Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri y José Luis Díaz Barrero

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Madre de Dios 53, 26006, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 30 de junio de 2019.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 348 (Corrección). *Propuesto por Cornel Ioan Vălean, Teremia Mare, Timiş, Rumanía.*

Sean

$$H_k^{(2)} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{k^2}, \qquad k \geq 1,$$

los números armónicos de orden dos. Probar que

$$\log 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k^{(2)}}{(k+1)2^{k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k^{(2)}}{(k+1)^2 2^{k+1}} = \frac{\zeta(4)}{16} + \frac{\zeta(2)\log^2 2}{4} - \frac{\log^4 2}{8}.$$

Problema 353. *Propuesto por Yagub N. Aliyev, ADA University, Baku, Azerbaiyán.*

Sea γ la circunferencia circunscrita al triángulo ABC y R su radio. Sea D un punto cualquiera del arco BC de γ que no contiene al vértice A, y sea E el punto de ese mismo arco tal que $\angle CAE = 2 \cdot \angle BAE$. Si la recta perpendicular por D al lado BC corta a este lado en el punto F, probar que $8R \cdot \text{área}(CDF) \leq CE^3$.

PROBLEMA 354. *Propuesto por Francisco Perdomo Peña y Ángel Plaza de la Hoz, Universidad de las Palmas de Gran Canaria, Las Palmas.*

Sea $f : [3, 8] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa e integrable. Probar que

$$\int_3^4 f(x)\,dx + 2\int_5^6 f(x)\,dx + \int_7^8 f(x)\,dx \geq 2\left(\int_4^5 f(x)\,dx + \int_6^7 f(x)\,dx\right).$$

PROBLEMA 355. *Propuesto por Ovidiu Furdui y Alina Sîntămărian, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Evaluar

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\left(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots\right)^2.$$

PROBLEMA 356. *Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.*

Sean AB y CD dos segmentos, de longitudes a y b, de una misma recta s. Sean M y N, respectivamente, los puntos medios de AB y CD, y sea $MN = \ell \geq (a+b)/2$. Para $\alpha \leq \pi/2$ se construyen los arcos capaces de ángulo α respecto de los segmentos AB y CD, contenidos en uno mismo de los semiplanos que determina la recta s, que denotaremos ω y Ω respectivamente. En un cierto rango de valores de α, los arcos ω y Ω se cortan en dos puntos E y F (o son tangentes), ver la figura. Sea G el punto medio del segmento EF. Encontrar el lugar geométrico de los puntos E y F y el lugar geométrico de G, al variar α.

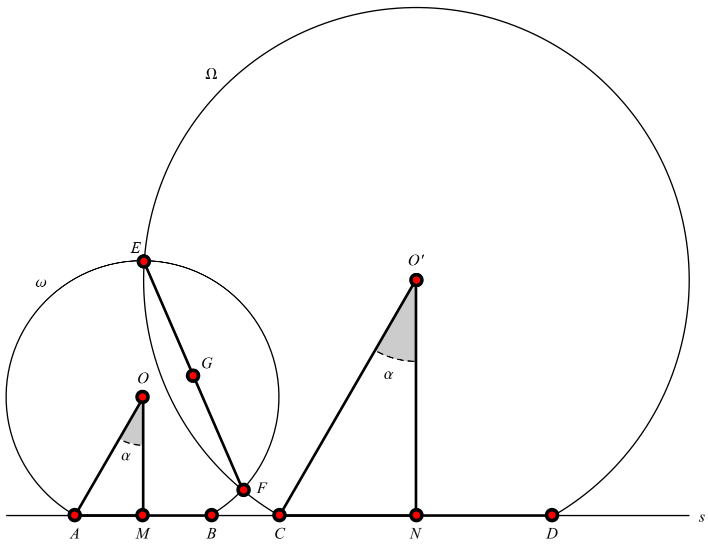

Figura correspondiente al Problema 356.

