El producto de Wallis y $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ son lo mismo

Con el objetivo de interpolar entre los términos de la sucesión de factoriales, Euler define la función Gamma en una carta a Goldbach fechada el 13 de octubre de 1729, y lo hace con una expresión que con notación actual se puede escribir como

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}}{\left(1+\frac{z}{n}\right)} \tag{1}$$

(en realidad, Euler usa lo que sería nuestra $\Gamma(z+1)$, y ni el nombre de Gamma ni la notación Γ son suyos, sino que los dio Legendre alrededor de 1811). Poco después, en un artículo presentado a la Academia de San Petersburgo el 28 de noviembre de 1729 (publicado en *Comment. acad. sc. Petrop.* **5** (1730/1), 1738, 36–57), da una expresión integral equivalente a la que ahora se toma como definición habitual.

Usando una versión logarítmica de la identidad $e^{i\pi}=-1$, Euler se da cuenta de que «$(1/2)!$» $=\Gamma(3/2)=\sqrt{\pi}/2$ y lo comunica a Goldbach en la carta antes citada. Además, en el artículo posterior observa ya que esa igualdad (de la que se sigue $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$) se reduce al producto de Wallis

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots=\frac{\pi}{2}.$$

Pero este hecho es poco conocido, y el objetivo de esta miniatura es dar una prueba sencilla, con rigor y notación moderna, de que la fórmula $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ y el producto de Wallis son realmente lo mismo.

Para nuestros propósitos, la mejor manera de conectar la función Gamma con un producto infinito es usar (1), la definición original que dio Euler. Esto implica

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}=\frac{x+y}{xy}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{x+y}{n}\right)}{\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right)}=\frac{x+y}{xy}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+x+y)}{(n+x)(n+y)}.$$

Tomando $x=y=1/2$ en esta expresión y usando $\Gamma(1)=1$, lo que obtenemos es

$$\begin{aligned}\Gamma(1/2)^2&=\frac{1}{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1/2)(n+1/2)}=4\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n(2n+2)}{(2n+1)(2n+1)}\\&=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots\right),\end{aligned}$$

así que $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ y el producto de Wallis se deducen directamente uno del otro, tal como queríamos comprobar.

Óscar Ciaurri, Emilio Fernández y Juan Luis Varona, Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja
Correo electrónico: oscar.ciaurri@unirioja.es, eferna35@gmail.com, jvarona@unirioja.es