1/b \log n! - \log M - n \log 2} = b \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{\log n!} = b,$$

debido a la fórmula de Stirling. Con lo que se prueba que $\rho(f)$ es un número finito. Por otro lado, también es claro que la desigualdad (25) no puede ser estricta, puesto que en ese caso podríamos elegir, en los anteriores razonamientos, $b < \rho(f)$, y llegaríamos a la contradicción $\rho(f) < \rho(f)$. Con esto se concluye la demostración del teorema. \square

Es obvio que para conseguir que los ceros del polinomio de Taylor permanezcan acotados hay que dividirlos por una cantidad del tamaño de ρ_n (si $a_n \neq 0$). El Teorema 2.5 nos dice que $\log \rho_n$ es aproximadamente $\log n/\rho(f)$. Por tanto, el reescalamiento adecuado en general consiste en multiplicar la variable z por una cantidad del tamaño de $n^{1/\rho(f)}$. El reescalamiento resulta ser entonces inversamente proporcional (en escala logarítmica) al crecimiento de la función. Así, por ejemplo, si $\rho(f) = 2$ habrá que considerar los ceros del correspondiente polinomio de Taylor $T_n(\sqrt{n}z)$.

A la vista de los Teoremas 2.4 y 2.5, una alternativa válida de reescalamiento que sólo depende de los coeficientes de Taylor sería considerar, para aquellos n para los cuales $a_n \neq 0$, los ceros de $T_n(\lambda_n z)$, donde $\lambda_n = |a_n|^{-1/n}$. Veremos algo más sobre esto en la Sección 3.

Una observación detallada de la Figura 2 revela que los ceros reescalados del polinomio de Taylor de la función exponencial, esto es, los ceros de $P_n(nz)$, parecen situarse en el exterior de la curva de Szegő. No es difícil probarlo en general: representa el primer y único salto temporal que damos, pues fue demostrado en el año 1966 por Buckholtz; véase [3], donde también se demuestra el Teorema 2.7.

LEMA 2.6. *Los ceros de $P_n(nz)$ están situados en la región $\{z \in \mathbb{C} : |e^{1-z}z| > 1\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $|e^{1-z}z| \leq 1$ y $|z| \leq 1$, pues ya sabemos que los ceros de $P_n(nz)$ se encuentran en el disco unidad cerrado. Probaremos entonces que $P_n(nz) \neq 0$ mostrando que $|1 - e^{-nz}P_n(nz)| < 1$. En efecto,

$$\begin{aligned} |1 - e^{-nz}P_n(nz)| &= |e^{-nz}(e^{nz} - P_n(nz))| = \left| e^{-nz} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(nz)^k}{k!} \right| \\ &= \left| (e^{1-z}z)^n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n^k e^{-n} z^{k-n}}{k!} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n^k e^{-n}}{k!} = 1 - e^{-n}P_n(n) < 1. \quad \square \end{aligned}$$

Una consecuencia sorprendente de este hecho es que la función exponencial es, esencialmente, la única función para la que *todos* los ceros de sus polinomios de Taylor se van a infinito al menos a velocidad $O(n)$. Recordemos que τ_n denota el menor módulo de los ceros de T_n .

TEOREMA 2.7. *Sea f un desarrollo formal como en (13). Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *Existe $c > 0$ tal que $\tau_n \geq cn$ para todo $n \geq N$.*

(ii) *Se tiene $a_0 a_1 \neq 0$ y $f(z) = a_0 \exp \left\{ \frac{a_1 z}{a_0} \right\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Que la parte (ii) del enunciado implica la (i) es consecuencia directa del Lema 2.6, ya que, haciendo un cambio de variable, basta probarlo para la función exponencial, y para ella, dado que el interior de la curva de Szegő contiene un disco centrado en el origen de radio $c > 0$, se cumple (i) para todo $n \in \mathbb{N}$.

