Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri Ramírez y José Luis Díaz Barrero

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Madre de Dios 53, 26006, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 31 de octubre de 2018.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco ($\star$) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 337 (conmemorativo del «Pi day 2018»). *Propuesto por Larry Glasser, Clarkson University, Potsdam, Nueva York, EE.UU.*

Probar que

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) e^{\pi\cos x}\cos\bigl(\pi(x-\operatorname{sen}x)\bigr)\frac{dx}{x} = \frac{\pi^{[\pi]}}{[\pi]!},$$

donde $[x]$ denota la parte entera de x.

Problema 338. *Propuesto por Daniel Sitaru, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Sean m_a, m_b, m_c y a, b, c las longitudes de las medianas y los lados, respectivamente, de un triángulo ABC. Si S denota el doble del área de dicho triángulo, probar que

$$\left(\frac{m_a^2}{m_b^2}+\frac{m_b^2}{m_c^2}+\frac{m_c^2}{m_a^2}\right)\left(\frac{m_a^4}{m_b^4}+\frac{m_b^4}{m_c^4}+\frac{m_c^4}{m_a^4}\right)\left(\frac{m_a^8}{m_b^8}+\frac{m_b^8}{m_c^8}+\frac{m_c^8}{m_a^8}\right) \geq S^3\left(\frac{1}{am_b}+\frac{1}{bm_c}+\frac{1}{cm_a^2}\right)^3.$$

PROBLEMA 339. *Propuesto por Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.*

Demostrar que la distancia entre dos puntos interiores cualesquiera de un tetraedro está acotada superiormente por la mayor de las longitudes de sus aristas.

PROBLEMA 340. *Propuesto por Ángel Plaza de la Hoz, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Las Palmas.*

Sean $a_1, \dots, a_n$ números reales positivos y m un número real mayor que uno. Demostrar las desigualdades

$$\frac{1}{n-1} \sum_{\text{cíclica}} \frac{a_2 + \cdots + a_n}{a_1 + m\,(a_2 + \cdots + a_n)} \leq \frac{n}{n + (m-1)(n-1)} \leq \sum_{\text{cíclica}} \frac{a_1}{a_1 + m\,(a_2 + \cdots + a_n)}.$$

PROBLEMA 341. *Propuesto por Ovidiu Furdui, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Evaluar la suma

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)\big(2^n\,(\zeta(n) - 1) - 1\big),$$

donde ζ denota la función zeta de Riemann.

PROBLEMA 342. *Propuesto por Leonard Giugiuc, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Determinar las soluciones reales del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a + b + c + d = 4, \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \dfrac{28}{3}, \\ abcd = \dfrac{1}{9}. \end{cases}$$

PROBLEMA 343. *Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.*

Sean a, b y c tres números reales positivos tales que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Probar que

$$a\sqrt[4]{\frac{b^2+1}{c^2+1}} + b\sqrt[4]{\frac{c^2+1}{a^2+1}} + c\sqrt[4]{\frac{a^2+1}{b^2+1}} \leq \sqrt[4]{3\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right)}.$$

Problema 344. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.*

Xavier y Yolanda juegan tirando una moneda. Si sale cara Xavier se anota un punto, y si sale cruz se lo anota Yolanda. Cuando un jugador aventaja al otro en tres puntos, es el ganador y la partida termina. Y si después de $2n$ tiradas, para algún cierto valor de $n \geq 2$ fijo, aún no hay ganador, entonces la partida termina con un empate. Hállese la probabilidad de empate en caso de que la moneda esté equilibrada y en caso de que la probabilidad de sacar cara sea $c \neq 1/2$ (es decir, cuando la moneda no está equilibrada).

Soluciones

Nota. Por un descuido involuntario, entre las soluciones correctas recibidas a los Problemas 305, 308 y 310 olvidamos citar las enviadas por Albert Stadler. Pedimos disculpas por ello.

Problema 313. *Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.*

Si B y C son dos vértices fijos de un triángulo ABC y la simediana que parte de B está contenida en una recta fija que pasa por B, determinar el lugar geométrico del vértice A. (Las simedianas de un triángulo son las rectas simétricas de las medianas respecto de las bisectrices interiores.)

Solución enviada por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.

Denotamos por r la recta fija que contiene a la simediana de B, y sea ξ el ángulo que forma r con BC, véase la figura 1. De este modo, si A es un punto del lugar geométrico y M es el punto medio de AC, debe cumplirse que $\angle MBA = \xi$.

Sea ahora D el punto simétrico de C respecto de B, de manera que en el triángulo ACD el segmento BM es una de sus paralelas medias, y se tiene que los segmentos DA y BM son paralelos y $\angle DAB = \xi$.

Construimos Γ, la circunferencia circunscrita al triángulo ABD. Puesto que la recta r forma con la cuerda BD de Γ un ángulo ξ igual al inscrito en dicha cuerda, se tiene que r es tangente a Γ. En consecuencia, Γ es fija, determinada de forma única por las condiciones de ser la circunferencia que pasa por los puntos B y D y es tangente a r.

