Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri Ramírez y Emilio Fernández Moral

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Madre de Dios 53, 26006, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 31 de octubre de 2019.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco ($\star$) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Sobre los responsables de esta sección

En este número se produce un cambio en los responsables de la sección de Problemas y Soluciones de La Gaceta de la RSME. El profesor José Luis Díaz Barrero, que ha formado parte del equipo de redacción de esta sección desde sus inicios en el año 2004, deja sus responsabilidades aquí para centrarse en otras de sus actividades. Muchas gracias, José Luis, por el gran trabajo de estos años. Emilio Fernández Moral, que ha colaborado frecuentemente en la redacción de la sección, pasa ahora a ser uno de los responsables de la misma; el responsable más veterano, así como los directores de La Gaceta de la RSME, le deseamos mucha suerte en su nuevo cometido.

Problemas

Problema 361. *Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, y Ángel Plaza de la Hoz, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Las Palmas.*

Sean F_n y L_n los números de Fibonacci y los números de Lucas, respectivamente.

Probar que, para cada entero positivo n, se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} F_n^{1/L_n} \leq F_{2n}^{1/(2L_n)} \leq \frac{F_n^{1/L_n} + L_n^{1/L_n}}{2} &\leq \frac{F_n^{1/F_n} + L_n^{1/L_n}}{2} \\ &\leq F_{2n}^{1/(2F_n)} \leq \frac{F_n^{1/F_n} + L_n^{1/F_n}}{2} \leq L_n^{1/F_n}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 362. *Propuesto por Cornel Ioan Vălean, Teremia Mare, Timiş, Rumanía.*

Evaluar la integral

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{x \cot x - y \cot y}{\cos x - \cos y}\, dx\, dy.$$

PROBLEMA 363. *Propuesto por Pedro H. O. Pantoja, Universidade Federal de Campina Grande, Paraiba, Brasil.*

Determinar las soluciones reales del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{3}{y} = \log_3(6y - x^2), \\ \frac{y}{3} + \frac{3}{z} = \log_3(6z - y^2), \\ \frac{z}{3} + \frac{3}{x} = \log_3(6x - z^2). \end{cases}$$

PROBLEMA 364. *Propuesto por Pablo Fernández Refolio, Madrid.*

Probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(5n+4)}{n(n+1)^3} \frac{(2n)!^2}{16^n n!^4} = \frac{32}{\pi} - 9.$$

PROBLEMA 365. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.*

Sea A, B y C, respectivamente, los afijos de un cierto número complejo z y de sus raíces cuadradas. Determinar el lugar geométrico del afijo A en los siguientes casos:

a) Cuando el triángulo ABC sea isósceles.

b) Cuando el triángulo ABC sea rectángulo con el ángulo recto en el vértice A.

Problema 366. *Propuesto por Daniel Sitaru, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Si denotamos $H_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$, probar que, para cada $a > 1$,

$$\frac{1}{H_n} \int_1^a \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k + x^{2k}}\, dx < 1 - \frac{1}{a}.$$

Problema 367. *Propuesto por Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Logroño, La Rioja.*

Sobre cada uno de los lados de un triángulo ABC y hacia el exterior del triángulo, construimos un cuadrado. Sean P_A, P_B y P_C, respectivamente, los centros de los cuadrados construidos sobre BC, CA y AB. Probar que

$$\frac{[P_A P_B P_C]}{[ABC]} = 1 + \frac{\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma}{2},$$

donde α, β y γ son, respectivamente, los ángulos $\angle CAB$, $\angle ABC$ y $\angle BCA$, y $[XYZ]$ denota el área del triángulo XYZ.

Problema 368. *Propuesto por Yagub N. Aliyev, ADA University, Baku, Azerbaiyán.*

Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivables y tales que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y

$$f(x+y) \geq 2^x f(y) + f(x), \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Soluciones

Problema 337 (conmemorativo del «Pi day 2018»). *Propuesto por Larry Glasser, Clarkson University, Potsdam, Nueva York, EE.UU.*

Probar que

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) e^{\pi\cos x} \cos\bigl(\pi(x - \operatorname{sen} x)\bigr) \frac{dx}{x} = \frac{\pi^{[\pi]}}{[\pi]!},$$

donde $[x]$ denota la parte entera de x.

