Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri Ramírez y Emilio Fernández Moral

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Madre de Dios 53, 26006, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 29 de febrero de 2020.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

In Memoriam

Joaquín Hernández Gómez (1953–2018)

Se publica en este mismo número de La Gaceta de la RSME un homenaje a Joaquín en la sección Matemáticas en las aulas de Secundaria. Queremos sumar también esta sección a la conmemoración. Todas las propuestas de este número han sido elaboradas expresamente en recuerdo y reconocimiento de Joaquín, aficionado entusiasta del planteamiento y la resolución de problemas, y profesional comprometido sin desmayo en la institución de competiciones matemáticas en nuestro país. Las dos primeras propuestas (para las que no disponemos de solución) están tomadas de unas viejas notas suyas que nos ha remitido Antonio Juano Ayllón. Sea este, entonces, nuestro homenaje al que fue excelente matemático (como le gustaba que pusiera en su DNI) e inolvidable amigo y profesor.

Problema 369⋆. *Propuesto por Joaquín Hernández Gómez.*

Nonino y Quino juegan a pillar. Quino está montado en una barca (la vamos a considerar puntual, igual que a él) en el centro exacto de un estanque circular. Nonino, a quien consideraremos también puntual, puede correr por el borde del estanque a una velocidad cuatro veces mayor que Quino remando. ¿Qué ruta debe seguir Quino para salvarse? (Se supone que Quino se salva si llega a algún punto del borde antes que Nonino.)

PROBLEMA 370⋆. *Propuesto por Joaquín Hernández Gómez.*

¿Cuántas tangente-normales puede haber en la gráfica de un polinomio de grado n, con $n > 2$? (Una *tangente-normal* es una recta tangente a la gráfica en un punto y normal en otro.)

PROBLEMA 371. *Propuesto por Manuel Bello Hernández, Universidad de La Rioja, Logroño.*

Sea n un número natural. Probar que todas las raíces del polinomio

$$G_n(z) = \int_z^1 (1 - x^2)^n \, dx$$

distintas de $z = 1$ están en el semiplano $\operatorname{Re} z < 0$.

PROBLEMA 372. *Propuesto por Manuel Benito Muñoz, Logroño, La Rioja.*

Para hacer la criba de Eratóstenes se escriben los números naturales desde el 2: $2, 3, 4, \ldots$. A partir del 2 se van tachando números de dos en dos; el primero que queda sin tachar es el 3. A continuación, a partir del 3 se van tachando números de tres en tres (pudiendo volverse a tachar alguno de los números que ya estaban tachados anteriormente); el primero que queda sin tachar es el 5. A continuación, a partir del 5,… y así sucesivamente. Esto da lugar a una lista de números sin tachar,

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, \ldots,$$

que es la sucesión de los números primos. Si hacemos un proceso similar, pero en vez de tachar, borramos los números que toque, los números que quedan sin borrar se denominan *lúdicos*. La lista de los números lúdicos comienza

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 25, 29, 37, 41, 43, 47, 53, 61, 67, 71, 77, 83, 89, 91, 97, \ldots$$

(para más información sobre los números lúdicos puede verse la sucesión `A003309` en *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, `https://oeis.org/A003309`).

La suma de los divisores de un número natural n es 3328. Hallar dicho número sabiendo que $n + 64$ es un número primo y lúdico.

PROBLEMA 373. *Propuesto por Mercedes Sánchez Benito, Universidad Complutense de Madrid, Madrid.*

Encontrar todos los números primos p tales que $(2^{p-1} - 1)/p$ es un cuadrado perfecto.

Problema 374. *Propuesto por José M. Gamboa Mutuberría, Universidad Complutense de Madrid, Madrid.*

a) Sean u y v números reales. Demostrar que el sistema de ecuaciones

$$(xy-1)^2+y^2=u, \qquad x(xy-1)=v$$

tiene alguna solución $x, y \in \mathbb{R}$ si y solo si $u>0$.

b) Sean u, v y w números reales. Demostrar que el sistema de ecuaciones

$$\frac{2x}{x^2+y^2+1}=u, \qquad \frac{2y}{x^2+y^2+1}=v, \qquad \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}=w$$

tiene alguna solución $x, y, z \in \mathbb{R}$ si y solo si $u^2+v^2+w^2=1$ y $(u,v,w) \neq (0,0,1)$.

c) Sean u y v números reales. Demostrar que existen tres polinomios $p_1(x,y)$, $p_2(x,y)$ y $p_3(x,y)$ con coeficientes reales tales que $p_3(x,y)>0$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$, y de modo que el sistema de ecuaciones

$$\frac{p_1(x,y)}{p_3(x,y)}=u, \qquad \frac{p_2(x,y)}{p_3(x,y)}=v$$

tiene solución si y solo si $u^2+v^2<1$.

