

La curva en las pistas de atletismo cubiertas. Un acercamiento a la clotoide

por

Paulo González Ogando

RESUMEN. Las pistas cubiertas que se usan en la temporada invernal de atletismo tienen una peculiaridad, y es que su parte curva está peraltada. Por ello, este artículo fija su atención en la forma que tienen dichas pistas, compuestas por rectas, arcos de circunferencia y pequeños tramos de transición que sirven para suavizar la curvatura. Es ahí donde se utiliza la clotoide, una curva que permite hacer transiciones graduales entre una recta y una circunferencia.

INTRODUCCIÓN

Birmingham, 3 de marzo de 2018. Se celebra el campeonato mundial de atletismo en pista cubierta. En la final de los 400 metros lisos se impone Óscar Husillos con una excepcional marca de 44.92 segundos, que supone el récord de España y de Europa de la especialidad. Pocos minutos más tarde llega la noticia de su descalificación, que deja al atleta sin el título e invalida la marca.

Según los jueces de la IAAF (International Association of Athletics Federations, la Federación Internacional de Atletismo), Husillos había cometido una infracción al pisar la línea interior de su calle (figura 1). En ese mismo momento surge la polémica y prolifera la publicación de fotos y vídeos que muestran dicha infracción¹. Poco después, tanto la RFEA (Real Federación Española de Atletismo), a través de su presidente Raúl Chapado, como el propio Óscar Husillos, admiten la descalificación como un hecho probado.

Esta historia tiene dos vertientes. La más emotiva, más humana, es la enorme decepción que sufre el atleta que ve cómo logra alcanzar su gran objetivo para el que se ha preparado con ahínco, pero que en tan solo un instante se desvanece delante de sus ojos cuando le sorprende la descalificación. La otra, más técnica, fija la atención sobre la casi milimétrica infracción acaecida al pisar una línea. Es esto último lo que conduce a plantear cuál es la forma de la curva, pues es la zona de la pista que más quebraderos de cabeza da a los velocistas por la dificultad técnica que supone en la carrera. Y es, por sus dimensiones, más complicada de correr correctamente en la pista cubierta que en la pista al aire libre.

¹Quien lo desee puede ver el vídeo del momento exacto en el que pisa la línea en el enlace <http://www.rtve.es/alacarta/videos/programa/tdp-lupa-carrera-030318/4502919/>.

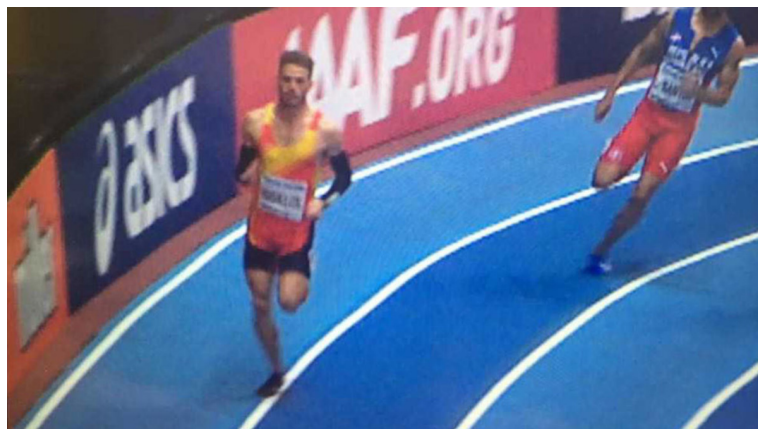


Figura 1: Óscar Husillos pisando la línea. Foto publicada por el diario *Marca*.

1. NORMATIVA PARA LAS PISTAS CUBIERTAS

La normativa para la construcción de pistas cubiertas en las que se puedan celebrar competiciones internacionales está elaborada por la IAAF. Se puede consultar en su página web (<https://www.iaaf.org>), y en ella se explica que la experiencia ha demostrado que las pistas ovales más apropiadas son las construidas con curvas cuyos radios en el bordillo interior oscilan entre 15 y 19 metros, siendo óptimo el de 17.200 metros. La normativa sugiere los ángulos máximos de peralte (cuadro 1), y la propia IAAF recomienda que todas las pistas que se construyan con esta última especificación sean denominadas como «pista cubierta estándar de 200 metros».

	Radio					
	15.00 m	15.50 m	16.50 m	17.50 m	18.50 m	19.00 m
Peralte	15°	13°	11.5°	10°	10°	10°

Cuadro 1: Peraltes sugeridos según el radio de la pista.