Solución enviada por A. Stadler, Herrliberg, Suiza.

La prueba será consecuencia del siguiente resultado.

LEMA. *Sean* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *y* $R > 0$. *Entonces,*

$$\left| \int_{-R}^{R} \frac{e^{iax} - 1}{x} \, dx - \operatorname{sgn}(a) i\pi \right| \le \frac{2}{|a|R}.$$

PRUEBA DEL LEMA. Consideramos $a > 0$, ya que el caso $a < 0$ se sigue de ese mediante un sencillo cambio de variable. Tomamos, en el plano complejo, el camino de integración $\gamma_{R,T} = [-R, R] \cup [R, R + iT] \cup [R + iT, -R + iT] \cup [-R + iT, -R]$, con $T > 0$, recorrido en sentido positivo. Por ser

$$\int_{\gamma_{R,T}} \frac{e^{iaz} - 1}{z} \, dz = 0,$$

se deduce que

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{R} \frac{e^{iax} - 1}{x} \, dx &= \int_{-R}^{-R+iT} \frac{e^{iax} - 1}{x} \, dx + \int_{-R+iT}^{R+iT} \frac{e^{iax} - 1}{x} \, dx + \int_{R+iT}^{R} \frac{e^{iax} - 1}{x} \, dx \\ &= i\pi + \int_{-R}^{-R+iT} \frac{e^{iax}}{x} \, dx + \int_{-R+iT}^{R+iT} \frac{e^{iax}}{x} \, dx + \int_{R+iT}^{R} \frac{e^{iax}}{x} \, dx. \end{aligned}$$

Ahora, haciendo tender T a infinito, se llega a la identidad

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{iax} - 1}{x} \, dx = i\pi + ie^{-iaR} \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-ax}}{ix - R} \, dx - ie^{iaR} \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-ax}}{ix + R} \, dx,$$

y observando que

$$\left| \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-ax}}{ix - R} \, dx \right| \le \frac{1}{R} \int_{0}^{\infty} e^{-ax} \, dx = \frac{1}{aR}$$

concluimos la prueba. $\square$

Para evaluar la integral propuesta en el problema, comenzamos escribiendo

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) e^{\pi \cos x} \cos\bigl(\pi(x - \operatorname{sen} x)\bigr) &= \frac{1}{4i} \left(e^{ix/2} - e^{-ix/2}\right) e^{\pi \cos x} \left(e^{i\pi x - i\pi \operatorname{sen} x} + e^{-i\pi x + i\pi \operatorname{sen} x}\right) \\ &= \frac{f(x) - f(-x)}{4i}, \end{aligned}$$

siendo

$$f(x) = e^{\pi e^{ix}} \left(e^{ix(-\pi+1/2)} - e^{-ix(\pi+1/2)}\right).$$

Así, para $R > 0$,

$$\begin{aligned}
I_R &:= \frac{2}{\pi}\int_0^R \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) e^{\pi\cos x}\cos\bigl(\pi(x-\operatorname{sen} x)\bigr)\frac{dx}{x} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_0^R f(x)\frac{dx}{x} - \int_0^R f(-x)\frac{dx}{x}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^R f(x)\frac{dx}{x} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\pi^k}{k!}\int_{-R}^R \left(e^{ix(-\pi+1/2)} - e^{-ix(\pi+1/2)}\right)\frac{dx}{x},
\end{aligned}$$

donde en el último paso hemos sustituido el desarrollo de Taylor

$$e^{\pi e^{ix}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\pi^k}{k!}e^{ikx}.$$

Ahora, usando el lema y observando que $\operatorname{sgn}(-\pi + 1/2 + k) = \operatorname{sgn}(-\pi - 1/2 + k)$ para todo entero $k \neq 3$, deducimos que

$$\begin{aligned}
I_R &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\pi^k}{k!}\left(\operatorname{sgn}\left(-\pi+\frac{1}{2}+k\right) - \operatorname{sgn}\left(-\pi-\frac{1}{2}+k\right)\right) + O\left(\frac{1}{R}\right) \\
&= \frac{\pi^3}{3!} + O\left(\frac{1}{R}\right),
\end{aligned}$$

de donde se concluye el resultado propuesto haciendo tender R a infinito.

