EDUCACIÓN

Sección a cargo de

María Luz Callejo

Análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad

por

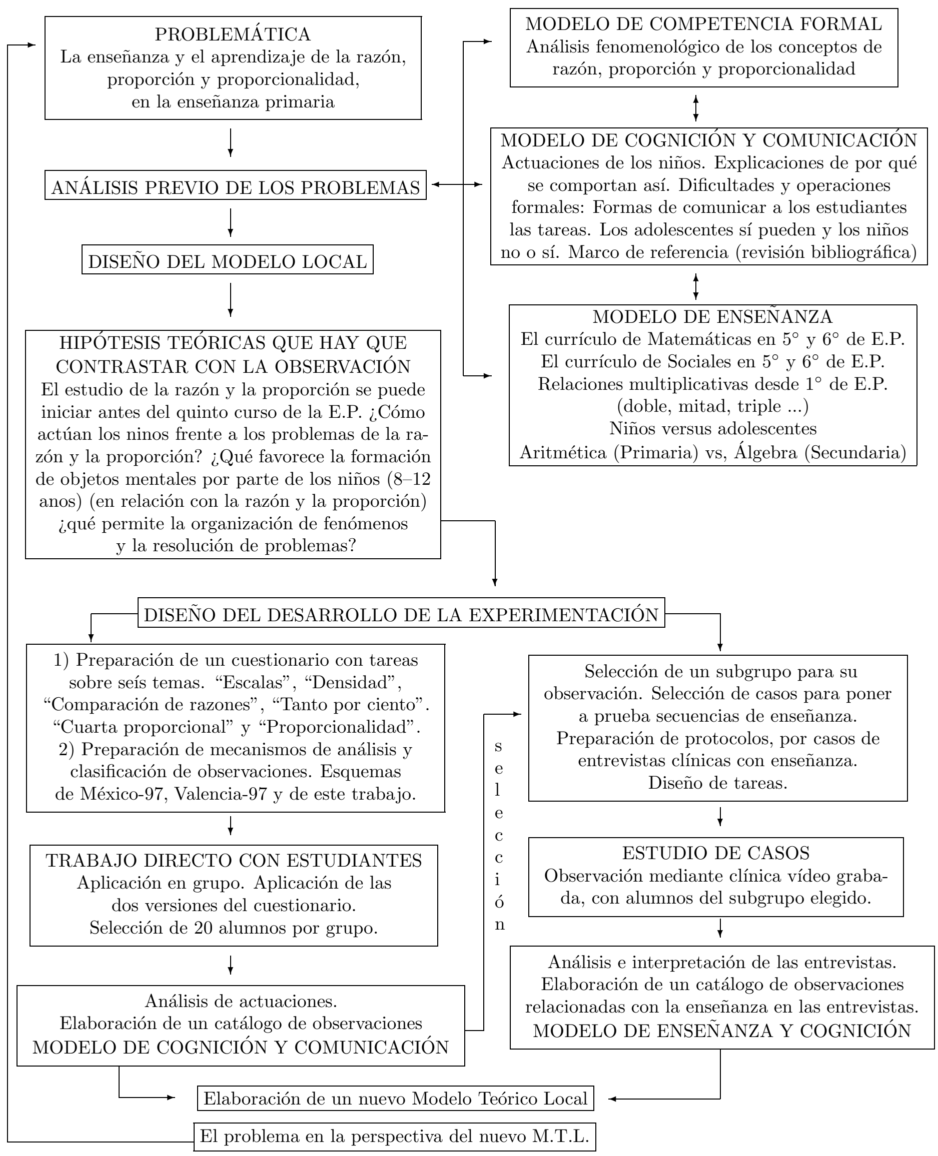
Alejandro Fernández Lajusticia y Luis Puig

En este artículo presentamos dos aspectos de un trabajo de investigación sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad en la etapa primaria (Fernández, 2001). En primer lugar, esbozamos el esquema general de la investigación; en segundo lugar, exponemos en detalle el análisis fenomenológico de los conceptos en cuestión, siendo este segundo aspecto el objeto central del artículo.

MODELOS TEÓRICOS LOCALES

El esquema general de esta investigación responde a un estilo de investigación que inició Eugenio Filloy hace algunos años, cuya descripción más detallada puede encontrarse en Filloy y cols. (1999). Los estudios de este estilo parten de una toma de partido teórica por no utilizar teorías generales de la enseñanza, el aprendizaje o la comunicación; por el contrario, se trata de elaborar modelos teóricos locales para dar cuenta de los procesos que se desarrollan cuando se enseña en el sistema educativo unos contenidos matemáticos concretos a unos alumnos concretos, y sólo se pretende que esos modelos sean adecuados para los fenómenos observados. Ahora bien, a la vez que se dice que el ámbito de validez de los modelos no se afirma que vaya más allá de los fenómenos observados, también se afirma que la descripción de los fenómenos que el modelo procura es profunda, compleja y minuciosa, y, para ello, es preciso que los modelos teóricos locales contemplen cuatro componentes: el componente de competencia del Modelo Teórico Local o, de forma abreviada, el Modelo de competencia (formal, si es el caso); el componente de actuación

ESQUEMA DEL DISEÑO Y DESARROLLO DE LA EXPERIMENTACIÓN



del Modelo Teórico Local o Modelo de actuación (que, si hacemos la hipótesis de que las actuaciones las podemos describir en términos de procesos cognitivos, podemos denominar Modelo de cognición); el componente de enseñanza del Modelo Teórico Local, o, Modelo de enseñanza; y, finalmente, el Componente de comunicación del Modelo Teórico Local o Modelo de comunicación.

El esquema general de la investigación

La idea de elaboración de modelos teóricos locales como característica del estilo de investigación es, a la vez, teórica y metodológica. Desde el punto de vista teórico, que no vamos a desarrollar aquí, caracteriza el tipo de investigación, su alcance y su fundamento (ver Filloy y cols., 1999, para una discusión detallada de este aspecto). Desde el punto de vista metodológico, organiza la investigación. El diagrama de flujo de la página anterior representa el caso concreto de esta investigación.