Hemos probado que todo punto A del lugar geométrico pertenece a Γ. Recíprocamente, razonando de nuevo sobre la figura 1 en sentido inverso es sencillo ver que todo punto de Γ (excepto B y D) es válido como punto A del lugar geométrico.

También resuelto por C. Beade, F. J. García, L. Giugiuc, I. Larrosa, J. Mir, J. Nadal, B. Salgueiro, A. Velasco y el proponente.

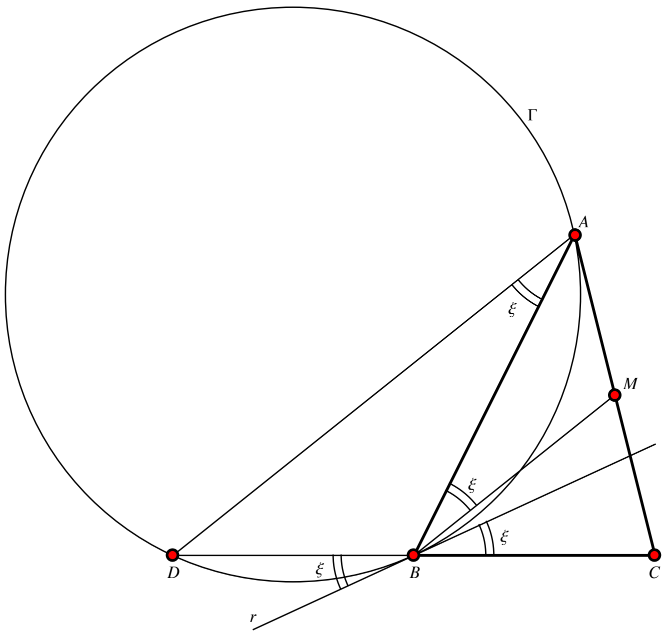

Figura 1: Esquema para la solución del Problema 313.

PROBLEMA 314. *Propuesto por Manuel Benito Muñoz, Logroño, La Rioja.*

Consideramos el conjunto $A = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{4\}$, donde $n \geq 4$ es un número natural. ¿Para qué valores de n podemos descomponer A en dos conjuntos disjuntos B y C tales que el producto de todos los números pertenecientes a B y el producto de todos los números pertenecientes a C sean dos números consecutivos?

Solución enviada por César Beade Franco, I. E. S. Fernando Blanco, Cee, La Coruña.

Si $n \leq 12$, existen soluciones en los casos $n = 4$ ($B = \{3\}$ y $C = \{1, 2\}$), $n = 5$ ($B = \{5\}$ y $C = \{1, 2, 3\}$) y $n = 7$ ($B = \{5, 7\}$ y $C = \{2, 3, 6\}$). Veamos qué ocurre si $n \geq 13$.

Como dos números consecutivos son primos entre sí, en B no puede haber números con divisores comunes con algún elemento de C (en particular solo uno de los conjuntos, digamos C, puede contener números pares).

Supongamos que n es par. Los elementos de uno de los conjuntos, por ejemplo B, solo pueden ser números primos mayores que $\frac{n}{2}$ (en caso contrario $2p$ estaría en C). Y para cada uno de estos números siempre existe otro en C (su siguiente) mayor que él.

Si n es impar, los elementos de B solo podrán ser números primos mayores que $\frac{n-1}{2}$. Ahora sucede lo mismo que en el caso anterior, excepto quizás para n, pero en ese caso se tiene que $n < \frac{n-1}{2}\frac{n-3}{2}$. (Notar que, como $n \geq 13$, $\frac{n-1}{2} \neq 4$ y $\frac{n-3}{2} \neq 4$.)

En ambos casos los productos de los números de uno y otro conjunto no pueden diferenciarse en uno, así que no existen más soluciones.

También resuelto por A. Castaño, M. Á. Díaz, J. Nadal, A. Stadler y el proponente. Se han recibido dos soluciones incompletas.

Problema 315. *Propuesto por Daniel Sitaru, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, probar que

$$\frac{e^b - e^a}{b - a} \geq \frac{e^a}{24}(b-a)^2 + \sqrt{e^{a+b}}.$$

Solución enviada por Kee-Wai Lau, Hong Kong, China.

Tomando la nueva variable positiva $x = b - a$ y dividiendo a ambos lados la desigualdad propuesta por e^{-a}, esta resulta ser equivalente a

$$\frac{e^x - 1}{x} - \frac{x^2}{24} - e^{x/2} \geq 0. \tag{1}$$

Ahora, usando el desarrollo en serie de potencias de la función exponencial,

$$\frac{e^x - 1}{x} - \frac{x^2}{24} - e^{x/2} = \sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{2^n n!}\right)x^n = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{2^n - n - 1}{2^n(n+1)!}x^n,$$

lo que implica (1) por ser $x > 0$ y cumplirse que $2^n - n - 1 > 0$ para cada $n \geq 3$.