Usaremos ahora el Teorema 2.4 para demostrar la implicación recíproca. Para ello consideramos únicamente aquellos $n \geq N$ para los cuales $a_n \neq 0$. Que $a_0 \neq 0$ se deduce trivialmente de (i). Entonces, si z_1, z_2, \dots, z_n denotan los ceros de T_n , tenemos

$$(cn)^n \leq \tau_n^n \leq |z_1 \cdots z_n| = \frac{|a_0|}{|a_n|}.$$

Por tanto

$$\frac{n \log n}{-\log |a_n|} \leq \frac{n \log n}{n \log(n) + n \log c - \log |a_0|},$$

por lo que, tomando límites cuando n tiende a infinito y aplicando el Teorema 2.4, se prueba que f representa una función entera de orden menor o igual que 1. Además, por el teorema de Hurwitz, f no tiene ceros en el plano complejo. Por tanto, existe una determinación continua del logaritmo de la función f que definirá una función entera. Con dicha determinación está definida $g(z) = \log f(z)$ que verifica

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M_g(r)}{\log r} = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M_f(r)}{\log r} = \rho(f) \leq 1.$$

En consecuencia, existe $r_0 > 0$ tal que, para todo $r \geq r_0$, se cumple

$$M_g(r) \leq r^{3/2}.$$

Pero, por las desigualdades de Cauchy aplicadas a la función

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

se obtiene

$$|b_n| \leq \frac{M_g(r)}{r^n} \leq \frac{r^{3/2}}{r^n}, \quad r \geq r_0,$$

lo cual prueba, haciendo tender r a infinito, que $b_n = 0$ para todo $n \geq 2$. Es decir, g es un polinomio a lo sumo de grado 1, y entonces f es necesariamente de la forma que aparece en la parte (ii) del enunciado con $a_1 \neq 0$, ya que por hipótesis f no es un polinomio. \square

3. UN POCO DE PERSPECTIVA

A la vista de la curva de Szegő, la primera cuestión que se plantea es la de averiguar si el mismo fenómeno ocurre en el caso de otras funciones enteras, lo que ya fue abordado por el propio Szegő en [20] para las funciones $\text{sen } z$ y $\text{cos } z$, obteniendo resultados parecidos.

Dieudonné [7] redescubrió la curva de Szegő algunos años más tarde de forma independiente, y también estudió el comportamiento de las funciones $e^z - 1$ y $\text{senh } z$. Como estas funciones tienen un número infinito de ceros, aparece ahora una nueva categoría de ceros de polinomios de Taylor: aquellos que tienden a los ceros de la función aproximada. Así, por ejemplo, para la función $e^z - 1$ se tiene la situación que muestra la Figura 12. En el semiplano de la izquierda los ceros se acumulan en la semicircunferencia centrada en el origen de radio $1/e$, mientras que en el semiplano de la derecha los ceros tienden a la curva de Szegő. Por último, los ceros que aproximan los ceros de la función se sitúan en el segmento $[-i/e, i/e]$ del eje imaginario. Dieudonné probó que la proporción de los ceros en cada una de estas categorías respecto del número total es asintóticamente $1/2$, $1/2 - 1/(e\pi)$ y $1/(e\pi)$, respectivamente.

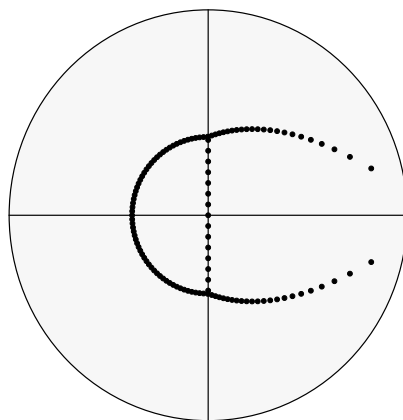


Figura 12: Ceros de $T_n(nz)$ para la función $e^z - 1$ y $n = 120$

Un teorema general probado por Rosenbloom usando teoría del potencial [16, Theorem 7] afirma, básicamente, que si f dada por (13) es una función entera de orden finito positivo, entonces el comportamiento asintótico de f cuando $|z| \rightarrow +\infty$ determina la distribución límite de los ceros de Taylor convenientemente reescalados. Si obviamos algunos detalles de carácter técnico, podemos enunciar el resultado de la siguiente manera simplificada. Elegimos un punto z_0 donde $f(z_0) \neq 0$ y supongamos que para una subsucesión de números naturales $\Lambda \subset \mathbb{N}$ existe

$$g(z) = \lim_{n \in \Lambda} \sqrt[n]{f(\lambda_n z)}, \quad \lambda_n = |a_n|^{-1/n},$$

uniformemente en un entorno de z_0 , donde se ha escogido una determinación continua de la raíz. Si g es una función analítica univaluada y

$$h(z) = \frac{g(z)}{z}$$

es inyectiva, entonces el teorema afirma que la función h desempeña en el caso de f el mismo papel que la función homónima en el caso de e^z . Es decir, los puntos de la curva $|h(z)| = 1$ son puntos de acumulación de los ceros de los polinomios

$T_n(\lambda_n z)$, $n \in \Lambda$, y las imágenes de dichos ceros mediante la aplicación h se distribuyen uniformemente sobre la circunferencia unidad. Este resultado permite, por ejemplo, calcular las curvas límite para $e^z - 1$.