Problema 375. *Propuesto por Jesús García Gual, Madrid.*

En una liguilla de fútbol han participado 10 equipos a partido único todos contra todos. La clasificación final por puntos (3 por ganar, 1 por empatar y 0 por perder) ha sido:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
24	20	18	14	11	10	9	8	7	5

Especifica el número de partidos ganados, perdidos y empatados por cada equipo, sabiendo que hubo un equipo que no perdió ningún partido.

Problema 376. *Propuesto por Rodolfo Larrea Tomás y Emilio Fernández Moral, Logroño, La Rioja.*

Demostrar que los radios de las circunferencias circunscritas a los cuadriláteros formados, uno por las bisectrices interiores de los ángulos de un cuadrilátero dado y otro por las bisectrices exteriores, están en la razón $\frac{a+c-b-d}{a+b+c+d}$, siendo a, b, c y d las longitudes de los cuatro lados del cuadrilátero dado tomados en su orden cíclico.

Soluciones

NOTA. Por un descuido involuntario, entre las soluciones correctas recibidas al Problema 343 olvidamos citar la enviada por Joaquim Nadal. Pedimos disculpas por ello.

PROBLEMA 345. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Gerona.*

Para construir un muro de L metros de longitud y A metros de altura disponemos de unos grandes ladrillos de 2×1 metros que podemos colocar en sentido horizontal o vertical. No está permitido romper ningún ladrillo y el muro no debe tener *debilidad estructural*, entendiendo por tal la posibilidad de dividir el muro en dos partes rectangulares sin romper ningún ladrillo. Estudiar la posibilidad de construir muros con estas condiciones según sean L y A.

Solución enviada por el proponente (modificada por los editores).

Un muro (L, A) se compone de un número entero de ladrillos, luego su área $L \cdot A$ es un número par. Por tanto, no es posible contruir muros en los que L y A sean números impares. Procedamos ahora a analizar los casos en los que al menos uno de los valores de L o A son pares mediante un análisis enumerativo de casos según el valor de A. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $A \leq L$. Abreviaremos debilidad estructural por d.e.

Cuando $A = 1$ el único muro sin d.e. es, obviamente, el correspondiente al muro trivial compuesto de un solo ladrillo; es decir, con $L = 2$. Y para $A = 2$ es evidente que no es posible construir muros sin d.e.

A partir de este punto, supongamos que el muro ocupa la región rectangular del plano cartesiano

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq L,\ 0 \leq y \leq A\}.$$

Cada ladrillo que va a formar el muro quedará atravesado por la mitad por una y solo una de las $A + L - 2$ rectas

$$v_k := x = k, \quad k = 1, \ldots, L-1, \qquad \text{y} \qquad h_j := y = j, \quad j = 1, \ldots, A-1.$$

Si una de estas rectas divide el muro en dos partes de área impar, es porque atraviesa a un número impar de ladrillos, y si divide el muro en dos partes de área par, es porque atraviesa a un número par de ladrillos (que no es cero porque en ese caso el muro tendría d.e.).

Para $A = 3$ y $L = 2\ell$, con $\ell \geq 2$, el muro tiene área 6ℓ. Las rectas horizontales h_1, h_2 y las rectas verticales $v_2, v_4, \ldots, v_{2(\ell-1)}$ dividen el muro en dos partes de área par, luego atraviesan al menos $2(\ell + 1)$ ladrillos. Las rectas $v_1, v_3, \ldots, v_{2\ell-1}$ atraviesan al menos ℓ ladrillos. En total habría $3\ell + 2$ ladrillos distintos atravesados. Cosa imposible, habiendo solo 3ℓ ladrillos. Por tanto, no hay muros sin d.e. para $A = 3$.

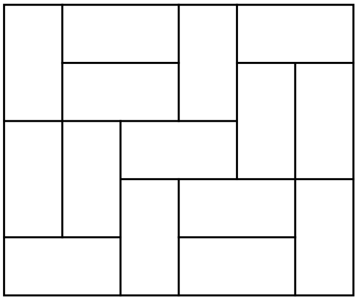

Figura 1: Muro 6×5 sin d.e.