Para facilitar el paso de los atletas de la recta a la curva se construyen transiciones, ya sean multi-radiales o con clotoides. Mientras el bordillo y la calle 1 han de ser de ese tipo, el resto de calles (6 en total) no tienen radio uniforme ni son una clotoide real por culpa del efecto producido por el peralte. Además, todas las calles se construyen desde el bordillo de forma que su anchura se mantenga.

En España es labor del CSD (Consejo Superior de Deportes) dirigir y gestionar todo aquello relacionado con el deporte, y entre sus muchas competencias se encuentra la de elaborar y ejecutar los planes de construcción y mejora de las instalaciones para el desarrollo del deporte de alta competición.

Su normativa técnica sobre pistas cubiertas de atletismo hace referencia expresa a la «pista cubierta estándar de 200 metros» de la IAAF de la que se ha hablado antes, y detalla sus características geométricas utilizando un radio para el bordillo

de 17.204 metros y un ángulo de inclinación del peralte de 10.0925°. Ambos datos son ligeramente superiores a los mencionados en el manual de la IAAF, aunque las diferencias son inferiores al 1%. Además, la normativa del CSD menciona explícitamente la clotoide como la curva con la que se hacen las transiciones para que resulten continuas y uniformes, y proporciona las principales dimensiones para este tipo de pistas (cuadro 2).

Longitud de la pista en el bordillo	198.140 m
Longitud de la pista en la calle 1	200.00 m
Radio del bordillo	17.204 m
Radio de la línea de la calle 1	17.500 m
Longitud de la curva de transición en el bordillo	10.022 m
Longitud de la curva de transición en la calle 1	10.108 m
Longitud de la recta	30.000 m
Ángulo de inclinación del peralte	10.0925°

Cuadro 2: Dimensiones de la pista cubierta estándar de 200 metros según el CSD.

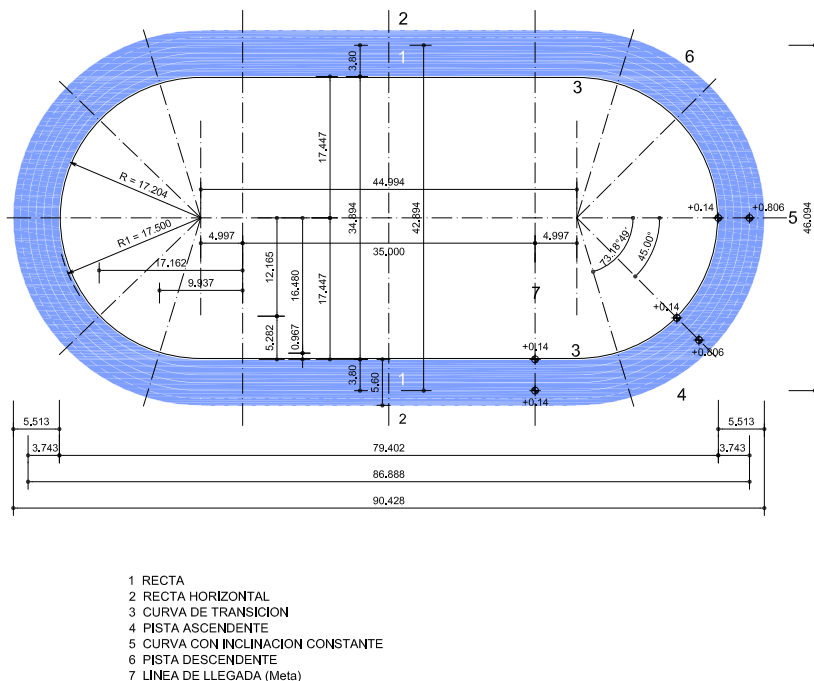


Figura 2: Pista cubierta estándar de 200 metros. La imagen está tomada de la página web del CSD.

El interior de la pista está circundado por un pequeño bordillo, conformando así el interior de la calle 1. La anchura de las calles en la parte curva de la pista es de un

mínimo de 0.90 metros y un máximo de 1.10 metros. La medición de la longitud de la calle 1 se hace a lo largo de una línea situada a 30 centímetros de la cara exterior del bordillo. Se puede medir esa longitud separándola en tramos (figura 2):

- 2 rectas de 35.000 metros cada una;
- 2 arcos de circunferencia de 44.784 metros cada uno:

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot 17.500 \cdot 146^{\circ}37'38''}{360^{\circ}} \simeq 44.784;$$

- 4 tramos de transición mediante una clotoide, de 10.108 metros cada uno.