También resuelto por L. Giugiuc, J. Mir, J. Nadal, Á. Plaza, J. Rodrigo, B. Salgueiro, A. Stadler, J. Vinuesa y el proponente.

Nota. La mayor parte de las soluciones recibidas utilizan un argumento similar al de la publicada, y Á. Plaza observa que dicho argumento puede utilizarse para probar la desigualdad más general

$$\frac{e^b - e^a}{b - a} > \sum_{k=2}^{n}\frac{e^a(2^k - k - 1)}{2^k(k+1)!}(b-a)^k + \sqrt{e^{a+b}}, \qquad b > a.$$

Problema 316. *Propuesto por Cornel Ioan Vălean, Teremia Mare, Timiş, Rumanía.*

Evaluar la suma

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{k+n}\frac{H_{k+n}^2}{k+n},$$

donde $H_i = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{i}$ denota el i-ésimo número armónico.

Solución enviada por Albert Stadler, Herrliberg, Suiza (modificada por los editores).

Denotando por S el valor de la suma a evaluar, vamos a probar que

$$S = \frac{\log^3 2}{3} + \frac{\log^2 2}{2} - \frac{\pi^2}{12}\log 2 - \frac{\pi^2}{24} + \frac{3}{4}\zeta(3).$$

En primer lugar comprobaremos que la serie es convergente y puede escribirse como una integral triple. De las identidades

$$\frac{1}{k+n} = \int_0^1 t^{k+n-1}\,dt \quad \text{ y } \quad H_{k+n} = \sum_{j=1}^{k+n}\int_0^1 t^{j-1}\,dt = \int_0^1 \frac{1-t^{k+n}}{1-t}\,dt,$$

deducimos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\frac{H_{k+n}^2}{k+n} &= \sum_{n=1}^{N}(-1)^n\int_0^1 \frac{1-u^{k+n}}{1-u}\,du\int_0^1\frac{1-v^{k+n}}{1-v}\,dv\int_0^1 w^{k+n-1}\,dw\\ &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1\big(-F_k(u,v,w)+(-1)^N F_{k+N}(u,v,w)\big)\,du\,dv\,dw\end{aligned}$$

con $F_j(u,v,w) = \frac{w^j}{(1-u)(1-v)}f_j(u,v,w)$ y

$$f_j(u,v,w) = \frac{1}{1+w} - \frac{u^{j+1}}{1+uw} - \frac{v^{j+1}}{1+vw} + \frac{(uv)^{j+1}}{1+uvw}.$$

Mediante manipulaciones algebraicas elementales podemos probar la igualdad

$$\begin{aligned}f_j(u,v,w) &= (1-u)(1-v)h_1(u,v,w) - (1-v)(1-u^{j+2})h_2(u,v,w)\\ &\quad - (1-u)(1-v^{j+1})h_3(u,v,w) + (1-u^{j+1})(1-v^{j+1})h_4(u,v,w)\end{aligned}$$

siendo

$$h_1(u,v,w) = \frac{w^2(1+v+vw+uvw)}{(1+w)(1+uw)(1+vw)(1+uvw)},$$

$h_2(u,v,w) = \frac{w}{(1+uw)(1+uvw)}$, $h_3(u,v,w) = vh_2(v,u,w)$ y $h_4(u,v,w) = \frac{1}{1+uvw}$, que implica

$$\left|\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (-1)^N F_{k+N}(u,v,w)\,du\,dv\,dw\right| \le C\,\frac{(\log(k+N))^2}{k+N}$$

y, por tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{H_{k+n}^2}{k+n} = -\int_0^1\int_0^1\int_0^1 F_k(u,v,w)\,du\,dv\,dw.$$

De manera similar,

$$\sum_{k=1}^{M}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{k+n}\,\frac{H_{k+n}^2}{k+n} = -\int_0^1\int_0^1\int_0^1\sum_{k=1}^{M}(-1)^k F_k(u,v,w)\,du\,dv\,dw$$
$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \big(G_0(u,v,w)+(-1)^{M+1}G_M(u,v,w)\big)\,du\,dv\,dw,$$

siendo $G_j(u,v,w) = \frac{w^{j+1}}{(1-u)(1-v)}g_j(u,v,w)$ y

$$g_j(u,v,w) = \frac{1}{(1+w)^2} - \frac{u^{j+2}}{(1+uw)^2} - \frac{v^{j+2}}{(1+vw)^2} + \frac{(uv)^{j+1}}{(1+uvw)^2}.$$