Problema 357. *Propuesto por D. M. Bătineţu-Giurgiu y Daniel Sitaru, National Economic College "Theodor Costescu", Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Si a, b y c son números reales positivos y $x \in (0, \pi/2)$, probar que

$$\frac{a^2 \operatorname{sen}^6 x}{x^6} + \frac{b^2 \operatorname{sen}^4 x}{x^4} + \frac{c^2 \operatorname{sen}^2 x}{x^2} + 3\sqrt[3]{(abc)^2}\frac{\tan^2 x}{x^2} > 6\sqrt[3]{(abc)^2}.$$

Problema 358. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.*

En un triángulo ABC en el que $\angle BCA \geq \pi/2$, sea D el punto del lado BC para el que se cumple área$(CD'D) =$ área$(AD'B')$, donde D' y B' denotan, respectivamente, los puntos en que la recta perpendicular por C a AD corta a la propia AD y al lado AB. Si $\frac{BD}{DC} = k$, encontrar la razón $\frac{B'D'}{D'C}$.

Problema 359. *Propuesto por Cornel Ioan Vălean, Teremia Mare, Timiş, Rumanía.*

Si s es un número real positivo, probar que

$$2\int_0^\infty \left(S\left(\frac{x}{\sqrt{\pi s}}\right) \operatorname{sen} x + C\left(\frac{x}{\sqrt{\pi s}}\right) \cos x \right) e^{-x}\, dx = e^{-s},$$

donde

$$S(u) = \int_0^u \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z^2}{2}\right) dz \qquad \text{y} \qquad C(u) = \int_0^u \cos\left(\frac{\pi z^2}{2}\right) dz$$

son las integrales de Fresnel.

Problema 360. *Propuesto por Florin Stănescu, Serban Cioclescu School, Găeşti, Rumanía.*

Probar que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{1 - \frac{n^2 + k^2 - k}{\sqrt{(n^2+k^2)(n^2+(k-1)^2)}}} \arctan\left(\frac{n(2k-1)}{n^2 - k^2 + k}\right) \right) = \frac{\pi}{16\sqrt{2}}.$$

Soluciones

PROBLEMA 329. *Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.*

Hallar $\operatorname{mcd}(A,B)$, si A y B son números enteros tales que $(1+\sqrt{5})^{2017} = A+B\sqrt{5}$.

Solución enviada por Jorge Mozo Fernández, Universidad de Valladolid, Valladolid.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Si a_n y b_n son las sucesiones de números naturales tales que $(1 + \sqrt{5})^n = a_n + b_n\sqrt{5}$ y denotamos $m_n = \operatorname{mcd}(a_n, b_n)$, como $(1+\sqrt{5})^3 = 8 \cdot (2+\sqrt{5})$ se tiene que

$$a_{n+3} + b_{n+3}\sqrt{5} = 8(a_n + b_n\sqrt{5})(2+\sqrt{5}) = 8((2a_n + 5b_n) + (a_n + 2b_n)\sqrt{5})$$

y

$$\operatorname{mcd}(2a_n + 5b_n, a_n + 2b_n) = \operatorname{mcd}(a_n, b_n) = m_n.$$

En consecuencia, $m_{n+3} = 8m_n$. Puesto que $m_1 = 1$ y $2017 = 1 + 3 \cdot 672$, tenemos que $m_{2017} = 8^{672} \cdot 1 = 2^{2016}$ es la cantidad buscada.

Solución elaborada a partir de las enviadas, independientemente, por Juan Mir Pieras, Lloseta, Mallorca, y Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Calcularemos $\operatorname{mcd}(a_n, b_n)$, siendo a_n y b_n las sucesiones de números naturales definidos por la identidad $(1+\sqrt{5})^n = a_n + b_n\sqrt{5}$.

Si F_n y L_n denotan, respectivamente, los números de Fibonacci y los de Lucas, es conocido que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - (-\phi)^{-n}) \qquad \text{y} \qquad L_n = \phi^n + (-\phi)^{-n},$$

siendo $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ el número áureo. Por tanto, $\phi^n = (L_n + F_n\sqrt{5})/2$ y

$$(1+\sqrt{5})^n = (2\phi)^n = 2^{n-1}(L_n + F_n\sqrt{5}).$$

Usando inducción, resulta sencillo comprobar que $L_n = F_n + 2F_{n-1}$ y, de esta forma,

$$\begin{aligned}\operatorname{mcd}(a_n, b_n) &= 2^{n-1}\operatorname{mcd}(L_n, F_n)\\ &= 2^{n-1}\operatorname{mcd}(F_n + 2F_{n-1}, F_n) = 2^{n-1}\operatorname{mcd}(F_n, 2F_{n-1}).\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\operatorname{mcd}(F_n, F_{n-1}) &= \operatorname{mcd}(F_{n-1} + F_{n-2}, F_{n-1})\\ &= \operatorname{mcd}(F_{n-1}, F_{n-2}) = \cdots = \operatorname{mcd}(F_2, F_1) = 1,\end{aligned}$$