También resuelto por P. Perfetti y el proponente.

Problema 338. *Propuesto por Daniel Sitaru, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Sean m_a, m_b, m_c y a, b, c las longitudes de las medianas y los lados, respectivamente, de un triángulo ABC. Si S denota el doble del área de dicho triángulo, probar que

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{m_a^2}{m_b^2}+\frac{m_b^2}{m_c^2}+\frac{m_c^2}{m_a^2}\right)\left(\frac{m_a^4}{m_b^4}+\frac{m_b^4}{m_c^4}+\frac{m_c^4}{m_a^4}\right)\left(\frac{m_a^8}{m_b^8}+\frac{m_b^8}{m_c^8}+\frac{m_c^8}{m_a^8}\right) \\
&\qquad\qquad \geq S^3\left(\frac{1}{am_b}+\frac{1}{bm_c}+\frac{1}{cm_a}\right)^3.
\end{aligned}$$

Nota. En el enunciado original aparecía la fracción $\frac{1}{cm_a^2}$ en lugar de la correcta $\frac{1}{cm_a}$. En todas las soluciones recibidas se ha observado este hecho explícita o tácitamente.

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Para $n \geq 1$, procederemos a probar la cadena de desigualdades

$$\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{m_a^{2^k}}{m_b^{2^k}} + \frac{m_b^{2^k}}{m_c^{2^k}} + \frac{m_c^{2^k}}{m_a^{2^k}} \right) \geq \left(\frac{m_a}{m_b} + \frac{m_b}{m_c} + \frac{m_c}{m_a} \right)^n \geq S^n \left(\frac{1}{am_b} + \frac{1}{bm_c} + \frac{1}{cm_a} \right)^n, \tag{1}$$

donde las igualdades se cumplen si y solo si ABC es un triángulo equilátero.

La prueba de la primera desigualdad en (1) se deduce usando que

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}, \tag{2}$$

con igualdad si y solo si $x = y = z$, que es una sencilla aplicación de la desigualdad entre las medias cuadrática y aritmética y la de las medias aritmética y geométrica. En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} &\geq \frac{1}{3} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right)^2 \\ &\geq \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right) \sqrt[3]{\frac{x}{y}\frac{y}{z}\frac{z}{x}} = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}. \end{aligned}$$

Veamos ahora, por inducción en k, que para cada entero $k \geq 1$ se cumple la desigualdad

$$\frac{m_a^{2^k}}{m_b^{2^k}} + \frac{m_b^{2^k}}{m_c^{2^k}} + \frac{m_c^{2^k}}{m_a^{2^k}} \geq \frac{m_a}{m_b} + \frac{m_b}{m_c} + \frac{m_c}{m_a}, \tag{3}$$

con igualdad si y solo si ABC es un triángulo equilátero. El caso $k = 1$ es evidente tomando $x = m_a$, $y = m_b$ y $z = m_c$ en (2). Además, en ese caso la igualdad se cumple si y solo si ABC es un triángulo equilátero. Supongamos que (3) se cumple para un cierto valor k y veamos que también se verifica para $k+1$. Aplicando, sucesivamente, (2) con $x = m_a^{2^k}$, $y = m_b^{2^k}$ y $z = m_c^{2^k}$ y (3), tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{m_a^{2^{k+1}}}{m_b^{2^{k+1}}} + \frac{m_b^{2^{k+1}}}{m_c^{2^{k+1}}} + \frac{m_c^{2^{k+1}}}{m_a^{2^{k+1}}} &= \frac{(m_a^{2^k})^2}{(m_b^{2^k})^2} + \frac{(m_b^{2^k})^2}{(m_c^{2^k})^2} + \frac{(m_c^{2^k})^2}{(m_a^{2^k})^2} \\ &\geq \frac{m_a^{2^k}}{m_b^{2^k}} + \frac{m_b^{2^k}}{m_c^{2^k}} + \frac{m_c^{2^k}}{m_a^{2^k}} \geq \frac{m_a}{m_b} + \frac{m_b}{m_c} + \frac{m_c}{m_a}, \end{aligned}$$

donde la igualdad se alcanza si y solo si ABC es un triángulo equilátero. Esto concluye la prueba de (3). De este modo, la primera de las desigualdades de (1) se obtiene multiplicando las desigualdades en (3) para $k = 1, \ldots, n$.