Como se verifica la identidad $g_j(u,v,w) = -\frac{\partial}{\partial w}f_j(u,v,w)$, tendremos

$$g_j(u,v,w) = (1-u)(1-v)H_1(u,v,w) - (1-v)(1-u^{j+2})H_2(u,v,w)$$
$$-(1-u)(1-v^{j+1})H_3(u,v,w) + (1-u^{j+1})(1-v^{j+1})H_4(u,v,w)$$

con $H_i(u,v,w) = -\frac{\partial}{\partial w}h_i(u,v,w)$, con $i = 1,\ldots,4$. Entonces, en este caso también ocurre

$$\left|\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (-1)^{M+1}G_M(u,v,w)\,du\,dv\,dw\right| \le C\,\frac{(\log M)^2}{M},$$

lo que nos permite deducir la igualdad

$$S = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 G_0(u,v,w)\,du\,dv\,dw.$$

Procedamos ahora con la evaluación de la integral triple. Como

$$\int_0^1 \frac{a^2 w}{(1+aw)^2}\,dw = \frac{1}{1+a} - 1 + \log(1+a),$$

se verifica que

$$S = \int_0^1\int_0^1 \frac{f_{-1}(u,v,1)}{(1-u)(1-v)}\,du\,dv$$
$$+\int_0^1\int_0^1 \log\left(\frac{2(1+uv)}{(1+u)(1+v)}\right)\frac{du\,dv}{(1-u)(1-v)} =: I + J.$$

De la relación

$$f_{-1}(u,v,1) = (1-u)\left(\frac{v}{(1+v)(1+uv)} - \frac{1}{2(1+u)}\right),$$

se sigue que

$$\int_0^1 \frac{f_{-1}(u,v,1)}{1-u}\,du = \frac{\log(1+v)}{1+v} - \frac{\log 2}{2}$$

y, usando el cambio de variable $v = \frac{1-t}{1+t}$, llegamos a

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left((1+t)\log\left(\frac{2}{1+t}\right) - \log 2\right)\frac{dt}{t(1+t)}\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \log\left(\frac{2}{1+t}\right)\frac{dt}{1+t} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\log(1+t)}{t(1+t)}\,dt\\
&= \frac{\log^2 2}{4} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\log(1+t)}{1+t}\,dt - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\log(1+t)}{t}\,dt\\
&= \frac{\log^2 2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\int_0^1 t^{j-1}\,dt\\
&= \frac{\log^2 2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j^2} = \frac{\log^2 2}{2} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{4}\right)\zeta(2) = \frac{\log^2 2}{2} - \frac{\pi^2}{24}.
\end{aligned}
$$

Con las transformaciones $u = \frac{1-x}{1+x}$ y $v = \frac{1-y}{1+y}$, resulta sencillo comprobar que

$$
\begin{aligned}
J &= \int_0^1\int_0^1 \frac{\log(1+xy)}{xy(1+x)(1+y)}\,dx\,dy\\
&= \int_0^1\int_0^1 \frac{\log(1+xy)}{xy}\,dx\,dy - 2\int_0^1\int_0^1 \frac{\log(1+xy)}{x(1+y)}\,dx\,dy\\
&\qquad + \int_0^1\int_0^1 \frac{\log(1+xy)}{(1+x)(1+y)}\,dx\,dy\\
&=: J_1 + J_2 + J_3.
\end{aligned}
$$

El cálculo de J_1 puede hacerse de manera sencilla del siguiente modo:

$$
J_1 = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\int_0^1\int_0^1 (xy)^{j-1}\,dx\,dy = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j^3} = \left(1-\frac{2}{8}\right)\zeta(3) = \frac{3}{4}\zeta(3).
$$

Aplicando integración por partes, con $v = \log(1+y)$ y $u = \int_0^1 \frac{\log(1+xy)}{x}\,dx$, se satisface que

$$
J_2 = \log 2\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}\,dx - \int_0^1 \frac{\log^2(1+y)}{y}\,dy.
$$

La primera de las integrales anteriores ha sido evaluada al calcular I y su valor es $\pi^2/12$. El valor de la segunda integral es $\zeta(3)/4$ y la comprobación de este hecho puede verse en la nota que sigue a la solución del Problema 288 de esta sección, aparecida en el volumen 19, número 3, págs. 603–606. Luego

$$
J_2 = \frac{\pi^2}{12}\log 2 - \frac{\zeta(3)}{4}.
$$

Por último, usando de nuevo integración por partes con $v = \log(1+y)$ y $u = \int_0^1 \frac{\log(1+xy)}{1+x}\,dx$, como

$$
\int_0^1 \frac{x}{(1+x)(1+xy)}\,dx = \frac{\log(1+y)}{y(1-y)} - \frac{\log 2}{1-y},
$$

teniendo en cuenta otra vez la nota al Problema 288, deducimos que

$$J_3 = \log 2 \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x} - \int_0^1 \frac{\log^2(1+y)}{y(1-y)}\,dy + \log 2 \int_0^1 \frac{\log(1+y)}{1-y}\,dy$$
$$= \frac{\log^3 2}{2} - \frac{\zeta(3)}{4} - \int_0^1 \log(1+y)\log\left(\frac{1+y}{2}\right)\frac{dy}{1-y}.$$