es decir, dos números de Fibonacci consecutivos son siempre primos entre sí, concluimos que

$$\operatorname{mcd}(a_n, b_n) = 2^{n-1}\operatorname{mcd}(F_n, 2) = \begin{cases} 2^n, & \text{si } n \text{ es múltiplo de tres,}\\ 2^{n-1}, & \text{en otro caso,}\end{cases}$$

puesto que F_n es par si y solo si n es múltiplo de tres. Como consecuencia de este hecho general, $\operatorname{mcd}(A,B) = \operatorname{mcd}(a_{2017}, b_{2017}) = 2^{2016}$.

También resuelto por Y. N. Aliyev, A. Castaño, M. A. Díaz, J. Gómez, G. C. Greubel, J. Nadal, A. Stadler, A. Velasco y el proponente.

Problema 330. *Propuesto por Yagub N. Aliyev, Azerbaijan Diplomatic Academy, Baku, Azerbaiyán.*

Determinar todos los polinomios $p(x)$ tales que $p(0) = 0$ y

$$p(x+y) \geq p(x) + (x+1)p(y),$$

para $x, y \in \mathbb{R}$.

Solución enviada por Daniel Cao Labora (estudiante de doctorado), Universidad de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela.

El polinomio idénticamente nulo $p(x) = 0$ es claramente una solución válida. Veamos a continuación que no hay ninguna más.

Si p no es el polinomio nulo, existe $n \geq 0$ tal que $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, con $a_n \neq 0$.

Tomando $y = x$, la desigualdad del enunciado puede reescribirse como

$$0 \geq (x+2)p(x) - p(2x)$$

y, como el lado derecho de esta desigualdad es un polinomio de grado $n+1$ que es siempre negativo, n debe ser impar y $a_n < 0$.

Si en la desigualdad del enunciado tomamos $y = -x$, tenemos

$$0 \geq -p(0) + p(x) + (x+1)p(-x).$$

Puesto que en el lado derecho tenemos nuevamente un polinomio negativo cuyo monomio de mayor grado es $-a_n x^{n+1}$ (recordar que n debe ser impar), llegamos a que $a_n > 0$, en contradicción con el hecho de ser $a_n < 0$, deducido anteriormente.

Nota. Como hemos visto, la condición $p(0) = 0$ no es necesaria y, en cualquier caso, es redundante, pues se sigue de la desigualdad del enunciado. En efecto, la desigualdad del enunciado para $x = y = 0$ se convierte en $0 \geq p(0)$, y para $x = -2$ e $y = 0$ en $0 \geq -p(0)$; y, por tanto, $p(0) = 0$.

También resuelto por J. A. Bárcena, M. A. Díaz, J. Duoandikoetxea, E. Macías, J. Mir, J. Mozo, J. Nadal y el proponente.

Problema 331. *Propuesto por Abdilkadir Altintas, Afyon, Turquía, y Leonard Giugiuc, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Si en un triángulo ABC se verifica que $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C = \frac{\sqrt{3}}{8}$, determinar el mínimo valor de $\cos A \cos B \cos C$.

Solución enviada por Kee-Wai Lau, Hong Kong, China.

Probaremos que el mínimo valor de $\cos A \cos B \cos C$ es $-3/8$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $A \leq B \leq C$, lo que implica $0 < A \leq \pi/3$. Puesto que

$$\frac{\sqrt{3}}{8} = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen}(A+B) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} A(\cos A - \cos(A+2B)),$$

se tiene

$$\cos(A+2B) = \cos A - \frac{\sqrt{3}}{4 \operatorname{sen} A}.$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} \cos A \cos B \cos C &= -\cos A \cos B \cos(A+B) \\ &= \frac{-1}{2} \cos A(\cos A + \cos(A+2B)) = -\cos^2 A + \frac{\sqrt{3}}{8 \tan A}. \end{aligned}$$

Ahora, poniendo $t = \tan A$, se verifica

$$-\cos^2 A + \frac{\sqrt{3}}{8 \tan A} + \frac{3}{8} = \frac{3t^3 + \sqrt{3}t^2 - 5t + \sqrt{3}}{8t(1+t^2)} = \frac{(t+\sqrt{3})(\sqrt{3}t-1)^2}{8t(1+t^2)} \geq 0.$$

Luego $\cos A \cos B \cos C \geq -3/8$ y la igualdad se alcanza para $A = B = \pi/6$ y $C = 2\pi/3$.