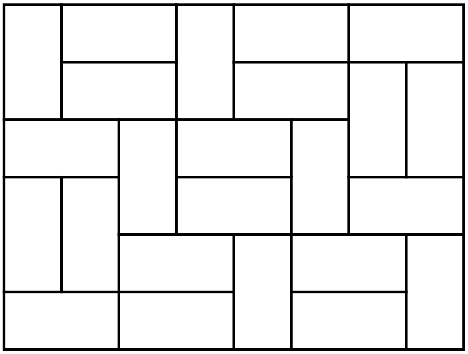

Figura 2: Muro 8×6 sin d.e.

Consideremos ahora el caso $A = 4$. Si $L = 2\ell$, con $\ell \geq 2$, el muro se compone de 4ℓ ladrillos. Todas las rectas, las horizontales h_1, h_2, h_3 y las verticales $v_1, v_2, \ldots, v_{2\ell-1}$ atraviesan al menos dos ladrillos, lo que da al menos $4\ell+4$ ladrillos distintos atravesados, imposible. Y si $L = 2\ell+1$, con $\ell \geq 2$, todas las rectas verticales $v_1, v_2, \ldots, v_{2\ell}$ y la horizontal h_2 atraviesan al menos dos ladrillos, por lo que existen al menos $4\ell + 2$ ladrillos distintos atravesados, que son todos los ladrillos. Pero las rectas h_1 y h_3 deben atravesar un ladrillo más cada una, imposible. Luego no hay muros sin d.e. para $A = 4$.

Para las parejas $(L, A) = (6, 5)$ y $(L, A) = (8, 6)$ existen muros sin d.e., véanse las figuras 1 y 2, respectivamente.

Para la pareja $(L, A) = (6, 6)$ no hay muros sin d.e. ya que son 18 ladrillos y 10 rectas $h_1, \ldots, h_5$, $v_1, \ldots, v_5$ cada una atravesando al menos dos ladrillos, imposible.

A partir de un muro (L, A) construido sin d.e. se puede construir un muro $(L + 2, A)$ sin d.e. Para ello añadimos un ladrillo horizontal a la derecha de cada ladrillo horizontal que está en el borde vertical derecho del muro, y desplazamos dos metros a la derecha cada ladrillo vertical que está en el borde vertical derecho del muro, rellenando el hueco dejado por cada uno de estos ladrillos con dos ladrillos horizontales. Ver la figura 3 en la que se ha construido un muro 8×5 a partir del muro 6×5 de la figura 1.

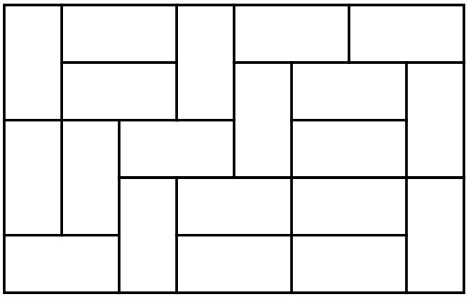

Figura 3: Muro 8×5 obtenido del muro 6×5 de la figura 1.

Con un proceso idéntico, que se puede describir intercambiando en la construcción anterior las palabras «horizontal» y «vertical», a partir de un muro (L, A) construido sin d.e. se puede construir un muro $(L, A+2)$ sin d.e.

En resumen, aparte de los muros triviales $(2, 1)$ y $(1, 2)$, hay muros sin d.e. de los tamaños $(2m+1, 2n)$ para todo $m \geq 2$ y $n \geq 3$, y $(2m, 2n)$ para todo $m \geq 3$ y $n \geq 4$ (y sus simétricos obtenidos por un giro de noventa grados).

Se ha recibido una solución incompleta.

PROBLEMA 346. *Propuesto por Ovidiu Furdui, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Probar que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \left(\cos x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cos \frac{k\pi}{2} \right)$$

converge absolutamente para cada $x \in \mathbb{R}$ y determinar su suma.

Solución enviada por Ulrich Abel, Technische Hochschule Mittelhessen, Friedberg, Alemania.

Probaremos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \left(\cos x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cos \frac{k\pi}{2} \right) = \frac{\cos(ax) - \cos x}{a-1}, \qquad a \neq 1,$$

luego la suma solicitada es $(\cos(3x) - \cos x)/2$.

Usando el desarrollo de Taylor con resto integral para la función $f(x) = \cos x$ tenemos

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cos \frac{k\pi}{2} = \int_0^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} \, dt.$$

Por tanto,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cos \frac{k\pi}{2} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

y la serie es absolutamente convergente para $x \in \mathbb{R}$. Entonces, para $a \neq 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a^n \left(\cos x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cos \frac{k\pi}{2} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n \int_0^x f^{(n+1)}(x) \frac{(x-t)^n}{n!} \, dt \\ &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (f')^{(n)}(t) \frac{(ax-(a-1)t-t)^n}{n!} \, dt \\ &= -\int_0^x \operatorname{sen}(ax-(a-1)t) \, dt = \frac{\cos(ax) - \cos x}{a-1}. \end{aligned}$$

En el caso $a = 1$, la suma de la serie es $-x \operatorname{sen} x$.