El cambio de variable $y = \frac{1-s}{1+s}$, aplicado a la última integral da

$$\int_0^1 \log(1+y)\log\left(\frac{1+y}{2}\right)\frac{dy}{1-y} = \int_0^1 \frac{\log^2(1+s)}{s}\,ds$$
$$- \log 2 \int_0^1 \frac{\log(1+s)}{s}\,ds - \int_0^1 \frac{\log^2(1+s)}{1+s}\,ds + \log 2 \int_0^1 \frac{\log(1+s)}{s}\,ds,$$

que, con las observaciones anteriores, implica

$$J_3 = \frac{\pi^2}{12}\log 2 + \frac{\log^3 2}{3} - \frac{\zeta(3)}{2}.$$

De esta forma, reuniendo los valores de I, J_1, J_2 y J_3 concluimos la evaluación de S.

También resuelto por P. Perfetti, B. Salgueiro y el proponente. Se han recibido dos soluciones incorrectas.

Problema 317. *Propuesto por Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Logroño.*

Para cada $m \in [1, \infty)$ denotaremos por C_m la circunferencia de ecuación

$$(4x - (m+1)\sqrt{m^2-1})^2 + (4y - m(m-1))^2 = m^2(m-1)^2.$$

Dados x e y números reales positivos, probar que $x^2 \geq y$ si y solo si existe m tal que el punto (x, y) pertenece a la circunferencia C_m.

Solución enviada por Cristóbal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.

Vamos a determinar el haz de circunferencias tangentes al eje OX y a la rama de la parábola $y = x^2$ situada en el primer cuadrante, y comprobaremos que coincide con el haz del enunciado. En el proceso veremos el significado geométrico del parámetro m.

Sean $P = (a, a^2)$ un punto variable de la parábola y t la recta tangente en ese punto. La recta t corta al eje OX en un punto M y forma con él un ángulo α como se muestra en la figura 2. Como la derivada de $y = x^2$ es $y' = 2x$, tenemos que $\operatorname{tg}\alpha = 2a$ y, por tanto, $P = \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}, \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{4}\right)$. Además, $M = \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{4}, 0\right)$.

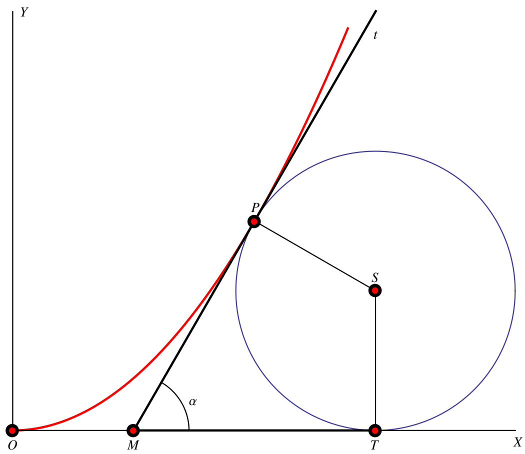

Figura 2: Esquema para la solución del Problema 317.

Si la circunferencia ha de ser tangente a la recta t y al eje OX en T (véase la figura 2), debe ser $MP = MT$. Ahora, como

$$MP = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{16} + \frac{\operatorname{tg}^4\alpha}{16}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{4}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{4\cos\alpha}$$

y

$$OT = OM + MT = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{4} + MP = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{4}\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right),$$

tomando $m = 1/\cos\alpha$, resulta que la abscisa del centro S de la circunferencia es $\frac{(m+1)\sqrt{m^2-1}}{4}$. Para hallar la ordenada del centro hemos de cortar la recta paralela al eje OY pasando por el punto T, de ecuación $x = \frac{(m+1)\sqrt{m^2-1}}{4}$, con la recta normal a la parábola en el punto P, dada por

$$y = -\frac{x}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{4},$$

que, en términos de m, puede reescribirse como

$$y = -\frac{x}{\sqrt{m^2-1}} + \frac{1}{2} + \frac{m^2-1}{4}.$$

De este modo, es claro que la ordenada del centro y el radio de la circunferencia son iguales a $\frac{m(m-1)}{4}$.

Así queda probado que cada circunferencia C_m es tangente a la parábola $y = x^2$ y al semieje OX con $x \geq 0$. Claramente todos los puntos de cada una de las circunferencias C_m quedan bajo el arco de la parábola correspondiente a las abscisas

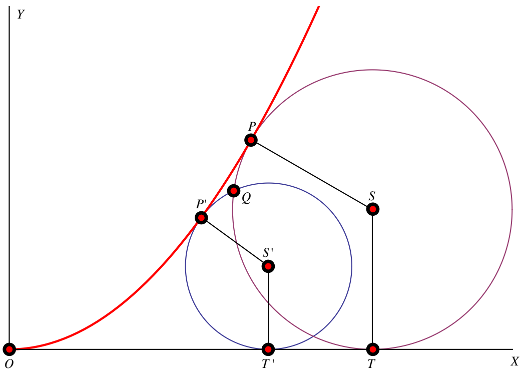

Figura 3: En la imagen se muestran dos circunferencias del haz C_m pasando por un mismo punto Q.

positivas y sobre el eje OY, es decir, la región donde se cumple la desigualdad $x^2 \geq y$. Además, como el parámetro es un número real, es obvio que las circunferencias C_m cubren toda la región. Precisando más, tal y como se muestra en la figura 3, hay dos circunferencias de la familia C_m que pasan por cualquier punto $Q = (x, y)$ tal que $x^2 > y$. Si $x^2 = y$, el punto está en la parábola y las dos circunferencias coinciden.