El primer rasgo característico de una investigación organizada por la idea de la elaboración de Modelos Teóricos Locales que muestra el diagrama es que éste es recurrente. El diagrama comienza con la elaboración de un Modelo Teórico Local y termina con la expresión de los resultados de la investigación en términos de los componentes del Modelo Teórico Local inicial y, por tanto, con la elaboración de un nuevo Modelo Teórico Local, que, por tanto, está listo para ser el comienzo de una nueva investigación.

Para elaborar cada uno de los componentes del modelo teórico local inicial, las fuentes son distintas. El componente de competencia, en nuestra investigación, lo elaboramos mediante un análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. Esta parte de la investigación es la que explicaremos detalladamente en este artículo.

El componente de cognición lo elaboramos mediante una revisión de la bibliografía sobre el tema -organizada atendiendo a tres aspectos: los problemas, las actuaciones de los alumnos y las variables que afectan a las actuaciones de los alumnos-, que nos permitió tener una descripción y una explicación de las actuaciones esperadas de los alumnos.

El componente de enseñanza está presente de dos maneras. Por un lado, tomamos en cuenta dos de los diseños curriculares que en el momento de la realización de la investigación estaban vigentes en España: el de la Generalitat Valenciana (1990) y el del Ministerio de Educación y Ciencia (MEC, 1989) para los territorios que en ese momento no tenían competencias plenas en materia de educación. Esto nos proporcionó un conocimiento de la enseñanza pretendida por las intenciones curriculares, que tuvimos en cuenta en el estudio de las actuaciones de grupos de alumnos del sistema. Por otro lado, el análisis fenomenológico nos permitió hacer hipótesis sobre determinados objetos mentales precursores en la constitución de los objetos mentales de razón, proporción y proporcionalidad, lo que nos condujo al diseño de secuencias de enseñanza en las que estos precursores eran el objeto central. Estas secuencias de enseñanza fueron las que utilizamos en el estudio de casos.

Con el análisis de la problemática a través del Modelo Teórico Local inicial, desde cada uno de los componentes y con sus interrelaciones, el paso siguiente de la investigación fue proponer como hipótesis para contrastar con las observaciones empíricas que la enseñanza de la razón, la proporción y la proporcionalidad se puede iniciar en los primeros niveles de la enseñanza primaria.

El desarrollo de la experimentación tiene dos partes, que en el diagrama están en dos columnas: la columna de la izquierda describe el estudio de grupos de alumnos en su ambiente natural de la escuela y la columna de la derecha el estudio de casos seleccionados.

Para el estudio de grupo, comenzamos por elaborar un instrumento de observación consistente en un cuestionario con dos versiones: una para los alumnos del segundo ciclo de la enseñanza primaria (8-10 años) y otra para los alumnos del tercer ciclo (10-12 años). Las tareas de ambas versiones del cuestionario las diseñamos y clasificamos en seis temas: "Escalas", "Densidad", "Comparación de razones", "Tanto por cien", "Cuarta proporcional" y "Proporcionalidad". Esa clasificación la redujimos después a cuatro bloques, ya que unimos en uno "Comparación de razones" y "Tanto por cien", por un lado, y "Cuarta proporcional" y "Proporcionalidad" con el nombre de "Valor perdido y Proporcionalidad". Esos cuestionarios fueron presentados para su resolución a alumnos de cuatro cursos del Colegio Público de Prácticas de Valencia, en su aula y horario normal de clase. El total de alumnos a los que se presentó fue de ochenta, veinte por grupo.

En segundo lugar, elaboramos un instrumento de análisis y clasificación de actuaciones, para lo que partimos de un esquema de interpretación de comportamientos construido en los estudios que sobre razón y proporción se realizaron en el periodo 1993-96 en México (ver los trabajos de Gómez, 1996, Jiménez de la Rosa, 1996, y Muñoz, 1996) y de las ampliaciones y modificaciones que de ese esquema de interpretación realizamos en el curso 1996-97 (Fernández et al., 1998). Además aún tuvimos que incorporar nuevas ampliaciones y modificaciones del esquema de clasificación a la vista de algunas actuaciones que nos aparecieron y que no podíamos clasificar de forma adecuada (ver el capítulo segundo de Fernández, 2001)[1].

Para el estudio de casos mediante entrevistas clínicas con enseñanza, comenzamos por seleccionar un subgrupo de alumnos, utilizando para ello el análisis de las actuaciones desarrollado en el estudio de grupo. La selección de los alumnos la realizamos atendiendo principalmente a dos criterios: que estuvieran en el último curso del ciclo de enseñanza (alumnos de cuarto curso o de sexto curso), y que su actuación al responder el cuestionario estuviera

[1]El análisis pormenorizado de las actuaciones de los alumnos y sus resultados pueden verse en Fernández (2001), anexo 2 y capítulo quinto, respectivamente.

caracterizada por el desarrollo de alguna estrategia errónea directamente relacionada con el tema del bloque de tareas objeto de la entrevista con enseñanza. Además, también tuvimos en cuenta que el índice de actuaciones satisfactorias estuviera alrededor del cincuenta por cien, así como sus actuaciones al resolver las otras tareas que están relacionadas en particular con la estrategia errónea por la cual se le había elegido. Decidimos realizar dos entrevistas por cada uno de los bloques de tareas del cuestionario, una con alumnos de segundo ciclo y otra con alumnos de tercer ciclo, es decir un total de ocho entrevistas. Hicimos una selección inicial de veinticuatro alumnos, tres de cada uno de los casos que queríamos observar, con el fin de estar cubiertos ante eventuales dificultades, de los que finalmente entrevistamos a ocho. A continuación, preparamos ocho protocolos de entrevista con enseñanza, dos por cada uno de los bloques de tareas: cuatro para entrevistar a cuatro alumnos del segundo ciclo (4º curso), uno por cada bloque, y los otros cuatro para entrevistar a cuatro alumnos del tercer ciclo (6º curso), también uno por cada bloque.