Resuelto por L. Glasser, G. C. Greubel, Kee-Wai Lau, Á. Plaza. A. Stadler, J. Vinuesa y el proponente.

Problema 347. *Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.*

Agus y Berna juegan por turnos a un cierto juego. Empieza Agus, sigue Berna en el segundo turno, y así sucesivamente hasta el turno 347, en el que juega Agus y acaba el juego. Quien juega en cada turno escribe en la pizarra un número real positivo. Si al final la suma de los 347 números escritos resulta ser igual a la suma de sus inversos gana Agus, en caso contrario gana Berna. Determinar quién tiene una estrategia ganadora en cada una de las siguientes situaciones, en las que deben cumplirse unas reglas adicionales que se indican:

a) Nadie puede repetir ninguno de los números escritos anteriormente.

b) Agus no puede repetir ninguno de sus números, pero sí puede repetir números que haya escrito Berna. Por su parte, Berna puede repetir cualquier número aparecido ya, propio o ajeno.

Solución enviada por José Luis Arregui Casaus, Universidad de La Rioja, Logroño.

a) En el caso en que no se pueden repetir números previamente ya dichos, Agus tiene una estrategia ganadora muy sencilla: comienza diciendo el número 1, y en adelante dice, en cada turno, el inverso del número que Berna acaba de decir en su turno anterior. Tras cada turno de Agus (que son los turnos impares) el conjunto de números que han aparecido coincide con el conjunto de sus inversos, luego las sumas de los dos conjuntos de números también coinciden, y en el último turno eso le da la victoria. Y Berna no puede evitarlo, porque en cada uno de sus turnos tiene que decir un número tal que ni él ni su inverso han salido todavía.

b) En el segundo caso (Agus no puede repetir sus propios números y Berna no tiene limitación alguna) quien tiene estrategia ganadora es Berna, y esto es así si el número de turnos del juego es cualquier número impar y mayor que 1, digamos $2n+1$. Para justificarlo, definamos primero

$$\varphi(a,b) = x > 0 \qquad \text{tal que} \qquad a + x = b + x^{-1},$$

bien definido para cada par de valores reales a y b, porque la igualdad equivale a $x^2 + (a-b)x - 1 = 0$, ecuación con dos soluciones reales de distinto signo. Notemos que dos valores positivos u y v cumplen que

$$u = \varphi(a+v, b+v^{-1}) \iff v = \varphi(a+u, b+u^{-1}).$$

Ahora, si (x_j) es la secuencia de valores del juego, sean

$$s_k = \sum_{j=1}^{k} x_j \qquad \text{y} \qquad t_k = \sum_{j=1}^{k} x_j^{-1}, \qquad k = 1, 2, 3, \dots .$$

Agus gana si y solo si $x_{2n+1} = \varphi(s_{2n}, t_{2n})$, y a Berna le basta evitar que Agus diga dicho valor en su último turno, para lo que le vale decir x_{2n} tal que sea $\varphi(s_{2n}, t_{2n}) = x_{2n-1}$, es decir $\varphi(s_{2n-1} + x_{2n}, t_{2n-1} + x_{2n}^{-1}) = x_{2n-1}$. Por tanto, gana Berna si dice

$$x_{2n} = \varphi(s_{2n-1} + x_{2n-1}, t_{2n-1} + x_{2n-1}^{-1}).$$

NOTA. Berna tiene una estrategia ganadora similar si las condiciones del juego son que ninguno de los dos jugadores puede repetir sus propios números previos, y como en el caso (b) anterior no debe preocuparse de qué números dice hasta su último turno: para ganar le basta con que sea $\varphi(s_{2n}, t_{2n}) = x_{2k-1}$ para algún k de $\{1, 2, \dots, n\}$, lo que equivale a que $x_{2n} = \varphi(s_{2n-1} + x_{2k-1}, t_{2n-1} + x_{2k-1}^{-1})$ para algún tal k. Dado que estos n valores son todos distintos entre sí (porque Agus no se ha repetido) y Berna ha dicho previamente $n-1$ números, es seguro que al menos uno de dichos n valores es una opción válida para que Berna gane el juego.

Solución al apartado b) enviada por César Beade Franco, I. E. S. Fernando Blanco, Cee, La Coruña.