Ahora, como $S = ah_a$, donde h_a es la altura del triángulo ABC desde el vértice A, y se cumple $h_a \leq m_a$, con igualdad si y solo si $b = c$, se tiene

$$\frac{S}{am_b} = \frac{h_a}{m_b} \leq \frac{m_a}{m_b}$$

y, por analogía,

$$S\left(\frac{1}{am_b}+\frac{1}{bm_c}+\frac{1}{cm_a}\right)\leq\frac{m_a}{m_b}+\frac{m_b}{m_c}+\frac{m_c}{m_a},$$

con igualdad si y solo si ABC es un triángulo equilátero, lo que prueba la segunda desigualdad de (1).

Es claro que la desigualdad propuesta se corresponde con el caso $n=3$ de (1).

También resuelto por L. Giugiuc, J. Nadal, A. Stadler, U. Ursărescu y el proponente.

Problema 339. *Propuesto por Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.*

Demostrar que la distancia entre dos puntos interiores cualesquiera de un tetraedro está acotada superiormente por la mayor de las longitudes de sus aristas.

Solución enviada por Jesús Gómez Ayala, Universidad del País Vasco, Leioa, Vizcaya.

Un tetraedro $\mathbf{T}$ es la envolvente convexa de cuatro puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 en $\mathbb{R}^3$, no coplanarios y tales que no hay tres de ellos alineados. Dado un punto $P\in\mathbf{T}$, se dice que P es *extremal* si no existen puntos $U,V\in\mathbf{T}$, $U\neq V$, tales que $P=(U+V)/2$. Es inmediato que si $P\in\mathbf{T}$ es un punto interior del tetraedro, de cualquiera de sus caras o de cualquiera de sus aristas, entonces P no es extremal. De modo que si $P\in\mathbf{T}$ es extremal, entonces $P=P_i$ para algún i, $1\leq i\leq 4$.

Sean Q y R dos puntos de $\mathbf{T}$ tales que la distancia entre ellos, $d(Q,R)$, sea maximal (tales parejas de puntos existen por ser $\mathbf{T}$ compacto). Entonces Q y R son extremales. En efecto, si por ejemplo Q no lo fuera, existirían $U,V\in\mathbf{T}$, $U\neq V$, tales que $Q=(U+V)/2$ y entonces, por la ley del paralelogramo (en un plano que contenga a R, U y V), se tiene

$$2d(Q,R)^2=d(U,R)^2+d(V,R)^2-\frac{1}{2}d(U,V)^2,$$

y esto prueba, al ser $d(U,V)>0$, que $d(U,R)>d(Q,R)$ o $d(V,R)>d(Q,R)$, y en cualquier caso llegamos a una contradicción. Así pues, la distancia entre cualesquiera dos puntos del tetraedro $\mathbf{T}$ está acotada superiormente por $\max_{1\leq i<j\leq 4}d(P_i,P_j)$, es decir, por la longitud de la mayor de las seis aristas de $\mathbf{T}$.

También resuelto por C. Beade, M. A. Díaz, J. Nadal, A. Stadler y el proponente.

Problema 340. *Propuesto por Ángel Plaza de la Hoz, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Las Palmas.*

Sean $a_1,\dots,a_n$ números reales positivos y m un número real mayor que uno. Demostrar las desigualdades

$$\begin{aligned}\frac{1}{n-1}\sum_{\text{cíclica}}\frac{a_2+\cdots+a_n}{a_1+m\,(a_2+\cdots+a_n)}&\leq\frac{n}{n+(m-1)(n-1)}\\&\leq\sum_{\text{cíclica}}\frac{a_1}{a_1+m\,(a_2+\cdots+a_n)}.\end{aligned}$$

Solución enviada por Alberto Stadler, Herrliberg, Suiza.