La curva de Szegő parece ser una fuente inagotable de fenómenos curiosos. Si se dibujan los ceros de los polinomios de Taylor de e^z sin reescalar, se observa que cubren todo el plano complejo excepto una región de forma parabólica. En [18] se prueba que la región

$$y^2 \leq 4(x + 1), \quad x > -1 \quad (29)$$

no contiene ningún cero de este tipo. La Figura 13 muestra la parábola frontera de la región (29) junto con los ceros de los polinomios de Taylor de e^z de orden $n = 1, 2, \dots, 70$.

También se ha estudiado la velocidad de convergencia de los ceros a la curva de Szegő, véase [5]. Se sabe que el orden exacto de convergencia es $1/\sqrt{n}$. Si se excluye una vecindad del punto conflictivo $z = 1$, entonces la velocidad en el resto mejora hasta orden $\log n/n$.

Todavía nos dejamos algunas propiedades interesantes en el tintero, véase por ejemplo [19]. Pero para terminar nos limitaremos a mencionar algunos trabajos más recientes, como [13], donde se da un tratamiento moderno de la curva de Szegő con aplicaciones a la aproximación de funciones analíticas con pesos; o como [6], llamativo ejemplo de cómo la curva de Szegő puede aparecer de manera inesperada en el estudio de otros objetos matemáticos.

Por lo que respecta al teorema de Kakeya, el ejemplo de la función $f(z) = 1/(1 - z)$ muestra que la cota inferior en (18) es óptima. Sin embargo, la cota superior se puede rebajar y surge la pregunta de cuál será la constante óptima para el lado derecho de (18). Dicha constante ha sido determinada y en principio puede computarse, aunque el procedimiento para ello no parece sencillo, véase [4]. Es conocido que la constante óptima está entre 1.78 y 1.82.

El menor módulo de los ceros del polinomio de Taylor de orden n , número que hemos denotamos por τ_n , también proporciona información sobre la función f en el caso de que f no tenga ceros, véase [2]. En concreto se tiene que si $g = \log f$ es un polinomio de grado p , entonces

$$A n^{1/p} < \tau_n < B n^{1/p}, \quad n \in \mathbb{N},$$

con A y B constantes positivas. Además, en general se cumple

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \log n}{\log \tau_n} = \rho(g),$$

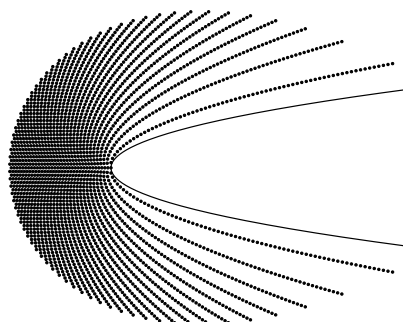


Figura 13: Región parabólica libre de ceros

lo cual puede considerarse un análogo del teorema de Tsuji.

Queremos por último recordar la estrecha relación que existe entre los ceros de una función entera y su crecimiento. Si el orden de una función entera f no es un número entero (y entonces se sabe que posee una infinidad de ceros), se verifican las relaciones

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log n(r)}{\log r} = \rho(f) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\log s_n},$$

donde $n(r)$ es el número de ceros de f en $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ y $\{s_n\}$ son los módulos de los ceros de f ordenados en sentido creciente, véanse [1, 9]. Ambas fórmulas nos dicen que al aumentar el crecimiento de la función aumenta la densidad de sus ceros. Es notable, pero al mismo tiempo natural, que análogo resultado se cumpla, esta vez sin excepciones, para los ceros de los polinomios de Taylor de f .

EPÍLOGO

Las consideraciones hasta aquí realizadas han versado en su mayor parte sobre funciones enteras y sus polinomios de Taylor. ¿Qué ocurrirá si en vez de una función entera tomamos una función cuyo desarrollo de Taylor tenga un radio de convergencia finito? Para terminar, proponemos al lector un pequeño experimento en esta dirección. Escoja una función sencilla como $\log(1+x)$ ó $\sqrt{1+x}$ y dibuje, con ayuda de un ordenador, los ceros de sus primeros polinomios de Taylor. Si así lo hace, estará en condiciones de conjeturar un bello teorema.