También resuelto por C. Beade, J. Mir, J. Nadal, B. Salgueiro y el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.

PROBLEMA 332. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.*

En un triángulo ABC sean Q y P, respectivamente, los puntos donde las bisectrices interior y exterior del ángulo en el vértice C cortan al lado AB. Denotamos $CQ = v$, $CP = w$ y sea $PA/QA = k$. Hallar el área y el perímetro del triángulo ABC en términos de v, w y k.

Solución enviada por Cristóbal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón (modificada por los editores).

Si $BC = a$ y $AC = b$, podemos suponer sin pérdida de generalidad $a > b$. Así el punto P estará situado (ver figura 1) en la prolongación del lado BA a continuación del punto A. Entonces el punto Q es interior al segmento PB y se tiene $PB = PQ + QB$.

Llevamos ahora sobre la prolongación del lado BC y a continuación de C, el segmento $CA' = b$. El triángulo ACA' es isósceles. La bisectriz exterior CP corta al segmento AA' en su punto medio M. La bisectriz interior CQ es paralela a AA' (y a AM). Si ponemos $QA = x$, tenemos entonces $PA = kx$ y $PQ = (k+1)x$. Ahora,

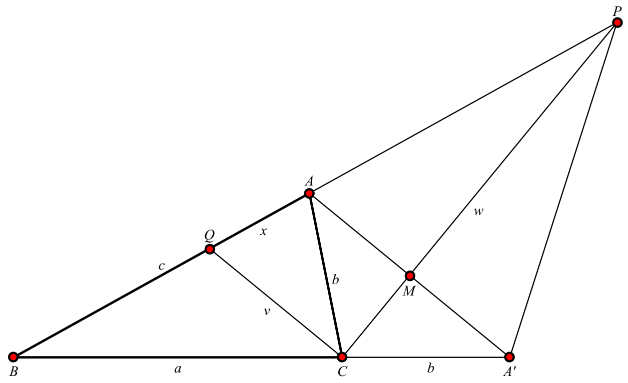

Figura 1: Esquema para la solución del Problema 332.

$PQ = \sqrt{v^2+w^2}$ ya que el triángulo QCP es rectángulo en C. Resulta entonces $x = \frac{\sqrt{v^2+w^2}}{k+1}$.

De acuerdo con los teoremas de la bisectriz, interior y exterior respectivamente, se cumple

$$\frac{a}{b} = \frac{QB}{QA} = \frac{PB}{PA}.$$

Sustituyendo $QA = x$ y $PA = kx$ se obtiene

$$QB = \frac{PB}{k} = \frac{PQ+QB}{k} = \frac{(k+1)x+QB}{k},$$

de donde resulta $QB = \frac{k+1}{k-1}x$ y

$$\frac{a}{b} = \frac{k+1}{k-1}. \tag{1}$$

Si $[XYZ]$ denota el área del triángulo XYZ, usando la proporcionalidad entre las áreas de triángulos de la misma altura y las bases respectivas se tiene

$$[QPC]\colon [AQC]\colon [BQC] = (k+1)\colon 1\colon \frac{k+1}{k-1}.$$

Como $[QPC] = \frac{vw}{2}$, llegamos a que

$$[AQC] = \frac{vw}{2(k+1)} \qquad \text{y} \qquad [BQC] = \frac{vw}{2(k-1)},$$

y encontramos la fórmula requerida

$$[ABC] = [AQC] + [BQC] = \frac{kvw}{k^2-1}$$

para el área del triángulo ABC.

Para la expresión del perímetro calcularemos la longitud de cada uno de los lados. En primer lugar,

$$c = BQ + QA = \frac{k+1}{k-1}\,x + x = \frac{2k}{k-1}\,x = \frac{2k\sqrt{v^2+w^2}}{k^2-1}.$$