Si la partida constara de 3 jugadas ganaría Berna, como veremos luego. Esto le proporciona la siguiente estrategia ganadora. Escribe el inverso del número escrito por Agus (no importa que Agus juegue 1, ya que Berna puede repetir) hasta que falten 3 jugadas. Ahora Agus, cuando juega, escribe un número p y Berna responde con un número x tal que, para ganar, A debería repetir p, lo que no le está permitido, perdiendo el juego. El número x que debe jugar Berna ha de cumplir $p + x + p = \frac{1}{p} + \frac{1}{x} + \frac{1}{p}$; es decir, debe ser solución de la ecuación $px^2 + (2p^2 - 2)x - p = 0$, que tiene siempre 2 raíces reales, una de cada signo. Así pues, resolviendo,

$$x = \frac{1}{p}\left(1 - p^2 + \sqrt{1 + p^2 + p^4}\right).$$

También resuelto por J. Nadal y el proponente.

Problema 348. *Propuesto por Cornel Ioan Vălean, Teremia Mare, Timiş, Rumanía.*

Sean

$$H_k^{(2)} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{k^2}, \qquad k \geq 1,$$

los números armónicos de orden dos. Probar que

$$\log 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k^{(2)}}{(k+1)2^{k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k^{(2)}}{(k+1)^2 2^{k+1}} = \frac{\zeta(4)}{16} + \frac{\zeta(2)\log^2 2}{4} - \frac{\log^4 2}{8}.$$

Solución enviada por Ali Shather, Nasiriya, Irak.

Sea

$$I = -\int_0^{1/2} \frac{\log x \operatorname{Li}_2 x}{1-x}\, dx,$$

donde Li_2 es la función dilogaritmo

$$\operatorname{Li}_2 x = -\int_0^x \frac{\log(1-t)}{t}\, dt.$$

Como, además,

$$\operatorname{Li}_2 x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}, \qquad |x| \leq 1,$$

es claro que

$$\frac{\operatorname{Li}_2 x}{1-x} = \sum_{k=1}^{n} H_k^{(2)} x^k$$

e

$$I = -\sum_{k=1}^{n} H_k^{(2)} \int_0^{1/2} x^k \log x\, dx = \log 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k^{(2)}}{(k+1)2^{k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k^{(2)}}{(k+1)^2 2^{k+1}}. \qquad (1)$$

Por otro lado,

$$I = -\int_0^1 \frac{\log x \operatorname{Li}_2 x}{1-x}\, dx + \int_{1/2}^1 \frac{\log x \operatorname{Li}_2 x}{1-x}\, dx =: -I_1 + I_2.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{\log x}{x} \frac{\operatorname{Li}_2 x}{1-x}\, dx - \int_0^1 \frac{\log x}{x} \operatorname{Li}_2 x\, dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(H_k^{(2)} - \frac{1}{k^2} \right) \int_0^1 x^{k-1} \log x\, dx = \zeta(4) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k^{(2)}}{k^2}. \end{aligned}$$

Y para evaluar I_2, hacemos el cambio de variable $1-x=y$ y aplicamos integración por partes con $u=\operatorname{Li}_2(1-y)$ y $v=-\operatorname{Li}_2 y$. De esta forma,

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_0^{1/2} \frac{\log(1-y)\operatorname{Li}_2(1-y)}{y}\,dy \\ &= -\operatorname{Li}_2^2\left(\frac{1}{2}\right) + \int_0^{1/2} \frac{\log y \operatorname{Li}_2 y}{1-y}\,dy = -\operatorname{Li}_2^2\left(\frac{1}{2}\right) - I.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$I = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k^{(2)}}{k^2} - \zeta(4) - \operatorname{Li}_2^2\left(\frac{1}{2}\right)\right). \tag{2}$$

Finalmente, usando (1), (2) y las identidades

$$\frac{H_k^{(2)}}{k^2} = \frac{1}{2}\left(\zeta^2(2)+\zeta(4)\right), \quad \zeta(4) = \frac{5}{2}\zeta(2) \quad \text{y} \quad \operatorname{Li}_2^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\zeta(2)-\log^2 2\right) \tag{3}$$

se concluye el resultado.

También resuelto por B. Bradie, L. Glasser, G. C. Greubel, S. Sharma y el proponente.