Tambien resuelto por D. Aranda, C. Beade, E. Fernández y el proponente.

Nota. Considerando la función

$$f(x,y,m) = (4x-(m+1)\sqrt{m^2-1})^2 + (4y-m(m-1))^2 - m^2(m-1)^2, \quad m \geq 1,$$

se cumple que la solución del sistema de ecuaciones

$$f(x,y,m) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial m} f(x,y,m) = 0$$

es la parábola $y = x^2$; es decir, la envolvente de la familia de circunferencias C_m es la parábola $y = x^2$. Este hecho se observa claramente en la figura 4.

Problema 318. *Propuesto por Leonard Giugiuc, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Sean a, b, c y d números reales no negativos tales que $ab+bc+cd+da+ac+bd = 6$. Probar que

$$\frac{abc+abd+acd+bcd}{2\sqrt{2}} \leq 1 + (\sqrt{2}-1)abcd.$$

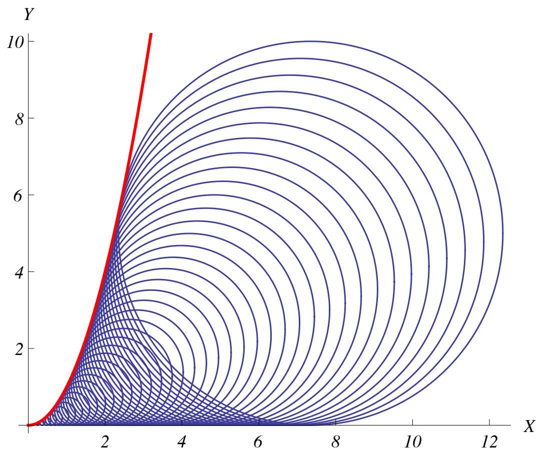

Figura 4: La parábola $y = x^2$ como envolvente de la familia de circunferencias C_m.

Solución enviada por Paolo Perfetti, Università degli studi di Tor Vergata, Roma, Italia.

Si $d = 0$, la desigualdad se convierte en $abc \leq 2\sqrt{2}$, que es simplemente la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica de los números no negativos ab, bc y ca,

$$3(abc)^{2/3} \leq ab + bc + ca = 6.$$

Por otro lado, la desigualdad se puede homogeneizar escribiéndola de la manera equivalente

$$\frac{\sqrt{ab+bc+cd+da+ac+bd}}{\sqrt{6}} \, \frac{abc+abd+acd+bcd}{2\sqrt{2}} \leq \frac{(ab+bc+cd+da+ac+bd)^2}{36} + (\sqrt{2}-1)abcd.$$

Entonces, si $d \neq 0$, para probarla siempre podemos reducirnos, sin perder generalidad, a considerar que $d = 1$. En tal caso la condición queda $ab+bc+ca+a+b+c = 6$, y la desigualdad, dependiente ya solo de tres variables, se transforma en

$$\frac{abc+ab+bc+ca}{2\sqrt{2}} \leq 1 + (\sqrt{2}-1)abc,$$

o bien,

$$1 + \frac{3-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}abc \geq \frac{ab+bc+ca}{2\sqrt{2}}. \tag{1}$$

Probaremos (1) usando el «método pqr» (véanse las referencias [1], [2] y [3]). Pongamos $abc = r$ y $ab + bc + ca = q$. Para q fijo, si $f(r) = 2\sqrt{2} + (3-2\sqrt{2})r - q$, (1) es equivalente a $f(r) \geq 0$. Como la función $f(r)$ es lineal en r, solo hay que comprobar que $f(r) \geq 0$ cuando r toma sus valores extremos, porque entonces se cumplirá también para todos los valores de r.

Ahora, por el denominado Lema *pqr* (o Teorema de Tejs, según las referencias), los valores máximo y mínimo de r ocurren, o bien cuando dos de los números a, b y c son iguales, o bien cuando uno de ellos es cero. Bastará entonces comprobar (1), por ejemplo, cuando $c = 0$ y cuando $a = b$.

Supongamos que $c = 0$. Hay que probar que $ab + a + b = 6$ implica $ab \leq 2\sqrt{2}$. Si suponemos, al contrario, que es $ab > 2\sqrt{2}$, de la desigualdad de medias $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ resulta

$$ab + a + b \geq ab + 2\sqrt{ab} > 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2\sqrt{2}} > 6.19,$$

absurdo.