Ahora calcularemos b como hipotenusa del triángulo rectángulo AMC. Usando el teorema de Tales, de

$$\frac{v}{AM} = \frac{PQ}{PA} = \frac{k+1}{k}$$

se sigue $AM = \frac{kv}{k+1}$. Y de

$$\frac{w}{CM} = \frac{PQ}{QA} = \frac{k+1}{1}$$

se deduce $CM = \frac{w}{k+1}$. Por consiguiente, $b = \sqrt{AM^2 + CM^2} = \frac{\sqrt{k^2v^2+w^2}}{k+1}$. Finalmente, de (1) resulta

$$a = \frac{\sqrt{k^2v^2+w^2}}{k+1} \cdot \frac{k+1}{k-1} = \frac{\sqrt{k^2v^2+w^2}}{k-1},$$

de modo que

$$\begin{aligned} a+b+c &= \frac{\sqrt{k^2v^2+w^2}}{k-1} + \frac{\sqrt{k^2v^2+w^2}}{k+1} + \frac{2k\sqrt{v^2+w^2}}{k^2-1} \\ &= \frac{2k\left(\sqrt{k^2v^2+w^2} + \sqrt{v^2+w^2}\right)}{k^2-1}. \end{aligned}$$

También resuelto por F. D. Aranda, R. Barroso, A. Fancini y el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.

NOTA. La solución aportada por Fancini utiliza cálculo con coordenadas baricéntricas y en ella, además de las fórmulas solicitadas, se añaden

$$r = \frac{vw}{\sqrt{k^2v^2+w^2} + \sqrt{v^2+w^2}} \qquad \text{y} \qquad R = \frac{(k^2v^2+w^2)\sqrt{v^2+w^2}}{2(k^2-1)vw}$$

para los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita, respectivamente, del triángulo ABC.

PROBLEMA 333. *Propuesto por Pablo Refolio, Madrid.*

Evaluar la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(36n^2-33n+8)(6n-5)!}{2^{6n}(3n-1)!^2}.$$

Solución enviada por Albert Stadler, Herrliberg, Suiza.

Si denotamos por S la suma a evaluar, vamos a probar que $S = \frac{\sqrt{3}\pi}{144}$.

Partiendo de la serie binomial

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} x^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \binom{2k}{k} x^k, \qquad |x| < 1,$$

y usando la notación $\omega = e^{2\pi i/3}$ y

$$g(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{1+\omega x^2}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 x^2}} - 1\right),$$

se tiene

$$g(x) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \binom{2k}{k} (1+\omega^k+\omega^{2k}) x^{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{6n}} \binom{6n}{3n} x^{6n}, \qquad |x| < 1.$$

Puesto que

$$\begin{aligned}\frac{(36n^2-33n+8)(6n-5)!}{2^{6n}(3n-1)!^2} &= \binom{6n}{3n} \frac{(36n^2-33n+8)3n}{2(6n-1)(6n-2)(6n-3)(6n-4)} \\ &= \binom{6n}{3n}\left(-\frac{7}{48}\frac{1}{6n-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{6n-2} - \frac{3}{18}\frac{1}{6n-3} + \frac{1}{3}\frac{1}{6n-4}\right) \\ &= \binom{6n}{3n}\int_0^1 t^{6n-5}\left(-\frac{7}{48}t^3 + \frac{1}{4}t^2 - \frac{3}{18}t + \frac{1}{3}\right) dt,\end{aligned}$$

llegamos a

$$\begin{aligned}S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{6n}} \binom{6n}{3n} \int_0^1 t^{6n-5}\left(-\frac{7}{48}t^3 + \frac{1}{4}t^2 - \frac{3}{18}t + \frac{1}{3}\right) dt \\ &= \int_0^1 g(t)\left(\frac{7}{48t^2} - \frac{1}{4t^3} + \frac{3}{18t^4} - \frac{1}{3t^5}\right) dt = \frac{7}{48}I_2 - \frac{1}{4}I_3 + \frac{3}{18}I_4 - \frac{1}{3}I_5, \qquad (1)\end{aligned}$$

donde

$$I_k = \int_0^1 g(t)\,\frac{dt}{t^k}.$$

Debemos observar dos hechos. En primer lugar, el intercambio de la suma y la integral puede justificarse fácilmente ya que, por la equivalencia de Stirling,

$$\frac{(36n^2-33n+8)(6n-5)!}{2^{6n}(3n-1)!^2} = \frac{1}{24\sqrt{3\pi}n^{3/2}}\left(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\right), \qquad n \to \infty.$$

En segundo lugar, cada una de las integrales I_k para $k = 0, \dots, 6$ es convergente puesto que

$$g(x) = -\frac{3}{2}(1+\omega+\omega^2)t^2 + \frac{9}{8}(1+\omega^2+\omega^4)t^4 + O(t^6) = O(t^6), \qquad t \to 0.$$