Consideramos las funciones

$$f(x) = \frac{s-x}{x+m(s-x)} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{x}{x+m(s-x)},$$

donde $s = a_1 + \cdots + a_n$ y $x \in [0, s]$. Es claro que

$$f''(x) = -\frac{2s(m-1)}{(x+m(s-x))^3} \leq 0 \qquad \text{y} \qquad g''(x) = \frac{2sm(m-1)}{(x+m(s-x))^3} \geq 0,$$

para $x \in [0, s]$ y, por tanto, f es cóncava en $[0, s]$ y g es convexa en el mismo intervalo.

Así, por la desigualdad de Jensen se verifica que

$$\frac{1}{n} \sum_{\text{cíclica}} \frac{a_2 + \cdots + a_n}{a_1 + m\,(a_2 + \cdots + a_n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a_i) \leq f\left(\frac{s}{n}\right) = \frac{n-1}{1+m(n-1)},$$

que es equivalente a la primera desigualdad del enunciado, y

$$\frac{1}{n} \sum_{\text{cíclica}} \frac{a_1}{a_1 + m\,(a_2 + \cdots + a_n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(a_i) \geq g\left(\frac{s}{n}\right) = \frac{1}{1+m(n-1)},$$

que se corresponde con la segunda de las desigualdades propuestas.

Solución enviada por Neculai Stanciu, "George Emil Palade" Secondary School, Buzău, Rumanía, y Titu Zvonaru, Comăneşti, Rumanía.

Por la desigualdad de Cauchy deducimos fácilmente que

$$s^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$

donde $s = a_1 + \cdots + a_n$. A partir de este hecho, usando la desigualdad de Bergström (ver la nota posterior), podemos probar la segunda desigualdad del enunciado. En efecto,

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{cíclica}} \frac{a_1}{a_1 + m\,(a_2 + \cdots + a_n)} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_i^2 + m\,(sa_i - a_i^2)} \\
&\geq \frac{s^2}{ms^2 + (1-m)\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \\
&\geq \frac{s^2}{ms^2 + \frac{(1-m)s^2}{n}} = \frac{n}{n+(m-1)(n-1)}.
\end{aligned}$$

Y ahora, usando la desigualdad probada y la identidad

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n-1} \sum_{\text{cíclica}} \frac{a_2 + \cdots + a_n}{a_1 + m\,(a_2 + \cdots + a_n)} \\
&\qquad = \frac{1}{m(n-1)} \left(n - \sum_{\text{cíclica}} \frac{a_1}{a_1 + m\,(a_2 + \cdots + a_n)} \right),
\end{aligned}$$

podemos deducir la primera desigualdad del enunciado.

Nota. Recordemos que la desigualdad de Bergström establece que

$$\frac{x_1^2}{a_1}+\cdots+\frac{x_n^2}{a_n}\geq\frac{(x_1+\cdots+x_n)^2}{a_1+\cdots+a_n},$$

donde $x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$ y $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}^+$. Su demostración es una aplicación sencilla de la desigualdad de Cauchy.

También resuelto por J. Nadal, P. Perfetti y los proponentes.

Problema 341. *Propuesto por Ovidiu Furdui, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Evaluar la suma

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\big(2^n\left(\zeta(n)-1\right)-1\big),$$

donde ζ denota la función zeta de Riemann.

Solución enviada por Jaime Vinuesa Tejedor, Universidad de Cantabria, Santander.

Notemos en primer lugar que

$$2^n\left(\zeta(n)-1\right)-1=2^n\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^n}-1=\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{2}{k}\right)^n.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\big(2^n\left(\zeta(n)-1\right)-1\big)&=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=3}^{\infty}(n-1)\left(\frac{2}{k}\right)^n=\sum_{k=3}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\left(\frac{2}{k}\right)^n\\&=\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\left(\frac{2}{k}\right)^2}{\left(1-\frac{2}{k}\right)^2}=4\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{(k-2)^2}=4\zeta(2)=\frac{2\pi^2}{3},\end{aligned}$$

donde se ha utilizado la fórmula elemental

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)x^n=\frac{x^2}{(1-x)^2},\qquad |x|<1,$$

y se ha intercambiado el orden de sumación, que puede hacerse en las series absolutamente convergentes como esta.