Todos los protocolos los diseñamos a partir de un problema inicial, directamente relacionado con el tema o temas de un bloque de tareas del cuestionario, y consistían en algunas series de problemas para plantear a los alumnos, encadenados de manera que había que plantear unos u otros en función de las actuaciones que desarrollaran, clasificadas según el esquema, y que, en caso de sucesivos fracasos, conducían a tareas de enseñanza directamente relacionadas con los precursores determinados en el análisis fenomenológico. El conjunto de los protocolos utilizados constituye el modelo de enseñanza que pusimos a prueba en la experimentación.

Finalmente, realizamos el análisis e interpretación de las ocho entrevistas, elaborando dos conjuntos de observaciones. El primero, sobre el modelo de enseñanza; el segundo, sobre las actuaciones que tienen los entrevistados al resolver las tareas que se les van proponiendo durante la entrevista, es decir, relacionadas con el modelo para los procesos cognitivos que se ha tenido en cuenta para la elaboración del instrumento de análisis y clasificación de actuaciones.

El análisis fenomenológico

El análisis fenomenológico que vamos a presentar a continuación sigue las ideas de Freudenthal (1983), tal y como las interpreta uno de nosotros (ver Puig, 1997). Hacer un análisis fenomenológico de los conceptos o las estructuras matemáticas, previo a su enseñanza o, como en este caso, como forma de elaborar el componente de competencia del modelo teórico local en una investigación, es pertinente porque los objetos matemáticos se conciben como medios de organización de fenómenos. Según nuestra interpretación el término ‘fenómeno’ lo usamos como una manera de hablar de lo que es objeto de nuestra experiencia matemática y tenemos presente que los medios de organización de los fenómenos, aquello con lo que pretendemos dar cuenta de nuestra experiencia matemática, es tomado a su vez como objeto de experiencia. El par fenómenos/medios de organización está definido así por la relación entre ambos y no por la pertenencia a mundos distintos y se despliega en una serie fenómenos/medios de organización en la que los medios de organización de un par pasan a ser fenómenos del siguiente. Hacer fenomenología es entonces describir una de esas series o uno de sus pares.

Razón y proporción

De acuerdo con Freudenthal (1983) la razón es una función de un par ordenado (antecedente y consecuente) de números o de valores de una magnitud. También las operaciones aritméticas elementales son funciones de un par ordenado, sin embargo hay una mecanización para hallar el valor correspondiente a un par dado. Si queremos obtener el valor correspondiente a una razón, es decir si la leemos como una fracción y le hacemos corresponder el valor que se obtiene al efectuar la división entre los componentes del par ordenado, la razón desaparece y se priva a ésta de lo que la hace valiosa como razón. Por ejemplo, dos situaciones distintas como: "dos alumnos de cada tres de la clase pasan curso" y "en la clase los alumnos y las alumnas están en razón 2 a 3" se representarían mediante la misma fracción 2/3 y sin embargo se trata de fenómenos totalmente distintos, pues la primera razón representa una relación parte-todo y la segunda una relación parte–parte.

El significado de razón no reside en el proceso por el que se le asigna un valor, sino en la posibilidad de comparar dos razones y poder hablar de igualdad (o desigualdad) de razones independientemente del tamaño de las mismas. El significado de razón viene de poder decir con sentido "A es a B" como "C es a D", sin anticipar que "A es a B" se puede reducir a un número que es el mismo al que se puede reducir "C es a D". Del mismo modo que A/B se lee "A es a B" la igualdad (=) se lee "como", con lo que los significados no son los usuales para esos signos. En lo que sigue escribiremos $A : B :: C : D$, para subrayar esta diferencia.

El estatuto lógico de la razón desde el punto de vista fenomenológico ha de describirse entonces en términos de la relación "tener la misma razón". Éste es, de hecho, también el que tiene en Euclides, ya que en el libro V de los Elementos lo que realmente se define no es "razón", sino "guardar la misma razón". Así, la definición 5 comienza por "Se dice que unas magnitudes están en la misma razón, la primera con respecto a la segunda y la tercera con respecto a la cuarta, cuando ... "[2]. El estatuto lógico de la razón es pues, desde este punto de vista, de un nivel más elevado que el de número, fracciones, longitudes y

[2]Esta traducción es más literal que la de María Luisa Puertas en Euclides (1994). Ella, como explica en la nota 4, pág. 11, decidió usar siempre la expresión "guardar la misma razón" para las distintas expresiones que usa Euclides, que en el caso de esta definición es *en toi autoi logoi einai*, "estar en la misma razón".

otros conceptos con los que los alumnos se han encontrado previamente en su escolaridad, ya que proviene de una relación de equivalencia al ser el medio de organización de una propiedad intensiva y no una propiedad extensiva de objetos o conjuntos de objetos.

Razones en una magnitud y entre magnitudes

La variedad de propiedades intensivas de fenómenos organizados por la razón es enorme. En la enseñanza existe una gran división de dichos fenómenos que es preciso tomar en cuenta: la razón puede ser una relación en una magnitud o entre magnitudes.

Para ilustrar esta situación tomamos como ejemplo el movimiento uniforme y usamos ideas de Vergnaud (1983) para representar la situación como una aplicación lineal f entre dos espacios de medida (sistemas o magnitudes) M_1 (tiempo) y M_2 (espacio) (ver figura 2).

$$\begin{array}{ccc}
\text{TIEMPO} & & \text{ESPACIO} \\
M_1 & \xrightarrow{F} & M_2 \\
t_1 & \xmapsto{F} & e_1 = f(t_1) = \alpha t_1 \\
t_2 & \xmapsto{F} & e_2 = f(t_2) = \alpha t_2
\end{array}$$

Aquí están implicadas dos magnitudes (el tiempo t y la longitud e) y una función f que asigna una longitud a un tiempo, a saber, la longitud del camino recorrido en un intervalo de tiempo $e = f(t)$.

En el lenguaje cotidiano se habla del movimiento uniforme con expresiones como “en tiempos iguales se recorren espacios iguales”, o “en el doble de tiempo se recorre el doble de espacio”. Otras expresiones multiplicativas con triple, cuádruple, etc. se usan menos. Su generalización, en un lenguaje que ya no es el natural, sería “en n veces el tiempo se recorre n veces el espacio”.

La formalización de la expresión “veces” y su extensión de N a R, puede verse en Fernández (2001, págs. 35 y 36). Esta formalización conduce a la expresión final

$$f(t) : t = [f(t_0) : t_0] = cte$$

que expresa que la velocidad en el movimiento uniforme es constante.