Ahora, como, para $|a| = 1$,

$$\int \frac{dt}{t^k\sqrt{1+at^2}} = -\frac{a(k-2)}{k-1}\int \frac{dt}{t^{k-2}\sqrt{1+at^2}} - \frac{1}{k-1}\frac{\sqrt{1+at^2}}{t^{k-1}}, \qquad k \geq 2,$$

y

$$\int \frac{dt}{t\sqrt{1+at^2}} = \log t - \log(1+\sqrt{1+at^2}) + C,$$

donde para el logaritmo y la raíz cuadrada se toma la rama principal, definidas por $\sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{i\arg z}/2$ y $\log z = \log|z| + i\arg z$, con $-\pi/2 < \arg z < \pi/2$, deducimos que

$$I_2 = \frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{3}{t} - \frac{1}{t}\sum_{j=0}^{2}\sqrt{1+\omega^j t^2}\right)\Bigg|_{\varepsilon}^{1} = \frac{1}{3}\left(3 - \sum_{j=0}^{2}\sqrt{1+\omega^j}\right) = \frac{3-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3},$$

donde hemos usado que

$$\sum_{j=0}^{2}\sqrt{1+\omega^j} = \sqrt{2} + e^{i\pi/6} + e^{-i\pi/6} = \sqrt{2}+\sqrt{3}. \tag{2}$$

Así mismo,

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{3}{2t^2} + \sum_{j=0}^{2}\left(-\frac{\sqrt{1+\omega^j t^2}}{2t^2} - \frac{\omega^j}{2}\log t + \frac{\omega^j}{2}\log(1+\sqrt{1+\omega^j t^2})\right)\right)\Bigg|_{\varepsilon}^{1} \\ &= \frac{1}{6}\left(3 + \sum_{j=0}^{2}\left(-\sqrt{1+\omega^j} + \omega^j\log(1+\sqrt{1+\omega^j})\right)\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(3-\sqrt{3}-\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{3}\pi}{12} - \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})\right), \end{aligned}$$

que se sigue de (2) y de

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2}\omega^j\log(1+\sqrt{1+\omega^j}) &= \log(1+\sqrt{2}) + \omega\log(1+e^{i\pi/6}) + \omega^2\log(1+e^{-i\pi/6}) \\ &= \log(1+\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{3}\pi}{12} - \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{t^3} + \sum_{j=0}^{2}\left(-\frac{\sqrt{1+\omega^j t^2}}{3t^3} + \frac{2\omega^j\sqrt{1+\omega^j t^2}}{3t}\right)\right)\Bigg|_{\varepsilon}^{1} \\ &= \frac{1}{9}\left(3 + \sum_{j=0}^{2}\left(-\sqrt{1+\omega^j} + 2\omega^j\sqrt{1+\omega^j}\right)\right) = \frac{1}{9}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}-1\right), \end{aligned}$$

donde hemos aplicado (2) y la identidad

$$\sum_{j=0}^{2} \omega^j \sqrt{1+\omega^j} = \sqrt{2} - 2; \tag{3}$$

e

$$\begin{aligned} I_5 &= \frac{1}{3} \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{3}{4t^4} + \sum_{j=0}^{2} \left(-\frac{\sqrt{1+\omega^j t^2}}{4t^4} \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. \left. + \frac{3\omega^j\sqrt{1+\omega^j t^2}}{8t^2} + \frac{3\omega^{2j}}{8}\log t - \frac{3\omega^{2j}}{8}\log(1+\sqrt{1+\omega^j t^2}) \right) \right) \right|_{\varepsilon}^{1} \\ &= \frac{1}{24}\left(6 + \sum_{j=0}^{2} \left(-2\sqrt{1+\omega^j} + 3\omega^j\sqrt{1+\omega^j} - 3\omega^{2j}\log(1+\sqrt{1+\omega^j}) \right) \right) \\ &= \frac{1}{24}\left(\sqrt{3} - 2\sqrt{2} - 3\log(1+\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{3}\pi}{4} + \frac{3}{2}\log(2+\sqrt{3}) \right), \end{aligned}$$

que es consecuencia de (2), (3) y de

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2} \omega^{2j}\log(1+\sqrt{1+\omega^j}) &= \log(1+\sqrt{2}) + \omega^2\log(1+e^{i\pi/6}) + \omega\log(1+e^{-i\pi/6}) \\ &= \log(1+\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{3}\pi}{12} - \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3}). \end{aligned}$$

De este modo, insertando los valores de I_2, I_3, I_4 e I_5 en (1) llegamos a que $S = \frac{\sqrt{3}\pi}{144}$.