Nota. La primera de las identidades en (3) es un caso particular de la identidad (43) en `http://mathworld.wolfram.com/HarmonicNumber.html`, y la tercera se sigue de (10) en `http://mathworld.wolfram.com/Dilogarithm.html`. Sin embargo, es posible dar pruebas sencillas de ambas identidades. En efecto, usando

$$\begin{aligned}\frac{1}{(k+1)(n-k+1)} &= \frac{2}{(n+2)^3}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{n-k+1}\right) \\ &\qquad + \frac{1}{(n+2)^2}\left(\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(n-k+1)^2}\right)\end{aligned}$$

y el producto de Cauchy para series numéricas se deduce la relación

$$\zeta^2(2) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k^{(2)}}{k^2} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k}{k^3} - 6\zeta(4).$$

Ahora, con la identidad (debida a Euler)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k}{k^3} = \frac{5}{4}\zeta(4)$$

se obtiene la primera de las fórmulas en (3). Para probar la tercera basta aplicar integración por partes y un cambio de variable apropiado, de hecho

$$\begin{aligned}\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) &= -\log^2(2) - \int_0^{1/2}\frac{\log t}{1-t}\,dt = -\log^2(2) - \int_{1/2}^{1}\frac{\log(1-t)}{t}\,dt \\ &= -\log^2(2) - \int_0^1 \frac{\log(1-t)}{t}\,dt - \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) = -\log^2(2) + \zeta(2) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right),\end{aligned}$$

y se llega al resultado.

Problema 349. *Propuesto por Francisco Morales Morillas, Universidad de Granada, Granada.*

Sobre los lados de un cuadrado construimos cuatro triángulos rectángulos iguales tal y como se muestra en la figura adjunta. Probar que los puntos E, F, G y H están alineados.

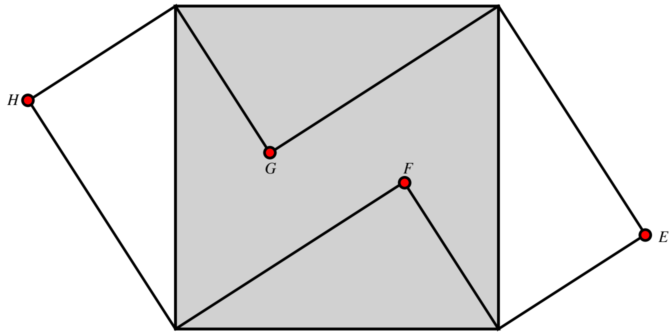

Figura correspondiente al Problema 349.

Solución enviada por Cristóbal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.

Puesto que el centro del cuadrado O es el centro de simetría de la figura, los puntos H y E son simétricos respecto de O y, por tanto, H, O y E están alineados. Con un argumento análogo se tiene que los puntos G, O y F también están alineados.

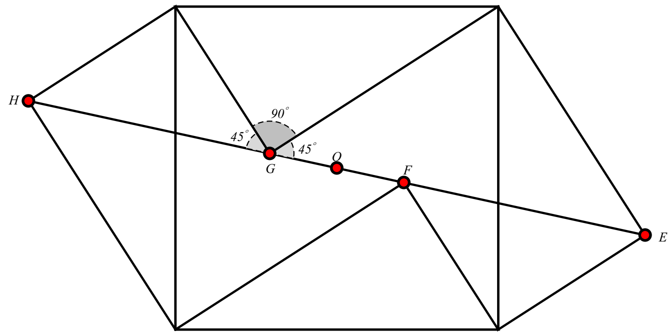

Figura 4: Esquema para la primera solución al Problema 349.

Además, como se deduce inmediatamente de la figura 4, los puntos H, G y O están alineados y el resultado queda probado.

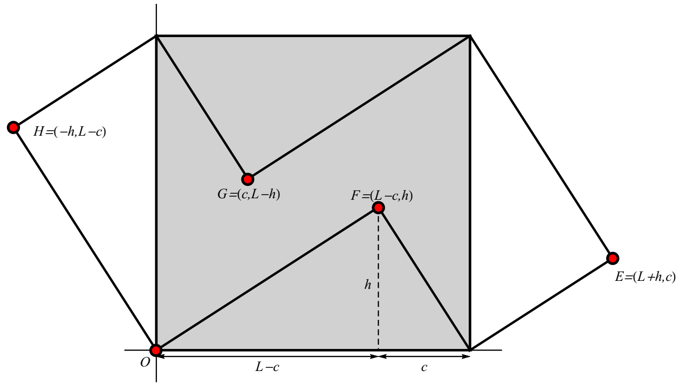

Figura 5: Esquema para la segunda solución al Problema 349.

Solución enviada por Gregori García Ferri, I. E. S. Jaume I, Ontinyent, Valencia.

Tomando un sistema de referencia rectangular con origen O en el vértice inferior izquierdo del cuadrado, probaremos que las pendientes de las rectas que contienen a los segmentos HG, GF y EF, denotadas respectivamente por m_{HG}, m_{GF} y m_{FE}, son la misma.