Las razones que se consideran son pares de elementos de un mismo espacio de medida (tiempo o longitud). Lo que se exige es que las razones en un sistema sean iguales a las razones entre elementos correspondientes en el otro, lo cual caracteriza la uniformidad del movimiento.

En el ejemplo es patente que hay relaciones (razones) en las que los dos elementos son del mismo espacio de medida, es decir que se forman dentro del sistema por lo que es adecuado que dichas razones se denominen *internas*. En el movimiento uniforme las razones internas que se forman con elementos que se corresponden entre sí son invariantes y se escriben en la forma:

$$t : t_0 :: e : e_0$$

También parece adecuado que a las razones que se forman entre los dos sistemas (magnitudes) se denominen externas. En el movimiento uniforme las razones externas entre elementos que se corresponden son constantes y se escriben en la forma:

$$e : t :: e_0 : t_0$$

En esos términos la uniformidad del movimiento se puede expresar ahora mediante una razón externa: la razón "espacio recorrido a tiempo empleado" es constante.

Una proporción entre los dos sistemas conlleva una función lineal entre ellos. El que sea lineal lleva implícito que las razones internas son invariantes bajo la función, aunque las razones sean distintas en cada caso,

$$t : t_0 :: f(t) : f(t_0)$$

y que las razones externas entre elementos que la función hace corresponder son iguales, es decir que la razón "espacio recorrido es a tiempo" es constante, es decir que siempre es la misma razón,

$$\alpha t : t :: \alpha t_0 : t_0$$

Si interpretamos las razones como cociente, entonces la razón interna es un número (escalar) y la razón externa es una magnitud. En este caso del movimiento uniforme, el cociente entre el espacio recorrido y el tiempo es la velocidad (que es constante).

Si se consideran las cantidades, en el sentido que Puig y Cerdán (1988) toman de Kaput (1986) y Schwartz (1986), entonces aparecen únicamente cantidades intensivas. En relación con la razón externa aparece la velocidad como el cociente "espacio/tiempo" y en relación con la razón interna aparecen los escalares, y éstos se toman como cantidades intensivas especiales, "tiempo/tiempo" en un caso y "espacio/espacio" en el otro, pues también se trata de cocientes de cantidades extensivas, pero que, como son de la misma naturaleza, desaparecen en la escritura de las unidades.

La tabla 1 resume este análisis.

Interpretación	Razones internas	Razones externas
f es función lineal	Invarianza $t : t_0 :: f(t) : f(t_0)$	Constancia $\alpha : t :: \alpha t_0 : t_0$
Linearidad	Implícita $f(t + t_0) = f(t) + f(t_0)$	Explícita $f(t) = \alpha t$
Cociente	Número Cantidad intensiva Ej: escalares	Magnitud Cantidad intensiva Ej: rapidez, densidad ...

Tabla 1

Ahora bien, éste no es el único aspecto de un análisis fenomenológico de la razón, la proporción y la proporcionalidad. Estos conceptos organizan otros fenómenos pertenecientes a contextos distintos, que Freudenthal (1983) ha clasificado en exposiciones, composiciones y constructos. En los apartados siguientes, describimos formalmente esos contextos y cómo los organizan los conceptos en cuestión.

Exposiciones

Una exposición es una terna (W, M, w) donde W es un conjunto de cosas a cada una de las cuales se le asocia una magnitud o una medida en M mediante una función w.

Un ejemplo de exposición es un conjunto de países y sus superficies.

$$\Omega = \{\text{España, México, Francia}\}$$
$$\swarrow \omega \qquad \swarrow \omega \qquad \downarrow \omega \qquad \searrow \omega$$
$$M = [492400\text{km}^2, 1958200\text{km}^2, 551000\text{km}^2]$$

En este contexto particular, la razón puede usarse para comparar las superficies de varios países. Así, en el lenguaje natural usamos expresiones como "México es tantas veces más extenso que España". Las razones están consideradas dentro de un sistema, es decir, son *internas*.

PAREJAS DE EXPOSICIONES

Normalmente las exposiciones aparecen por parejas y muy a menudo se tiende a comparar dos exposiciones definidas sobre el mismo conjunto.

Por ejemplo, sea Ω un conjunto de países. Las funciones ω_1 y ω_2 son las que asignan a cada uno de ellos su población y su superficie, respectivamente

$$\begin{aligned} \omega_1 : \Omega &\longrightarrow M_1(\text{N}^{\text{o}}.\ \ \text{Hab.}) \\ \omega_2 : \Omega &\longrightarrow M_2\ (\text{Área}) \end{aligned}$$

La función $f : M_1 \to M_2$, que relaciona la cantidad de habitantes con la cantidad de superficie para cada país podemos definirla de forma natural, es decir, f es la función tal que $f \circ \omega_1 = \omega_2$, o dicho de otra manera, la función que hace conmutativo el diagrama siguiente.

$$\begin{tikzcd} & \Omega \arrow[dl, "\omega_1"'] \arrow[dr, "\omega_2"] & \\ M_1 \arrow[rr, "f"] & & M_2 \end{tikzcd}$$

Si x_1, x_2 son elementos de Ω

$$\begin{aligned} f : M_1(N^o.\,Hab.) &\longrightarrow M_2(Area) \\ \omega_1(x_1) &\longmapsto \omega_2(x_1) \\ \omega_1(x_2) &\longmapsto \omega_2(x_2) \end{aligned}$$

Es decir que para todo x de Ω la función f asocia la imagen de x por ω_1 con la imagen de x por ω_2 y escribiremos $f[\omega_1(x)] = \omega_2(x)$.