También resuelto por L. Glasser y el proponente. Se ha recibido una solución incompleta.

Problema 334. *Propuesto por Ángel Plaza, Universidad de las Palmas de Gran Canaria, Las Palmas.*

Sean $x_1, \dots, x_n$ números reales positivos tales que $\prod_{j=1}^{n} x_j > 1$. Probar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^{k+1}}{\sum_{j=1}^{n} x_j^{2k+1}} \le \frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} x_j} - 1}.$$

Solución enviada por Paolo Perfetti, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Tor Vergata, Roma, Italia.

Por la desigualdad entre las medias de orden $k+1$ y $2k+1$, se tiene

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^{k+1} \le n^{k/(2k+1)} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^{2k+1} \right)^{(k+1)/(2k+1)}$$

y, por la desigualdad entre la medias aritmética y geométrica,

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^{2k+1} \geq n \left(\prod_{j=1}^{n} x_j \right)^{(2k+1)/n}.$$

Entonces,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^{k+1}}{\sum_{j=1}^{n} x_j^{2k+1}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^{k/(2k+1)}}{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^{2k+1}\right)^{k/(2k+1)}}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{n} x_j \right)^{-k/n} = \frac{\left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right)^{-1/n}}{1 - \left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right)^{-1/n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} x_j} - 1},$$

donde hemos usado la suma de la serie geométrica de razón $\left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right)^{-1/n}$ que, por hipótesis, es menor que uno.

También resuelto por A. Stadler y el proponente. Se ha recibido una solución incompleta.

PROBLEMA 335. *Propuesto por Ovidiu Furdui, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Sea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, donde $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ es el conjunto de las matrices cuadradas de orden dos cuyos elementos son números racionales; así mismo, sea I_2 la matriz identidad, y O_2 la matriz nula. Si definimos

$$\log A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} (A - I_2)^{k+1},$$

probar que $\log A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ si y solo si $(A - I_2)^2 = O_2$.

Solución enviada por Moubinool Omarjee, Lycée Henri IV, París, Francia (modificada por los editores).

Si $(A - I_2)^2 = O_2$, es claro que

$$\log A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} (A - I_2)^{k+1} = A - I_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}),$$

puesto que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.

Veamos ahora la otra implicación. Si a y b denotan los autovalores de la matriz $A - I_2$, entonces $r = a + b$ y $s = ab$ son valores racionales. Además, los autovalores de $\log A$ serán $\log(1+a)$ y $\log(1+b)$. En efecto, si λ es un autovalor de $A-I_2$ y v un autovector asociado a él, se tiene que

$$\log A \cdot v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}(A-I_2)^{k+1} \cdot v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}\lambda^{k+1} \cdot v = \log(1+\lambda) \cdot v.$$

Como $\log A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, los valores $\log(1+a)+\log(1+b)$ y $\log(1+a)\log(1+b)$ son números racionales y

$$\log(1+a)+\log(1+b) = \log(1+a+b+ab) = \log(1+r+s) =: \alpha \in \mathbb{Q}.$$

Si α fuese no nulo, entonces $e^\alpha = 1+r+s \in \mathbb{Q}$ y e^α sería algebraico, lo que es imposible por el teorema de Lindemann-Weierstrass; luego α debe ser nulo y $r=-s$. De esta forma, $(1+a)(1+b)=1$ y $\log^2(1+a) =: \beta \in \mathbb{Q}$, de modo que $1+a = e^{\pm\sqrt{\beta}}$, $1+b = e^{\mp\sqrt{\beta}}$ y

$$e^{\pm\sqrt{\beta}} + e^{\mp\sqrt{\beta}} = 2+r \in \mathbb{Q}.$$

Luego los valores $t = e^{\pm\sqrt{\beta}}$ son raíces del polinomio de coeficientes racionales $t^2-(2+r)t+1$, es decir, son algebraicos; y aplicando de nuevo el teorema de Lindemann-Weierstrass, deducimos que $\beta = 0$. Por tanto, $a=b=0$ y, por el teorema de Cayley-Hamilton, podemos concluir que $(A-I_2)^2 = O_2$.