Si L es la longitud del lado del cuadrado, h la altura del triángulo dado y c la proyección del cateto menor sobre la hipotenusa, véase la figura 5, es claro que

$$m_{HG} = m_{FE} = \frac{c-h}{c+h}.$$

Resulta evidente que

$$m_{GF} = \frac{2h-L}{L-2c},$$

pero por el teorema de la altura tenemos que

$$h^2 = c(L-c) \;\Rightarrow\; L = \frac{h^2+c^2}{c},$$

luego

$$m_{GF} = \frac{2h - \frac{h^2+c^2}{c}}{\frac{h^2+c^2}{c} - 2c} = \frac{(c-h)^2}{c^2-h^2} = \frac{c-h}{c+h}.$$

Por tanto, como las tres pendientes son iguales, podemos concluir que los puntos E, F, G y H están alineados.

También resuelto por M. Amengual, F. D. Aranda, J. L. Arregui, C. Beade, E. Defez, R. S. Eléxpuru, A. Fanchini, Kee-Wai Lau, J. Nadal, A. M. Oller, Á. Plaza y el proponente.

Problema 350. *Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio, I. E. S. Penyagolosa, Castellón.*

Se consideran una circunferencia c y una recta r. En la circunferencia c se toman dos puntos fijos A y A' y un tercer punto variable M. Las rectas MA y MA' cortan a r en los puntos P y Q, respectivamente. Probar que existen (encontrar) dos puntos fijos R y S de r tales que el producto de distancias $PR \cdot QS$ es constante cuando se deja que M recorra la circunferencia c.

Solución enviada por Ricardo Barroso Campos, Sevilla.

Tracemos las rectas paralelas a r pasando por A y A', que cortarán, respectivamente, a la circunferencia en los puntos G y H. La recta GA' cortará a r en S y AH en R (véase la figura 6). Notar que los puntos R y S son independientes del punto M.

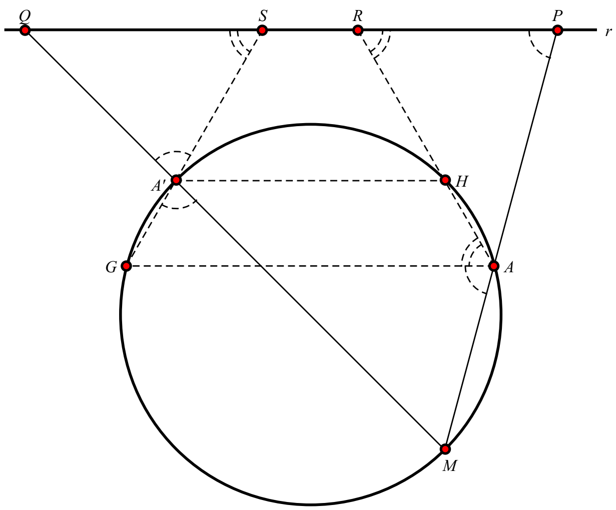

Figura 6: Esquema para la solución del Problema 350.

Para cualquier punto M de c tenemos que

$$\angle QA'S = \angle GA'M = \angle GAM = \angle RPA$$

y

$$\angle QSA' = \pi - \angle HA'G = \pi - \angle A'HA = \angle HAG = \angle PRA.$$

Por tanto, los triángulos $QA'S$ and APR son semejantes y se cumple

$$\frac{QS}{A'S} = \frac{AR}{PR},$$

lo que implica que $QS \cdot PR = AR \cdot A'S$, que es una cantidad independiente de M.

También resuelto por J. Nadal y el proponente. Se ha recibido una solución incompleta.

PROBLEMA 351. *Propuesto por Larry Glasser, Clarkson University, Potsdam, Nueva York, EE.UU.*

Sea

$$T(u) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh\left((2n+1)u\frac{\pi}{2}\right)}{\tanh((n+1)u\pi)}, \qquad 0 < u < 1.$$

Probar que $T(1/u) = \frac{T(u)}{\sqrt{u}}$.

Solución enviada por Albert Stadler, Herrliberg, Suiza.