Tambien resuelto por G. C. Greubel, Kee-Wai Lau, J. Monterde, J. Nadal, P. Perfetti, B. Salgueiro, A. Stadler y el proponente.

PROBLEMA 342. *Propuesto por Leonard Giugiuc, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Determinar las soluciones reales del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a+b+c+d=4, \\ a^2+b^2+c^2+d^2=\dfrac{28}{3}, \\ abcd=\dfrac{1}{9}. \end{cases}$$

Solución enviada por Manuel Fernández López, I. E. S. María Sarmiento, Viveiro, Lugo.

Sea (a,b,c,d) una solución del sistema. Despejando d en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda, esta se convierte en

$$a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc+\frac{10}{3}=4s$$

donde $s=a+b+c$. Usando la identidad $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2ab-2ac-2bc$ llegamos a la ecuación

$$ab+ac+bc=s^2-4s+\frac{10}{3}. \tag{1}$$

Notemos que la tercera ecuación del sistema implica que a, b, c y d son no nulos. Por tanto, $d=4-s\neq 0$. Además, de esa misma ecuación obtenemos que

$$abc=\frac{1}{9(4-s)}. \tag{2}$$

Consideremos ahora el polinomio $p(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ cuyas raíces son a, b y c. Las fórmulas de Cardano-Vieta, teniendo en cuenta (1) y (2), permiten escribir

$$p(x)=x^3-sx^2+\left(s^2-4s+\frac{10}{3}\right)x+\frac{1}{9(4-s)}.$$

De la segunda ecuación del sistema, usando la desigualdad entre las medias cuadrática y aritmética se deduce

$$\frac{28}{3}-d^2=a^2+b^2+c^2\geq\frac{(a+b+c)^2}{3}=\frac{(4-d)^2}{3},$$

lo que implica $d^2-2d-3=(d+1)(d-3)\leq 0$ y, por tanto, $-1\leq d\leq 3$. Por supuesto, por la simetría del sistema, podemos concluir que también $-1\leq a,b,c\leq 3$.

Supongamos ahora que a, b y c son raíces distintas dos a dos del polinomio $p(x)$. Entonces, por el teorema de Rolle, $p'(x)$ debe tener dos raíces diferentes en el intervalo $(-1,3)$. Pero el discriminante del polinomio $p'(x)$ resulta ser $-8(s-1)(s-5)$ y es siempre negativo cuando $s\in(1,5)$ (notar que, como $-1\leq d\leq 3$ y $s=4-d$, se tiene $1\leq s\leq 5$), lo que supone una contradicción.

Por tanto, hemos demostrado que si (a,b,c,d) es una solución del sistema, entonces al menos dos de los valores deben ser iguales. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $c=d$. Entonces el sistema inicial es equivalente a

$$\begin{cases} a+b=4-2c, \\ a^2+b^2=\dfrac{28}{3}-2c^2, \\ ab=\dfrac{1}{9c^2}. \end{cases} \tag{3}$$

Usando la identidad $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$, obtenemos que c es raíz del polinomio $q(x)=9x^3-21x^2+3x+1$ y, teniendo en cuenta que $q(x)=(3x-1)(3x^2-6x-1)$, llegamos a que los posibles valores de c son

$$c=\frac{1}{2}, \qquad c=1-2/\sqrt{3}, \qquad \text{y} \qquad c=1+2/\sqrt{3}.$$

Resolviendo el sistema (3) con $c=1/3$ obtenemos las soluciones $(a,b)=(3,1/3)$ y $(a,b)=(1/3,3)$; con $c=1-2/\sqrt{3}$ se tiene que $a=b=1+2/\sqrt{3}$, y con $c=1+2/\sqrt{3}$ llegamos a que $a=b=1-2/\sqrt{3}$. Debido a la simetría del sistema original, si (a,b,c,d) es una solución entonces cualquier permutación de sus coordenadas también lo es. Por tanto, hemos demostrado que el sistema tiene diez soluciones reales, a saber, las permutaciones de las coordenadas de

$$\left(3,\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \qquad \text{y} \qquad \left(1+\frac{2}{\sqrt{3}},1+\frac{2}{\sqrt{3}},1-\frac{2}{\sqrt{3}},1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