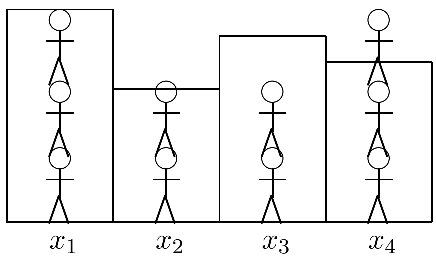
Si nos preguntamos cuándo hay proporcionalidad entre los cuatro elementos $\omega_1(x_1), \omega_1(x_2), \omega_2(x_1), \omega_2(x_2)$, tendremos una respuesta adecuada cuando analicemos y veamos si f es o no una función lineal. En el lenguaje cotidiano usaremos expresiones como “El número de habitantes en x_1 es mayor, menor o igual, al número de habitantes en x_2 “en proporción” a las áreas”. Estamos comparando entonces densidades de población, es decir, estamos comparando las cantidades intensivas:

$$\omega_1(x_1) \text{ es a } \omega_2(x_1) \text{ como } \omega_1(x_2) \text{ es a } \omega_2(x_2)$$

Dicho de otra manera, comparamos la razón entre ω_1 y ω_2 de dos países, es decir, la razón entre la población y la superficie de un país (densidad de población) con la del otro. Estas relaciones que se comparan dan el número de habitantes por kilómetro cuadrado (si son las unidades elegidas) y nos permiten afirmar si un país tiene "en proporción" el mismo número de habitantes (o menor o mayor) que otro.

En las situaciones en las que se presenta un par de exposiciones las razones que habitualmente se comparan son razones *externas*.

Podemos visualizar estos problemas mediante histogramas y pictogramas como en el ejemplo siguiente:



Tenemos cuatro países cuya población representamos con los muñecos y cuya área la representamos con rectángulos.

En el ejemplo podemos decir que el número de habitantes del país x_4 es mayor que el número de habitantes del país x_1 con respecto al área o que la densidad de población en x_4 es mayor que en x_1.

Entre los distintos problemas que se han diseñado en el trabajo de Fernández (2001) para presentárselos a los alumnos, hay varios que están basados en un par de exposiciones. Uno de los objetos de estudio de dicho trabajo es la densidad, y para ello se han diseñado una serie de problemas en los que el alumno ha de comparar dos razones de densidad (ver los capítulos tercero y cuarto).

Otro ejemplo de pareja de exposiciones sería el conjunto de los paquetes de un producto (por ejemplo arroces) que hay en un supermercado con sus precios y sus pesos. Entonces Ω será el conjunto de paquetes y a cada uno de ellos se le asigna su precio mediante la función ω_1 y su peso mediante la función ω_2.

La comparación de las razones $\omega_1(x_1) : \omega_2(x_1)$ y $\omega_1(x_2) : \omega_2(x_2)$ [precio es a peso] nos permite decir que el precio del paquete x_1 es mayor, menor o igual al precio del paquete x_2 en proporción a los pesos. La razón $\omega_1(x) : \omega_2(x)$ puede darnos el precio unitario (por ejemplo, pesetas por kilo) y es variable (el precio unitario de arroz es distinto según el tipo de arroz o marca comercial del producto). El precio unitario para los paquetes que contengan exactamente el mismo artículo es el mismo.

COMPOSICIONES

Una composición es una terna (Ω, M, ω), donde Ω es un conjunto de cosas, partes o clases de un universo, a cada una de las cuales se le asocia una magnitud o una medida en M mediante una función ω.

Aunque de las definiciones de exposiciones y composiciones pudiera pensarse que éstas son iguales, existe una diferencia entre ellas: en las exposiciones, los elementos de Ω son objetos o cosas, en un sentido primitivo, y, en las composiciones, los elementos de Ω son partes o clases de un universo.

Un ejemplo de composición puede ser una mezcla o una aleación. Consideremos un lingote constituido por una aleación de hierro, de cobre y de estaño, y se da su composición especificando la proporción de cada uno de los metales componentes del lingote total (usualmente en porcentajes). Estas situaciones se prestan bien a ser representadas por diagramas parte-todo (modelo de la tarta o del pastel).

Otro ejemplo de composiciones que se puede estudiar es el de las pirámides de población. Se considera la población entera de un país dividida en franjas de edad y para cada franja se da el número de personas que están en ella. Las razones que se consideran son las que relacionan el número de personas de una franja de edad con el número de personas de otra franja de edad. Para comparar las pirámides de población de dos países, el problema consiste en un par de composiciones (problema que estudiaremos más adelante) y en este caso se comparan las distintas columnas de dos diagramas de barras.

En los casos en los que se presentan las composiciones las razones que se consideran son razones internas.

PAREJAS DE COMPOSICIONES

Al igual que las exposiciones, las composiciones también se presentan por parejas. En este caso, el conjunto Ω de ambas está formado por elementos (componentes o clases) que se representan de la misma forma. Si se trata de mezclas o aleaciones, ambas tienen los mismos componentes y, si se trata de dos particiones, ambas están formadas por las mismas partes o clases.

Si el ejemplo es el de las pirámides de población, entonces existen dos poblaciones divididas en clases de la misma manera y Ω_1 es el conjunto de clases en una población y Ω_2 es el conjunto de clases en la otra.

Una población está dividida en seis clases según su edad y la otra población está dividida en seis clases de la misma forma. Entonces Ω_1 será el conjunto $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ y Ω_2 será el conjunto $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$. Aparentemente los conjuntos Ω_1 y Ω_2 son iguales, pero sus elementos (las clases), aunque tienen la misma representación, no tienen por qué ser iguales. La diferencia no está en las clases sino en el "tamaño" de cada una de ellas o en la frecuencia de cada clase.