Son, en total, $2 \cdot 35.000 + 2 \cdot 44.784 + 4 \cdot 10.108 = 200$ metros.

Para la obtención del Certificado de Homologación de la IAAF que permite realizar competiciones oficiales en la pista, se debe realizar una verificación dimensional que supone que se cumplan ciertos valores en el borde exterior del bordillo interno. Estos valores se toman en 29 puntos de control a lo largo de toda la pista (a los 25 exigidos en el manual de la IAAF, el CSD añade otros 4 en los arcos de circunferencia de las curvas).

2. UN POCO DE HISTORIA DE LA CLOTOIDE

Como se ha mencionado con antelación, para facilitar la transición entre recta y curva la IAAF permite multi-radiales y clotoides, y el CSD entre sus especificaciones menciona explícitamente las clotoides. Pero, ¿en qué consiste tal cosa? La clotoide es una curva que también se conoce como espiral de Euler o como espiral de Cornu, en honor del matemático Marie Alfred Cornu (en [7] se puede leer una pequeña biografía suya escrita por Charlotte Bigg). Esta variedad de nombres para una misma curva refleja el hecho de que ha sido descubierta en distintas ocasiones para aplicaciones diferentes.

La historia de la clotoide comienza ([8] constituye la principal referencia en este conciso acercamiento histórico) en 1694, cuando Jakob Bernoulli expone su solución al problema de la curva elástica, y enumera más problemas que él considera que es posible abordar con las técnicas que presenta. Uno de ellos consiste en encontrar la curvatura que debería tener una lámina para ser enderezada horizontalmente por un peso en un extremo. En el mismo año en el que Bernoulli plantea este problema, escribe posteriormente una nota en la que realiza una construcción geométrica de la curva que posee dicha propiedad, aunque esta no resulta esclarecedora ya que no revela su auténtica naturaleza de espiral.

El problema se muestra gráficamente en la figura 3. Cuando la curva se endereza, el momento en cualquier punto es igual a la fuerza F por la distancia s desde la fuerza. Usando teoría de elasticidad elemental, se tiene que la curvatura en el punto en la curva original es proporcional al momento. Y como se asume que la banda elástica no se estira, la distancia desde la fuerza es igual a la longitud del arco. Así, la curvatura es proporcional a la longitud del arco, que es la propiedad esencial de la clotoide.

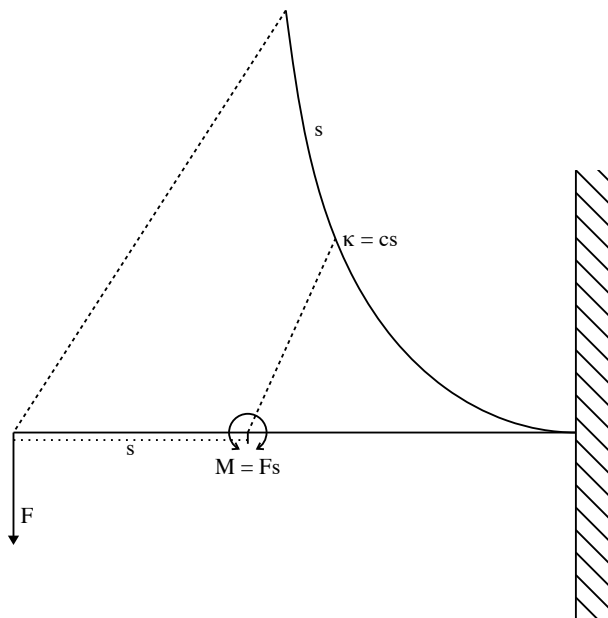


Figura 3: La espiral de Euler en el problema de elasticidad. Imagen tomada de [8].

El problema lo retoma Leonhard Euler en 1744 [3], planteándolo como la forma que debe tener una lámina amB (véase la figura 4) para ser aplanada cuando se tira hacia abajo con un peso P del extremo libre. Su solución se basa en que el momento de cualquier punto M sobre la lámina es la fuerza P por la distancia s de A a M . De ahí, Euler obtiene la curvatura y caracteriza por primera vez la curva dando una parametrización en términos de integrales para expresarla (y que presentaremos más adelante).