REFERENCIAS

- [1] R. P. BOAS, *Entire Functions*, Academic Press, New York, 1954.
- [2] J. D. BUCKHOLTZ, Power series whose sections have zeros of large modulus, *Trans. Amer. Math. Soc.* **117** (1965), 157–166.
- [3] J. D. BUCKHOLTZ, A characterization of the exponential series, *Amer. Math. Monthly* **73** (1966), Part II, 121–123.
- [4] J. D. BUCKHOLTZ, Zeros of partial sums of power series, II, *Michigan Math. J.* **17** (1970), 5–14.
- [5] A. J. CARPENTER, R. S. VARGA Y J. WALDVOGEL, Asymptotics for the zeros of the partial sums of e^z . I, *Rocky Mountain J. Math.* **21** (1991), 99–120.
- [6] C. DÍAZ MENDOZA Y R. ORIVE, The Szegő curve and Laguerre polynomials with large negative parameters, *J. Math. Anal. Appl.* **379** (2011), 305–315.
- [7] J. DIEUDONNÉ, Sur les zéros des polynomes-sections de e^x , *Bull. Soc. Math. France* **70** (1935), 333–351.
- [8] R. JENTZSCH, Fortgesetzte Untersuchungen über die Abschnitte von Potenzreihen, *Acta Math.* **41** (1918), 253–270.
- [9] B. YA. LEVIN, *Lectures on Entire Functions*, Transl. Math. Monogr., Vol. 150, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [10] T. NEEDHAM, *Visual Complex Analysis*, Clarendon Press, Oxford 1998.

- [11] Y. OKADA, Note on power series, *Science Rep. of the Tôhoku Imperial University* **11** (1922), 43–50.
- [12] M. B. PORTER, On the polynomial convergents of a power series, *Ann. of Math.* **8** (1906), 189–192.
- [13] I. E. PRITSKER Y R. S. VARGA, The Szegő curve, zero distribution and weighted approximation, *Trans. Amer. Math. Soc.* **349** (1997), 4085–4105.
- [14] Q. I. RAHMAN Y G. SCHMEISSER, *Analytic Theory of Polynomials*, Clarendon Press, Oxford, 2002.
- [15] R. REMMERT, *Classical Topics in Complex Function Theory*, Springer, New York, 1998.
- [16] P. C. ROSENBLUM, Distribution of zeros of polynomials, *Lectures on functions of a complex variable* (W. Kaplan, editor), 265–285, Univ. of Michigan Press, Ann Arbor, 1955.
- [17] L. A. RUBEL, *Entire and Meromorphic Functions*, Springer, New York, 1996.
- [18] E. B. SAFF Y R. S. VARGA, Zero-free parabolic regions for sequences of polynomials, *SIAM J. Math. Anal.* **7** (1976), 344–357.
- [19] E. B. SAFF Y R. S. VARGA, On the zeros and poles of Padé approximants to e^z . III, *Numer. Math.* **30** (1978), 241–266.
- [20] G. SZEGŐ, Über eine Eigenschaft der Exponentialreihe, *Sitzungsber. Berl. Math. Ges.* **23** (1924), 50–64; también en *Collected Papers*, Vol. 1, 646–660, Birkhäuser, Basel, 1982.
- [21] M. TSUJI, On the distribution of the zero points of sections of a power series, *Jap. J. Math.* **1** (1924), 109–140.
- [22] M. TSUJI, On the distribution of the zero points of sections of a power series, III, *Jap. J. Math.* **3** (1926), 49–52.
- [23] E. WEGERT, *Visual Complex Functions*, Birkhäuser, Basel, 2012.
- [24] E. WEGERT Y G. SEMMLER, Phase plots of complex functions: a journey in illustration, *Notices Amer. Math. Soc.* **58** (2011), 768–780.

BERNARDO DE LA CALLE YSERN, DPTO. DE MATEMÁTICAS DEL ÁREA INDUSTRIAL, ETS DE INGENIEROS INDUSTRIALES, UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
Correo electrónico: bernardo.delacalle@upm.es

FRANCISCO CARBAJO GIBAJA, MADRID
Correo electrónico: francisco.carbajo@gmail.com