Consideremos las composiciones $(\Omega_1, M_1, \omega_1)$ y $(\Omega_2, M_2, \omega_2)$, donde las funciones ω_1 y ω_2 asocian a cada clase el número de personas, y la aplicación

j, definida de manera que a un elemento de Ω_1 le hace corresponder otro que tiene la misma representación en Ω_2.

$$\begin{aligned} j :& \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2 \\ & x_i \longmapsto j(x_i) = x_i \end{aligned}$$

Entonces se puede definir, de forma natural, la función f entre M_1 y M_2 tal que

$$f \circ \omega_1 = \omega_2 \circ j$$

es decir, la función que hace conmutativo el diagrama siguiente.

$$\begin{tikzcd} \Omega_1 \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\omega_1"'] & \Omega_2 \arrow[d, "\omega_2"] \\ M_1 \arrow[r, "f"] & M_2 \end{tikzcd}$$

Dicho de otra manera, cualquiera que sea x de Ω_1, la imagen por f de este elemento en M_1 por ω_1 se corresponde con la imagen por j del mismo elemento en M_2 por ω_2:

$$\forall x \in \Omega_1 : f[\omega_1(x)] = \omega_2[j(x)]$$

Sean x_1 y x_2 dos clases de población, entonces:

$$\begin{aligned} & \quad f \\ \omega_1(x_1) & \longmapsto \omega_2[j(x_1)] \\ \omega_1(x_2) & \longmapsto \omega_2[j(x_2)] \end{aligned}$$

Si hacemos la comparación de las razones internas:

$$\omega_1(x_2) \text{ es a } \omega_1(x_1) \text{ como } \omega_2[j(x_2)] \text{ es a } \omega_2[j(x_1)]$$

Como j es una aplicación que a un elemento de Ω_1 le hace corresponder otro que tiene la misma representación en Ω_2, podremos decir que en Ω_1 hay más, igual, menos elementos de la clase x_2 que los que tiene x_1 en proporción a los elementos de las clases x_2 y x_1 que hay en Ω_2.

En el ejemplo, las razones internas expresan la relación del número de personas de una franja de edad con el número de personas de otra franja de edad:

$$\omega_1(x_1) : \omega_1(x_6) \text{ comparada con } \omega_2(x_1) : \omega_2(x_6)$$

y se puede decir que la población menor de 20 años en un país es menor, igual o mayor que en el otro en proporción a la población de mayores de 60 años. Si todas las razones internas consideradas en un país son iguales a sus correspondientes en el otro, diremos que las dos distribuciones de población son iguales y que la función f conserva las razones internas.

Para ver otro ejemplo de par de composiciones consideremos un par de aleaciones o mezclas con los mismos componentes. Tomamos dos aleaciones de dos metales. Los componentes de cada una de ellas forman dos conjuntos $\Omega_1 = \{\text{cobre, zinc}\}$ y $\Omega_2 = \{\text{cobre, zinc}\}$ y las funciones ω_1 y ω_2 asocian a cada elemento de cada conjunto su masa. Como los conjuntos de componentes son iguales podemos considerar la función j entre Ω_1 y Ω_2, tal que a cada elemento de Ω_1 le hace corresponder el mismo en Ω_2. Podría pensarse que la función j es una identidad, pero no lo es ya que lo que relaciona no es 'cobre con cobre' o 'zinc con zinc' sino que permite asociar 'masa de cobre en Ω_1 con masa de cobre en Ω_2' y 'masa de zinc en Ω_1 con masa de zinc en Ω_2' con lo que j permanece inactiva mientras que no actúe ω_1 o ω_2.

Si lo que hacemos son comparaciones de razones internas, usaremos expresiones como "En la aleación Ω_1 hay más, menos o igual cobre que zinc en proporción al cobre y zinc que hay en la otra aleación Ω_2".

En general, para cualquier tipo de aleación la razón externa $\omega_1(x) : \omega_2(x)$ puede variar, y, si la razón $\omega_1(x) : \omega_2(x)$ es constante, entonces se trata de la "misma" aleación.

Para la visualización de este tipo de situaciones, par de composiciones, puede hacerse su representación por medio de diagramas de sectores.

La presencia de las composiciones en los trabajos de investigación de razón y proporción es muy notoria desde que Noelting (1980) presentara su serie de problemas de comparación cualitativa de dos mezclas (jarabe de naranja y agua). En el trabajo de Fernández (2001), se consideran tareas de este tipo, tanto en los cuestionarios como en las entrevistas clínicas con enseñanza, y se ha diseñado una serie de problemas, denominados "refrescos" (ver capítulos 3 y 4), en la que los alumnos han de resolverlos mediante una comparación cualitativa -por ejemplo, con expresiones como "el refresco A tiene más, menos o igual sabor a naranja que el refresco B".

CONSTRUCTOS

Consideremos un barco del que se ha hecho un modelo reducido, o un país y su mapa a una cierta escala, o una foto o un dibujo de los que se ha hecho una ampliación. En cada uno de estos casos, se obtiene la distancia entre dos puntos cualquiera del segundo objeto (el modelo reducido, el mapa, la ampliación), multiplicando por un mismo operador la distancia entre dos puntos homólogos del objeto de salida. El operador en cuestión se llama "factor de escala" (del modelo reducido o del mapa o de la ampliación). En este tipo de situaciones es donde se ve cómo un operador funciona con parejas repetidas (parejas de puntos que tienen la misma distancia).

En las situaciones anteriores un conjunto de magnitudes se pone en correspondencia con otro mediante una ley (por ejemplo la semejanza) que puede o no estar acompañada por la constante de la razón entre las magnitudes correspondientes.

Freudenthal (1983) define un constructo como un conjunto Ω basado en una estructura fuerte Σ (preferentemente geométrica) con una función ω de medida. Al par o sistema (Ω, ω) lo llama constructo o Σ–constructo, si Σ es la estructura en la que se basa.

Parejas de constructos

Como en los casos anteriores los constructos también se presentan por parejas (Ω_1, ω_1) y (Ω_2, ω_2) y puede ocurrir que $\Omega_1 = \Omega_2$ y que $\omega_1 = \omega_2$.

Consideremos el caso de las escalas o semejanza entre dos figuras planas.

Ω_1 es el conjunto de pares de puntos de una figura plana Σ_1

Ω_2 es el conjunto de pares de puntos de una figura plana Σ_2

$\omega_1 : \Omega_1 \to \mathbb{R}^+$ y $\omega_2 : \Omega_2 \to \mathbb{R}^+$ son las funciones distancia correspondientes

Además, la semejanza establece una función h de la figura Σ_1 en Σ_2, que se extiende de forma natural a una aplicación $\hat{h}$ de Ω_1 en Ω_2, de forma que cualesquiera sea $\alpha = (p1, p2)$ de Ω_1 se cumple que

$$\hat{h}(\alpha) = [(p_1, p_2)] = (h(p_1), h(p_2)) \text{ donde } p_1, p_2 \in \Sigma_1$$

Ahora, también de forma natural –al igual que hemos hecho en exposiciones y composiciones–, podemos definir una función f entre los espacios de medida $M_1(\mathbb{R}^+)$ y $M_2(\mathbb{R}^+)$ de manera que

$$f \circ \omega_1 = \omega_2 \circ \hat{h} \text{ o bien } f = \omega_2 \circ \hat{h} \circ \omega_1^{-1}$$

La función h hace corresponder puntos de Σ_1 con puntos de Σ_2.