También resuelto por F. D. Aranda, Kee-Wai Lau, E. Macías, J. Monterde, P. Perfetti, A. Stadler y el proponente.

Problema 343. *Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.*

Sean a, b y c tres números reales positivos tales que $a^2+b^2+c^2=1$. Probar que

$$a\sqrt[4]{\frac{b^2+1}{c^2+1}}+b\sqrt[4]{\frac{c^2+1}{a^2+1}}+c\sqrt[4]{\frac{a^2+1}{b^2+1}} \le \sqrt[4]{3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)}.$$

Solución enviada por Leonard Giugiuc, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.

Tomando las variables $x=a^2$, $y=b^2$ y $z=c^2$, de modo que $x+y+z=1$, la desigualdad propuesta es equivalente a

$$\sqrt{x}\sqrt[4]{\frac{y+1}{z+1}}+\sqrt{y}\sqrt[4]{\frac{z+1}{x+1}}+\sqrt{z}\sqrt[4]{\frac{x+1}{y+1}} \le \sqrt[4]{3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)}. \tag{1}$$

Usando la desigualdades de Cauchy y Jensen (notar que $\sqrt{t}$ es una función cóncava en $(0,\infty)$), tenemos que

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{x}\sqrt[4]{\frac{y+1}{z+1}}+\sqrt{y}\sqrt[4]{\frac{z+1}{x+1}}+\sqrt{z}\sqrt[4]{\frac{x+1}{y+1}}\right)^2\\&\qquad\leq (x+y+z)\left(\sqrt{\frac{y+1}{z+1}}+\sqrt{\frac{z+1}{x+1}}+\sqrt{\frac{x+1}{y+1}}\right)\\&\qquad=\sqrt{\frac{y+1}{z+1}}+\sqrt{\frac{z+1}{x+1}}+\sqrt{\frac{x+1}{y+1}}\\&\qquad\leq\sqrt{3\left(\frac{y+1}{z+1}+\frac{z+1}{x+1}+\frac{x+1}{y+1}\right)}.\end{aligned}$$

Así, (1) se sigue si probamos que

$$\frac{y+1}{z+1}+\frac{z+1}{x+1}+\frac{x+1}{y+1}\leq\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}. \tag{2}$$

Es conocido (ver nota final) que si u, v y w son números reales positivos, se verifica la desigualdad

$$\frac{u+v}{v+w}+\frac{v+w}{w+u}+\frac{w+u}{u+v}\leq\frac{u}{v}+\frac{v}{w}+\frac{w}{u}. \tag{3}$$

Entonces, aplicando dos veces (3) y la condición $x+y+z=1$, deducimos (2). En efecto,

$$\begin{aligned}&\frac{y+1}{z+1}+\frac{z+1}{x+1}+\frac{x+1}{y+1}\\&\qquad=\frac{(x+y)+(y+z)}{(y+z)+(z+x)}+\frac{(y+z)+(z+x)}{(z+x)+(x+y)}+\frac{(z+x)+(x+y)}{(x+y)+(y+z)}\\&\qquad\leq\frac{x+y}{y+z}+\frac{y+z}{z+x}+\frac{z+x}{x+y}\\&\qquad\leq\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}.\end{aligned}$$

NOTA. La desigualdad (3) aparece propuesta como Problema 69 en el libro *Inequalities. An Approach Through Problems*, de B. J. Venkatachala, editado por Hindustan Book Agency (India) en 2009, asociado a la fase de selección de los participantes del equipo indio para la Olimpiada Matemática Internacional del año 2002. Como ha quedado patente, el uso de (3) hace que la solución al Problema 343 se haya podido obtener de una manera muy elegante. Sin embargo, por completitud, nos parece apropiado dar una demostración de (3).