Euler [3] ya afirma que se trata de una espiral que se va aproximando a un cierto punto del plano conforme aumenta su longitud. Sin embargo, en ese momento no es capaz de determinar las coordenadas de dicho punto. Es en 1781 (lo publicó algo más tarde, [4]), como consecuencia de su investigación sobre ciertas familias de integrales, cuando consigue encontrar dichas coordenadas.

La segunda aparición de la clotoide llega de la mano de Augustin Fresnel en 1818, cuando considera un problema de luz difractando a través de una rendija, y deriva de forma independiente integrales equivalentes a las que definen la espiral de Euler [5], integrales que acabarían siendo conocidas como integrales de Fresnel. Posteriormente, en 1874 Marie Alfred Cornu trazó la espiral con precisión (figura 5) y propuso su uso como técnica de computación gráfica en problemas de difracción. Y, según parece, tanto Fresnel como Cornu no conocían las investigaciones previas de Euler, ni las relativas a la curva ni las concernientes a las integrales. Eso sí, al igual que el nombre de Fresnel quedaría ligado para siempre a las integrales, el de Cornu quedaría unido al de la curva.

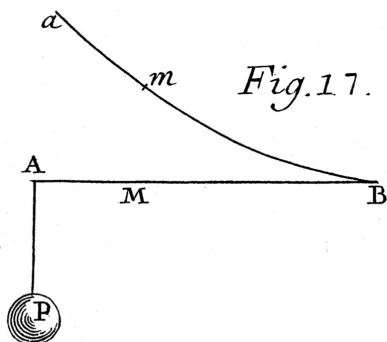


Figura 4: Esquema de Euler para la determinación de su espiral. Es la figura 17 del «Additamentum 1» en [3].

Y como por lo visto dos nombres (espiral de Cornu y espiral de Euler) no eran suficientes para una sola curva, Ernesto Cesàro la renombró como clotoide allá por 1886. Cloto era la más joven de las tres Moiras, que en la mitología griega eran las personificaciones del destino, y en honor a ella eligió Cesàro ese nombre, ya que se decía que era Cloto quien hilaba las hebras de la vida con su rueca. Y la clotoide se enrolla sobre sus puntos asintóticos igual que hacía Cloto con su rueca.

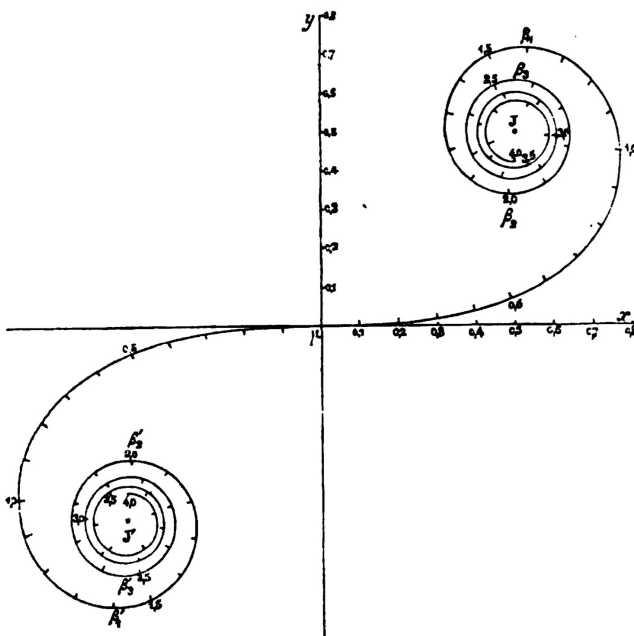


Figura 5: Así trazó Cornu la espiral que lleva su nombre. Imagen tomada de [2].

Aún habría un tercer descubrimiento independiente de esta espiral en el diseño de vías férreas para proporcionar una transición suave entre dos tramos. A lo largo del siglo XIX el ferrocarril se extendió rápidamente, lo cual trajo la imperiosa necesidad de que la forma de la vía tuviese una curvatura de variación gradual. William Rankine menciona [11] dos intentos de ingenieros de solventar esta cuestión en la primera mitad del siglo XIX. El primero de ellos, debido a William Gravatt y desarrollado entre 1828 y 1829, proponía realizar las transiciones utilizando la función seno, y el segundo, propuesto por William Froude unos veinte años después, planteaba usar la curva elástica. Sin embargo, es Arthur Talbot el que se plantea este último problema de forma matemática [12], llegando a las mismas integrales que Bernoulli y Fresnel habían deducido con anterioridad pero sin tener conocimiento de aquellos trabajos. Levien, en [8], asegura que la primera conexión entre la clotoide y la espiral como transición desarrollada por Talbot no se estableció hasta principios del siglo XX.