Supongamos que $a = b$. Entonces partimos de que se cumple $a^2+2ac+2a+c = 6$, por tanto $c = (6-2a-a^2)/(2a+1)$, y (1) se convierte en la desigualdad equivalente (teniendo en cuenta que se tiene $2a + 1 > 0$)

$$(a-1)^2(-a^2 - 4a + 8 + 6\sqrt{2}) \geq 0.$$

Ahora bien, $c \geq 0$ implica $-\sqrt{7} - 1 \leq a \leq \sqrt{7} - 1$, y $0 \leq a \leq \sqrt{7} - 1$ implica $-a^2 - 4a + 8 + 6\sqrt{2} > 0$. La desigualdad queda probada. La igualdad se alcanza cuando $a = 1$, $b = a = 1$, $c = 3/3 = 1$, y $d = 1$.

Referencias

[1] S. Chow, H. Halim y V. Rong, The *pqr* method: Part I; Part II, *Crux Mathematicorum* **43** (2017), no. 5, 210–214; **43** (2017), no. 6, 258–261.

[2] A. Doledenok, M. Fadin, A. Menshchikov y A. Semchankau, The *pqr*-method and its application in inequalities, disponible en `https://artofproblemsolving.com/community/c6h1482764`, 23 de julio de 2017.

[3] M. B. T. Knudsen, The *uvw* method, disponible en `http://www.artofproblemsolving.com/community/c13188h278791`, 26 de mayo de 2009.

También resuelto por J. Nadal, B. Salgueiro y el proponente.

Nota. En la solución que nos envía, B. Salgueiro añade pruebas de estas otras dos desigualdades:

$$1 + (\sqrt{2} - 1)\sqrt{abcd} \leq \sqrt{2abcd} \leq \frac{abc + abd + acd + bcd}{2\sqrt{2}}.$$

Problema 319. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.*

Sean $\mathcal{T}$ el conjunto de todos los triángulos rectángulos con lados de longitud entera y n un número natural.

a) Probar que existen al menos dos triángulos en $\mathcal{T}$ cuya área es igual a n veces su perímetro.

b) Probar que existen infinitos triángulos en $\mathcal{T}$ para los que la diferencia entre las longitudes de la hipotenusa y del cateto mayor es igual a n.

c) Probar que existen infinitos triángulos en $\mathcal{T}$ para los que diferencia entre las longitudes de sus catetos es igual a n.

Solución enviada por Alberto Castaño Domínguez, Universidad de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela.

Podemos ver $\mathcal{T}$ como el conjunto de todas las ternas pitagóricas; esto es, las ternas de enteros positivos (a, b, c) tales que $a^2 + b^2 = c^2$. Es conocido que todas las ternas se pueden expresar de manera biunívoca como

$$a = k(p^2 - q^2), \qquad b = 2kpq \qquad \text{y} \qquad c = k(p^2 + q^2),$$

donde k, p y q son enteros positivos con $p > q$ tales que p y q son primos entre sí y de distinta paridad.

Con la notación anterior, el primer apartado es equivalente a buscar k, p y q que cumplan

$$k^2pq(p + q)(p - q) = 2kp(p + q)n.$$

Podemos tomar $k = 2$, $p = n + 1$, $q = n$, o bien $k = 1$, $p = 2n + 1$, $q = 2n$, obteniendo, respectivamente, las ternas $(2(2n + 1), 4n(n + 1), 2(2n^2 + 2n + 1))$ y $(4n + 1, 4n(2n + 1), 8n^2 + 4n + 1)$.

Supongamos ahora que $p = q + 1$. En ese caso, $b > a$ y podemos reformular el segundo apartado como

$$c - b = k(p^2 + q^2 - 2pq) = k(p - q)^2 = k = n.$$

Luego basta con tomar $k = n$ y variar q para conseguir los infinitos triángulos buscados, cuyos lados serían de la forma $(2nq + n, 2nq^2 + 2nq, 2nq^2 + 2nq + n)$.

El tercer apartado se puede reescribir como

$$k|p^2 - q^2 - 2pq| = n.$$

Tomando $p = q+d$, buscamos que $\pm k(d^2 - 2q^2) = n$, en función de si $d^2 > 2q^2$ o viceversa. En cualquier caso, considerando $k = n$, llegamos a una ecuación de Pell de la forma $d^2 - 2q^2 = \pm 1$, que tiene infinitas soluciones positivas en ambos casos. Variando q y d a lo largo de dichas soluciones conseguimos hallar los infinitos triángulos del enunciado. En este caso las ternas serían $(2dnq+d^2n, 2nq^2+2dnq, 2nq^2+2dnq+d^2n)$.

También resuelto por M. Amengual, C. Beade, R. S. Eléxpuru, J. Mir, A. M. Oller, B. Salgueiro, C. Sánchez y el proponente.