La función $\hat{h}$ hace corresponder elementos de Ω_1, o sea pares de puntos de Σ_1, con elementos de Ω_2, que son pares de puntos de Σ_2 que se corresponden por h con los considerados de Σ_1.

La función f hace corresponder distancias entre pares de puntos de Σ_1 con distancias entre pares de puntos de Σ_2 que se corresponden por h.

Veamos las relaciones entre las funciones en el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_1 \arrow[r, "h"] & \Sigma_2 \\
\Omega_1 \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\omega_1"'] & \Omega_2 \arrow[d, "\omega_2"] \\
M_1(\mathbb{R}^+) \arrow[r, "f"] & M_2(\mathbb{R}^+)
\end{tikzcd}$$

De la misma manera que sucedía con el movimiento uniforme, la semejanza se puede caracterizar en primer lugar mediante la condición: $\hat{h}$ hace corresponder pares de puntos que tienen la misma distancia entre sí con pares de puntos que tienen la misma distancia entre sí, es decir, $\hat{h}$ conserva la igualdad de distancias.

Otra formulación equivalente sería: h hace corresponder pares de figuras congruentes entre sí con pares de figuras congruentes entre sí, o bien se puede expresar como "h conserva la congruencia".

Esta formulación no implica aún la razón, pero, bajo la condición –natural– de continuidad, es equivalente a $\hat{h}$ conserva las razones, esto es:

$$\begin{array}{rlrl} \omega_1 : \Omega_1 \longrightarrow & \mathbb{R}^+ & \omega_2 : \ \Omega_2 \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \alpha \longmapsto & \omega_1(\alpha) & \hat{h}(\alpha) \longmapsto & \omega_2[\hat{h}(\alpha)] \\ \beta \longmapsto & \omega_1(\beta) & \hat{h}(\beta) \longmapsto & \omega_2[\hat{h}(\beta)] \end{array}$$

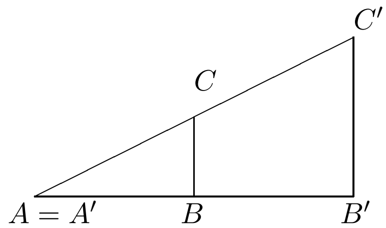
$$\omega_2[\hat{h}(\alpha)] : \omega_2[\hat{h}(\beta)] :: \omega_1(\alpha) : \omega_1(\beta) \qquad (\alpha, \beta \in \Omega_1)$$

Lo cual nos indica la conservación de razones internas, tomadas respectivamente en Ω_1 y Ω_2.

Igual que en el movimiento uniforme, en el caso de las magnitudes, el que h sea una semejanza puede expresarse mediante la constancia de razones externas:

$$\omega_2[\hat{h}(\alpha)] : \omega_1(\alpha) :: \omega_2[\hat{h}(\beta)] : \omega_1(\beta) \qquad (\alpha, \beta \in \Omega_1)$$

Veamos un ejemplo concreto. Si tomamos como Σ_1 el conjunto de puntos del triángulo ABC y como Σ_2 el conjunto de puntos del triángulo $A'B'C'$, la visualización de una pareja de Σ–constructos puede hacerse mediante una homotecia de centro A que transforma un triángulo en el otro. En este caso Ω_1 es el conjunto de pares de puntos del triángulo ABC y Ω_2 el conjunto de pares de puntos del triángulo $A'B'C'$.



La función h es la homotecia de centro A y razón $A'C'/AC$.

Al elemento $\alpha = (A, B)$ le corresponde $\hat{h}(\alpha) = (A', B')$,

al elemento $\beta = (A, C)$ le corresponde $\hat{h}(\beta) = (A', C')$ y al elemento $\gamma = (C, B)$ le corresponde $\hat{h}(\gamma) = (C', B')$

Las funciones distancia las expresaremos por:

$$\omega_1(\alpha) = d(A, B) \text{ y } \omega_1(\beta) = d(A, C)$$

$$\omega_2[\hat{h}(\alpha)] = d(A', B') \text{ y } \omega_2[\hat{h}(\beta)] = d(A', C')$$

La conservación de las razones internas en el Σ_1–constructo y en el Σ_2–constructo se expresaría por:

$$d(A, B) : d(A, C) :: d(A', B') : d(A', C')$$

y la constancia de las razones externas entre el Σ_1–constructo y el Σ_2–constructo se expresaría por:

$$\omega_2[\hat{h}(A, B)] : \omega_1(A, B) :: \omega_2[\hat{h}(A, C)] : w\omega_1(A, C)$$

$$\omega_2[A', B'] : \omega_1(A, B) :: \omega_2[A', C')] : \omega_1(A, C)$$
$$d(A', B') : d(A, B) :: d(A', C') : d(A, C)$$

En esta última expresión se comparan las razones entre las distancias entre pares de puntos que se corresponden por $\hat{h}$.

Si introducimos la función f, que hemos definido naturalmente en la forma $f = \omega_2 \circ \hat{h} \circ \omega_1^{-1}$, entonces f asocia las distancias entre pares de puntos que se corresponden por $\hat{h}$, de modo que:

$$f[\omega_1(A, B)] = \omega_2[\hat{h}(A, B)]$$

Es decir que

$$f[\omega_1(A, B)] = \omega_2(A', B')$$

o bien

$$f[d(A, B)] = d(A', B')$$

Con lo que la conservación de las razones internas se escribe por medio de la expresión:

$$f[\omega_1(A, B)] : f[\omega_1(A, C)] :: \omega_1(A, B) : \omega_1(A, C)$$

Es decir, la razón entre las distancias entre dos pares de puntos es igual a la razón entre las distancias entre los correspondientes pares de puntos homólogos.