3. DEFINIENDO LA CLOTOIDE

Así, actualmente el principal uso de las clotoides es seguramente la construcción de autovías [1], vías férreas o montañas rusas para hacer una transición gradual desde un punto de curvatura cero hasta un punto de la vía de curvatura constante distinta de cero. Es, pues, justamente su curvatura la propiedad que la hace apropiada para permitir su uso como transición entre una recta y un arco de circunferencia.

El teorema fundamental de curvas en el plano asegura que una curva parametrizada por el parámetro de arco queda totalmente determinada (salvo giros y traslaciones) por su función de curvatura. Interesa de este modo garantizar que la curva a utilizar como transición tenga curvatura $k(s) = c \cdot s$, siendo c alguna constante positiva y s la longitud de arco de la curva. Dado que el radio de curvatura de una recta es infinito y el de una circunferencia es su propio radio, una curva con dicha curvatura permite transicionar entre recta y circunferencia de una manera uniforme ya que, en general, el radio de curvatura es el inverso de la curvatura.

De forma paramétrica, definimos la clotoide a partir de las integrales de Fresnel como

$$x(t) = a \cdot C(t), \quad y(t) = a \cdot S(t),$$

siendo a un factor de escala positivo, t un parámetro no negativo (podría tomar valores negativos, pero no son de interés para la cuestión que nos ocupa), y

$$C(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) dx, \quad S(t) = \int_0^t \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) dx.$$

Si se comprueba que la clotoide así definida tiene precisamente la curvatura deseada, se podrá realizar la transición buscada sin más que tomar adecuadamente un valor de a tal que la espiral interseque con la circunferencia de forma continua, ya que además garantiza que en el instante inicial $t = 0$ interseca a la recta con curvatura nula.

Dibujando la curva parametrizada con cualquier programa de geometría simbólica se puede ver (figura 6) una espiral en el primer cuadrante que empieza en $t = 0$ y se acerca hacia un punto límite $(a/2, a/2)$ cuando el parámetro t tiende a infinito.

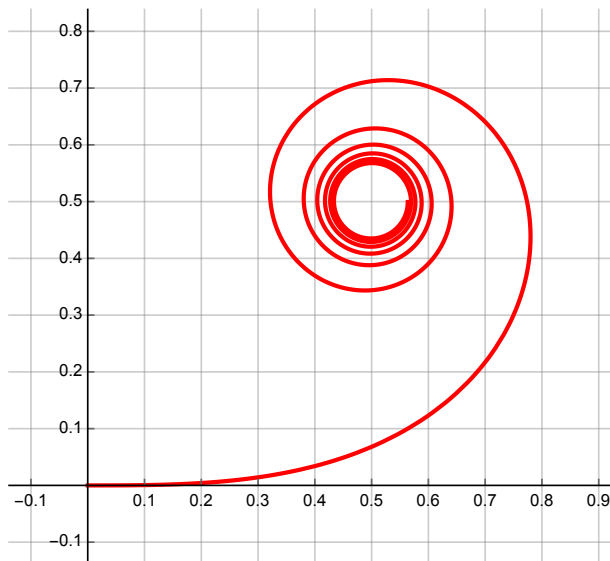


Figura 6: Aspecto de una clotoide con parámetro $a = 1$. Tiende al punto límite $(1/2, 1/2)$.

Tiene sentido comenzar por encontrar cuál es la curvatura de la clotoide dada en términos de las integrales de Fresnel, para poder comprobar que, efectivamente, es proporcional a la longitud. Para ello debemos comenzar por reparametrizar la curva en función del parámetro longitud de arco. Partiendo de la parametrización de la curva

$$r(t) = (a \cdot C(t), a \cdot S(t))$$

y, derivando,

$$r'(t) = \left(a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right), a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) \right)$$

obtenemos que $\|r'(t)\| = a$ y, por tanto, la longitud de arco es $s = at$. De esta forma,

$$r(s) = \left(a \cdot C\left(\frac{s}{a}\right), a \cdot S\left(\frac{s}{a}\right) \right),$$

es la parametrización de la clotoide usando el parámetro longitud de arco.

Puesto que la curvatura es $k(s) = \|r''(s)\|$, es fácil ver que en el caso de la clotoide se tiene $k(s) = \pi s/a^2$, que en términos del parámetro original t se convierte en

$$k(t) = \frac{\pi t}{a}. \tag{1}$$

Se tiene así que, tal y como se deseaba, la curvatura de la clotoide es lineal y proporcional al parámetro longitud de arco, empezando desde curvatura nula en el origen.