NOTA. En la solución enviada por A. M. Oller se observa que, si d es un divisor de $2n$, y tomando $k = 1$, los valores $p = 2n/d + d$ y $q = d$ dan lugar a soluciones del apartado a). Las ternas de la solución seleccionada se corresponden con $d = 1$ y $d = 2n$, respectivamente. Tomando $d = 2$ y $d = n$ tendríamos las soluciones

$(p,q) = (n+2,2)$ y $(p,q) = (n+2,n)$. De este hecho se deduce que, para $n > 2$, existen al menos cuatro triángulos en $\mathcal{T}$ cumpliendo el requerimiento del apartado a).

Por otra parte, como es bien conocido, la ecuación de Pell $d^2 - 2q^2 = 1$, que aparece en la resolución al apartado c), tiene las infinitas soluciones $\{(d_k, q_k)\}_{k\geq 1}$, con $(d_1, q_1) = (3,2)$ y $(d_{k+1}, q_{k+1}) = (3d_k + 4q_k, 2d_k + 3q_k)$. Las soluciones de la ecuación $d^2 - 2q^2 = -1$ se definen mediante la misma ecuación de recurrencia pero con la pareja inicial $(d_1, q_1) = (1,1)$.

Problema 320. *Propuesto por D. M. Bătineţu-Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucarest, Rumanía, y Neculai Stanciu, "George Emil Palade" Secondary School, Buzău, Rumanía.*

Sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales positivos tal que $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = a$, siendo a un cierto valor real positivo. Consideramos la sucesión dada por $x_1 = 1$ y $x_n = \sqrt[n]{\sqrt{3!}\sqrt[3]{5!}\sqrt[4]{7!}\cdots\sqrt[n]{(2n-1)!}}$. Evaluar los límites

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}^3}{x_{n+1}} - \frac{a_n^3}{x_n}\right) \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{x_n}{a_n}\right).$$

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Sea $\{y_n\}_{n\geq 1}$ la sucesión dada por $y_n = \frac{a_{n+1}^3}{a_n^3}\frac{x_n}{x_{n+1}}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}^3}{x_{n+1}} - \frac{a_n^3}{x_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^3}{x_n}(y_n - 1) = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^3}{n^3}\frac{n^2}{x_n}\frac{y_n - 1}{\log y_n}\log(y_n^n). \tag{1}$$

Como $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = a$, el criterio de Stolz implica

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = a. \tag{2}$$

Ahora, tomando la sucesión

$$p_n = \frac{n^{2n}}{\sqrt{3!}\,\sqrt[3]{5!}\,\sqrt[4]{7!}\,\cdots\,\sqrt[n]{(2n-1)!}}$$

y aplicando el criterio de la raíz dos veces, tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{x_n} &= \lim_{n\to\infty}p_n^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{p_{n+1}}{p_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{2(n+1)}}{n^{2n}}\frac{1}{((2n+1)!)^{\frac{1}{n+1}}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}\left(\frac{(n+1)^{2(n+1)}}{(2n+1)!}\right)^{\frac{1}{n+1}} = e^2\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}\frac{(n+2)^{2(n+2)}}{(n+1)^{2(n+1)}}\\ &= e^2\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2}{(2n+2)(2n+3)}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2(n+1)} = \frac{e^4}{4}.\end{aligned} \tag{3}$$

Ahora, de (2) y (3) se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}^3}{(n+1)^3}\frac{n^3}{a_n^3}\frac{(n+1)^2}{x_{n+1}}\frac{x_n}{n^2}\frac{n+1}{n} = 1$$

y, por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n - 1}{\log y_n} = 1. \tag{4}$$

Como, a partir de (2),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}^n}{a_n^n} = \lim_{n\to\infty} e^{n\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}} = e,$$

usando de nuevo el criterio de la raíz podemos deducir que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} y_n^n &= e^3 \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^n}{x_{n+1}^{n+1}} x_{n+1} = e^3 \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{\sqrt[n+1]{(2n+1)!}} \\
&= e^3 \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{(n+1)^2} \frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{(2n+1)!}} = \frac{4}{e} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^{2(n+1)}}{(2n+1)!} \right)^{\frac{1}{n+1}} \\
&= \frac{4}{e} \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} \frac{(n+2)^{2(n+2)}}{(n+1)^{2(n+1)}} \\
&= \frac{4}{e} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^2}{(2n+1)(2n+2)} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2(n+1)} = e.
\end{aligned}$$

Este hecho, junto con (1), (2), (3) y (4), permite concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}^3}{x_{n+1}} - \frac{a_n^3}{x_n} \right) = \frac{a^3 e^4}{4}.$$

Argumentando como en el caso anterior, para el segundo límite tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{x_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^2} \frac{n}{a_n} \frac{\frac{x_{n+1}}{x_n}\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1}{\log\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)} \log\left(\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n\right) = \frac{4}{ae^2}.$$

También resuelto por M. Omarjee, P. Perfetti y los proponentes. Se ha recibido una solución incorrecta.