Tomando las variables $a=u/v$, $b=v/w$ y $c=w/u$, tenemos que

$$\frac{u+v}{v+w}=1+\frac{u-w}{v+w}=1+\frac{u/w-1}{v/w+1}=1+\frac{ab-1}{b+1}=1+a-\frac{a+1}{b+1}.$$

De un modo similar,

$$\frac{v+w}{w+u} = 1 + b - \frac{b+1}{c+1} \qquad \text{y} \qquad \frac{w+u}{u+v} = 1 + c - \frac{c+1}{a+1}.$$

Por tanto, (3) es equivalente a la desigualdad

$$3 \leq \frac{a+1}{b+1} + \frac{b+1}{c+1} + \frac{c+1}{a+1},$$

que se sigue inmediatamente de la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica. Además, es claro que la igualdad en (3) se alcanza si y solo si $u = v = w$.

También resuelto por C. Beade, Kee-Wai Lau, P. Perfetti, A. Stadler, N. Stanciu y T. Zvonaru (conjuntamente) y el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.

Problema 344. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.*

Xavier y Yolanda juegan tirando una moneda. Si sale cara Xavier se anota un punto, y si sale cruz se lo anota Yolanda. Cuando un jugador aventaja al otro en tres puntos, es el ganador y la partida termina. Y si después de $2n$ tiradas, para algún cierto valor de $n \geq 2$ fijo, aún no hay ganador, entonces la partida termina con un empate. Hállese la probabilidad de empate en caso de que la moneda esté equilibrada y en caso de que la probabilidad de sacar cara sea $c \neq 1/2$ (es decir, cuando la moneda no está equilibrada).

Solución enviada por Juan Mir Pieras, Lloseta, Mallorca.

Sean c y $x = 1 - c$ las probabilidades de sacar cara y cruz, respectivamente. Sea $p_{d,k}$ la probabilidad de que, tras k tiradas del juego, la diferencia entre el número de caras y el de cruces sea d. Siguiendo las reglas del juego tenemos que

$$(p_{2,2}, p_{0,2}, p_{-2,2}) = (c^2, 2cx, x^2)$$

y

$$\begin{pmatrix} p_{2,2n} \\ p_{0,2n} \\ p_{-2,2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx & c^2 & 0 \\ x^2 & 2cx & c^2 \\ 0 & x^2 & cx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{2,2n-2} \\ p_{0,2n-2} \\ p_{-2,2n-2} \end{pmatrix}, \quad \text{si } n > 1.$$

Puesto que

$$\begin{pmatrix} cx & c^2 & 0 \\ x^2 & 2cx & c^2 \\ 0 & x^2 & cx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^2 \\ 2cx \\ x^2 \end{pmatrix} = 3cx \begin{pmatrix} c^2 \\ 2cx \\ x^2 \end{pmatrix},$$

por inducción se obtiene fácilmente

$$\begin{pmatrix} p_{2,2n} \\ p_{0,2n} \\ p_{-2,2n} \end{pmatrix} = (3cx)^{n-1} \begin{pmatrix} c^2 \\ 2cx \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad \text{si } n \geq 1.$$

Entonces, tras $2n \geq 2$ tiradas, la probabilidad de empate, $P_e(2n)$, está dada por

$$P_e(2n) = p_{2,2n} + p_{0,2n} + p_{-2,2n} = (3cx)^{n-1}(c+x)^2 = (3c(1-c))^{n-1}.$$

Usando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica vemos que el valor máximo de la probabilidad de empate $P_e(2n)$ es $(3/4)^{n-1}$, y se alcanza si y solo si $c = 1/2$, es decir, cuando la moneda está equilibrada.

También resuelto por J. L. Arregui, M. A. Díaz y el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.

NOTA. En su solución, J. L. Arregui observa que la probabilidad P_e puede determinarse para cada entero positivo, puesto que $P_e(2n+1) = P_e(2n+2)$.