También resuelto por A. Castaño, J. Nadal, A. Stadler, J. A. Torné y J. L. Varona (conjuntamente) y el proponente.

Nota. Procediendo como en la solución presentada, el resultado puede extenderse a matrices en $\mathcal{M}_2(\overline{\mathbb{Q}})$, donde $\overline{\mathbb{Q}}$ es la clausura algebraica de $\mathbb{Q}$, es decir, el conjunto de los números algebraicos, ya que en ese caso también es aplicable el teorema de Lindemann-Weierstrass. Este hecho es observado en varias de las soluciones recibidas.

Problema 336. *Propuesto por Daniel Sitaru, National Economic College “Theodor Costescu”, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Sean $f,g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que $g(x) \neq 0$, para $x \in [0,1]$, y $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(g\left(\frac{1}{n+i}\right) - g\left(\frac{1}{n+1+i}\right)\right)\left(\frac{f\left(\frac{1}{n+1}\right)}{g\left(\frac{1}{n+1}\right)} + \frac{f\left(\frac{1}{n+2}\right)}{g\left(\frac{1}{n+2}\right)} + \cdots + \frac{f\left(\frac{1}{n+i}\right)}{g\left(\frac{1}{n+i}\right)}\right).$$

Nota. Tal y como está planteado no es posible resolver este Problema 336. En la solución remitida por el proponente hay un error que no apreciamos en su momento. Planteamos a continuación una nueva versión del problema, basada en la propuesta original, y cuya solución sigue esencialmente la dada por el proponente.

PROBLEMA 336 (CORRECCIÓN). *Propuesto por Daniel Sitaru, National Economic College "Theodor Costescu", Drobeta Turnu Severin, Rumanía, y los editores.*

Sean $f, g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que $g(x) \neq 0$, para $x \in [0,1]$, y $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. Calcular

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} &\left(g\left(\frac{1}{2n}\right)\left(\frac{f\left(\frac{1}{n+1}\right)}{g\left(\frac{1}{n+1}\right)} + \frac{f\left(\frac{1}{n+2}\right)}{g\left(\frac{1}{n+2}\right)} + \cdots + \frac{f\left(\frac{1}{2n}\right)}{g\left(\frac{1}{2n}\right)}\right)\right.\\ &\left. + \sum_{i=1}^{n-1}\left(g\left(\frac{1}{n+i}\right) - g\left(\frac{1}{n+1+i}\right)\right)\left(\frac{f\left(\frac{1}{n+1}\right)}{g\left(\frac{1}{n+1}\right)} + \frac{f\left(\frac{1}{n+2}\right)}{g\left(\frac{1}{n+2}\right)} + \cdots + \frac{f\left(\frac{1}{n+i}\right)}{g\left(\frac{1}{n+i}\right)}\right)\right).\end{aligned}$$

Solución enviada por el proponente (modificada por los editores).

Veamos en primer lugar que, para una función f en las hipótesis del problema, se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+i}\right) = \log 2. \tag{1}$$

Puesto que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\left|\frac{f(x)}{x} - 1\right| < \varepsilon$, cuando $0 < |x| < \delta$. Entonces existe N tal que, para cada $n > N$,se cumple $\left|\frac{1}{n+i}\right| < \delta$, con $i = 1, \ldots, n$, y

$$\frac{1-\varepsilon}{n+i} < f\left(\frac{1}{n+i}\right) < \frac{1+\varepsilon}{n+i},$$

lo que implica que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+i}\right) - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}\right) = 0.$$

Como $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i} = \log 2$, (1) se sigue inmediatamente.

Si denotamos por L el límite a evaluar, usando la identidad de Abel de sumación por partes

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_n(b_1 + \cdots + b_n) + \sum_{i=1}^{n-1}(a_i - a_{i+1})(b_1 + b_2 + \cdots + b_i),$$

con $a_i = g\left(\frac{1}{n+i}\right)$ y $b_i = \frac{f\left(\frac{1}{n+i}\right)}{g\left(\frac{1}{n+i}\right)}$ llegamos, aplicando (1) en el último paso, a que

$$L = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{1}{n+i}\right)\cdot\frac{f\left(\frac{1}{n+i}\right)}{g\left(\frac{1}{n+i}\right)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+i}\right) = \log 2.$$