Consideramos la función

$$f(u) = e^{-\pi u/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-2\pi n u}), \qquad u > 0.$$

Es fácil ver que $f(u) = \eta(iu)$, donde η es la función eta de Dedekind

$$\eta(z) = e^{\pi i z/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-2\pi i n z}), \qquad \operatorname{Im} z > 0$$

(véase en `http://mathworld.wolfram.com/DedekindEtaFunction.html` la definición de esta función y algunas de sus propiedades). El elemento fundamental para probar la identidad propuesta será la ecuación funcional

$$\eta\left(\frac{-1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}}\,\eta(z). \tag{1}$$

De hecho, de (1) se deduce inmediatamente que

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = \sqrt{u} f(u). \tag{2}$$

Veamos ahora cómo expresar T en términos de la función f. Con sencillas manipulaciones tenemos

$$\begin{aligned}
T(u) &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-(2n-1)u\pi})(1 + e^{-2nu\pi})}{(1 + e^{-(2n-1)u\pi})(1 - e^{-2nu\pi})} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-nu\pi})(1 + e^{-2nu\pi})(1 + e^{-2nu\pi})}{(1 - e^{-2nu\pi})(1 + e^{-nu\pi})(1 - e^{-2nu\pi})} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-nu\pi})(1 + e^{-2nu\pi})^2}{(1 + e^{-nu\pi})(1 - e^{-2nu\pi})^2} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-nu\pi})^2(1 - e^{-4nu\pi})^2}{(1 - e^{-2nu\pi})^5} = \frac{f^2\left(\frac{u}{2}\right) f^2(2u)}{f^5(u)}.
\end{aligned}$$

De este modo, usando (2),

$$T\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{f^2\left(\frac{1}{2u}\right) f^2\left(\frac{2}{u}\right)}{f^5\left(\frac{1}{u}\right)} = \frac{(2u) f^2(2u) \frac{u}{2} f^2\left(\frac{2}{u}\right)}{u^{5/2} f^5(u)} = \frac{T(u)}{\sqrt{u}}.$$

De la demostración dada se deduce que la restricción $0 < u < 1$ no es necesaria.

También resuelto por el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.

Nota. Por un error, en la propuesta inicial de este problema se planteaba probar la identidad $T(1/u) = \sqrt{u}\, T(u)$, en lugar de $T(1/u) = \frac{T(u)}{\sqrt{u}}$. Las dos soluciones recibidas observan que la identidad propuesta era errónea, pero en la solución incorrecta no se obtiene el resultado correcto.

Nota. La solución enviada por el proponente parte de la identidad

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{n-1} n \left(\operatorname{csch}(n\pi x) + \frac{1}{x^2} \operatorname{csch}\left(\frac{n\pi}{x}\right)\right) = \frac{1}{2\pi x}$$

y obtiene el resultado por integración en el intervalo $(u, 1/u)$. Esta identidad se debe a S. A. Ramanujan, y resultados similares pueden verse en el capítulo 14 de *Ramanujan's Notebooks*, vol. 2, Springer Verlag, 1985, de C. Berndt.

Problema 352. *Propuesto por D. M. Bătineţu Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucarest, y Neculai Stanciu, "George Emil Palade" School, Buzău, Rumanía.*

Sean $a_1, \dots, a_n$, con $n \geq 3$, números reales positivos. Si para cada $m \in [1, \infty)$ definimos $S_n(m) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} a_k^m$, probar que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2S_n(m) - a_k^m}{(S_n(1) - a_k)^m} \geq \frac{2^m n(n-1)}{(n-2)^m}.$$

Solución enviada por Paolo Perfetti, Università degli studi di Tor Vergata, Roma, Italia.

Tomando $m = n = 3$ y $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3 + 2\varepsilon$, con $\varepsilon > 0$, puede comprobarse que la desigualdad es falsa en general. Sin embargo, con la hipótesis adicional $S_n(1) > a_k$ la desigualdad propuesta es cierta. En efecto, usando la desigualdad generalizada de las medias se tiene que

$$2S_n(m) - a_k^m = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} a_i^m \geq (2S_n(1) - a_k)^m (n-1)^{1-m},$$

luego es suficiente probar

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2S_n(1)-a_k}{S_n(1)-a_k}\right)^m \geq \frac{2^m n(n-1)^m}{(n-2)^m}$$

o, de manera equivalente,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \geq \left(\frac{2(n-1)}{n-2}\right)^m,$$

donde $f(x)=\left(\frac{1-x}{\frac{1}{2}-x}\right)^m$ y $x_k = a_k/(2S_n(1)) < 1/2$. Ahora, como

$$f''(x) = \frac{(1-x)^{m-2}}{\left(\frac{1}{2}-x\right)^{m+2}}(m+3-4x) > 0$$

para $0 \leq x < 1/2$ y $m \geq 1$, por la desigualdad de Jensen se deduce que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \geq f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) \geq \left(\frac{2(n-1)}{n-2}\right)^m,$$

lo que concluye la demostración.

También resuelto por los proponentes. Se ha recibido una solución incompleta.