Y la constancia de las razones externas se escribe como:

$$f[\omega_1(A, B)] : \omega_1(A, B) :: f[\omega_1(A, C)] : \omega_1(A, C)$$

En consecuencia, la razón entre la distancia de un par de puntos y su homólogo correspondiente es la misma que la razón entre las distancias de cualquier otro par y su homólogo correspondiente.

Es decir que la función f así definida es lineal y la podemos expresar mediante la siguiente expresión simbólica:

$$f[\omega_1(A, B)] = k\omega_1(A, B)$$

ejemplificación que hemos hecho con la homotecia, pero que es igualmente válida con cualquier otra función que preserve las razones internas.

En varios trabajos de investigación relacionados con la resolución de problemas de valor perdido, por ejemplo Karplus, Karplus & Wollman (1974), Hart (1984) y Fiol y Fortuny (1990), se usan problemas en un contexto geométrico que supone la utilización de parejas de constructos. En nuestro trabajo los constructos se encuentran tanto en los cuestionarios como en las entrevistas clínicas. En el bloque de tareas que denominamos "Escalas" (ver capítulos 3 y 4 de Fernández, 2001) se ha diseñado una serie de problemas en contextos geométricos. En unos casos la estructura geométrica en la que se sustenta el problema es la línea de puntos y se da el factor de escala, como puede verse en la serie de tareas que llamamos "Muñecos". En otros la estructura geométrica es el plano de puntos, en el cual se ha resaltado una retícula cuadricular. En unos casos se dan las figuras semejantes y el factor de escala está implícito en el enunciado y en otros aparecen una figura y el factor de escala de forma explícita.

De los esquemas anteriores vemos que en los problemas de razón y proporción subyacen unos conjuntos y unas funciones que nos permiten analizarlos. De la mayor o menor complejidad de dichos esquemas, es plausible suponer que las tareas en las que hay que comparar dos exposiciones serán más sencillas que las tareas en las que hay que comparar dos composiciones y que las tareas en contextos geométricos donde se utilicen los Σ-constructos serán las más difíciles[3]. Los datos obtenidos en el trabajo (ver el capítulo quinto de Fernández, 2001) sustentan dicha hipótesis.

REFERENCIAS

[1] EUCLIDES; *Elementos. Libros V-IX.* Traducción y notas de María Luisa Puertas Castaños. Editorial Gredos, Madrid. 1994.

[2] A. FERNÁNDEZ; B. GÓMEZ; O. FIGUERAS; J. MARGARIT; L. PUIG; O. MONZÓ; E. RUIZ; *Estudio en la escuela primaria sobre competencias vinculadas a la razón y*

[3]Tanto es así que en la revisión de la bibliografía que se hace en el capítulo primero del mencionado trabajo (Fernández, 2001) los problemas geométricos apenas están presentes en las investigaciones llevadas a cabo sobre lo que se ha denominado razonamiento proporcional.

la proporción. Documento interno. Departament de Didàctica de la Matemàtica. Universitat de València. 1998.

[3] A. Fernández; *Precursores del razonamiento proporcional. Un estudio con alumnos de primaria.* Tesis doctoral. Universitat de València. 2001.

[4] M.L. Fiol; J.M. Fortuny; *Proporcionalidad directa. La forma y el número.* Síntesis, Madrid. 1990

[5] E. Filloy y cols; *Aspectos teóricos del álgebra educativa.* Grupo Editorial Iberoamérica, México, DF. 1999.

[6] H. Freudenthal; *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* D. Reidel, Dordrecht. 1983.

[7] Generalitat Valenciana; *Diseño Curricular. Enseñanza Primaria.* Colección: Diseños curriculares de la Comunidad Valenciana, Consellería de Cultura, Educación y Ciencia, Valencia. 1990.

[8] Generalitat Valenciana; *Diseño Curricular. Secundaria Obligatoria. Área de Matemáticas.* Colección: Diseños curriculares de la Comunidad Valenciana, Consellería de Cultura, Educación y Ciencia, Valencia. 1990.

[9] H. Gómez; *Indicios del pensamiento proporcional. Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio.* Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV, México, DF. 1996.

[10] K. M. Hart; *Ratio: Children's Strategies and Errors. A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project.* Nefer-Nelson, Windsor. 1984.

[11] E. Jimenez de la Rosa; *De la lectura del error a una interpretación de los saberes de los niños. Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio.* Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV, México, DF. 1996.

[12] J.J. Kaput; *Quantity Structure of Algebra Word Problems: A Preliminary Analysis.* Southeastern Massachusetts University, manuscrito.1986.

[13] R. Karplus; E. Karplus; E. Wollman; *Intellectual Development beyond Elementary School. IV: Ratio, the Influence of Cognitive Style.* School Science and Mathematics, vol. 74, pp. 476-482. 1974.

[14] M. E. C.; *Diseño Curricular Base. Educación Primaria.* Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid. 1989.

[15] M. E. C.; *Diseño Curricular Base. Educación Secundaria Obligatoria, I y II.* Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid. 1989.

[16] E. Muñoz; *Pensamiento relacional en una etapa de transición. Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio.* Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV. México, DF. 1996.

[17] G. NOELTING; *The Development of Proportional Reasoning and the Ratio Concept: Part I- Differentiation of Stages*. Educational Studies in Mathematics, vol. 11, pp. 217-253. 1980.

[18] L. PUIG; F. CERDÁN; *Problemas aritméticos escolares*. Síntesis, Madrid. 1988.

[19] L. PUIG; *Análisis fenomenológico*, en Rico (coord.), La Educación Matemática en la Enseñanza secundaria, ICE/Horsori, Barcelona, págs. 61-94. 1997.

[20] J.L. SCHWARTZ; *Intensive Quantity and Referent Transforming Arithmetic Operations.* MIT, Cambridge, manuscrito. 1986.

[21] G. VERGNAUD; *Multiplicative Structures* en R. Lesh and M. Landau (eds.), Acquisition of Mathematic Concepts and Processes, Academic press, New York. 1983.

Alejandro Fernández Lajusticia
Luis Puig
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universitat de València
correo electrónico: `Alejandro.Fernandez@uv.es`, `Luis.Puig@uv.es`