Retomando la definición inicial de la clotoide se pueden determinar de manera sencilla algunas de sus propiedades. A partir de la expresión de $r'(t)$ se puede concluir, por ejemplo, que el ángulo de inclinación α de la recta tangente en el punto $(x(t), y(t))$, de pendiente m , es $\pi t^2/2$, pues

$$m = \frac{a \cdot \cos(\pi t^2/2)}{a \cdot \sin(\pi t^2/2)} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) \quad \text{y} \quad m = \operatorname{tg} \alpha.$$

Así mismo, resulta interesante conocer —y lo usaremos más adelante en este mismo artículo— cuál es el centro de la circunferencia de curvatura en cada punto de la clotoide. Como se puede ver en [10], no es difícil comprobar que sus coordenadas son

$$\left(\frac{a}{t} \cdot C_1(t), \frac{a}{t} \cdot \left(S_1(t) + \frac{1}{\pi} \right) \right), \quad (2)$$

donde C_1 y S_1 son las integrales de las integrales de las funciones de Fresnel que, utilizando integración por partes, pueden escribirse como

$$C_1(t) = \int_0^t C(u) du = t \cdot C(t) - \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right),$$

$$S_1(t) = \int_0^t S(u) du = t \cdot S(t) + \frac{1}{\pi} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) - \frac{1}{\pi}.$$

En conclusión, la clotoide permite realizar la transición entre una recta y circunferencia de manera suave (recuérdese que la curvatura es nula en el caso de la recta y el inverso del radio en el de la circunferencia). La curvatura de la clotoide varía de forma continua y lineal a lo largo de la curva, y como la fuerza centrípeta varía de acuerdo a la curvatura de la curva a lo largo de la cual se desarrolla el movimiento, en este caso también varía de forma continua y puede ser contrarrestada a través de un incremento continuo del peralte. El movimiento de un atleta es, sin embargo, menos limitado que el de un vehículo; el atleta puede cambiar con mayor facilidad el ángulo de su cuerpo con respecto a la perpendicular de la pendiente de la pista para contrarrestar la rápida variación de la fuerza centrípeta.

4. TRANSICIONANDO DE LA RECTA A LA CURVA

En [1] se proponen cinco situaciones en las que emplear las espirales de Cornu, de las cuales una es la que se usa en la pista cubierta: pasar de una recta a una circunferencia mediante una espiral simple. En [9] se puede encontrar una explicación de este caso, que se expone a continuación de forma sucinta.

Dada una circunferencia de radio R_1 y una recta cuya distancia al centro de la circunferencia es E_1 , se quiere encontrar la clotoide que une la recta con la circunferencia (figura 7) de forma que las tangentes y las curvaturas de la espiral

correspondan con las de la recta y la circunferencia en los puntos en que se unan. Resulta que esto es posible siempre que la recta y el circunferencia no se corten; es decir, cuando $R_1 < E_1$.

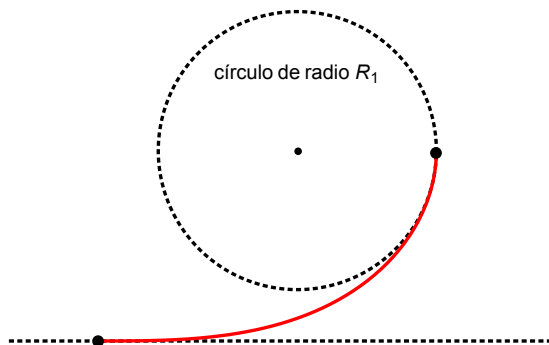


Figura 7: De la recta a la circunferencia mediante una clotoide.

Para ello, se sitúa un sistema de coordenadas en el cual la recta es el eje de abscisas y el centro de la circunferencia queda en el primer cuadrante, con coordenadas (D_1, E_1) . Se toma como factor de escala para la espiral $a = \pi R_1 A$, donde A es el valor a determinar.

Cuando $t = 0$ la curvatura de la espiral es cero, pues es el momento en que interseca con la recta. Sea t_1 el valor del parámetro para el cual la espiral interseca con la circunferencia; en ese momento la curvatura de ambas debe coincidir. Luego, por (1),

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\pi t_1}{\pi R_1 A}$$

y, por tanto, $t_1 = A$.

Además, la circunferencia debe ser tangente a la espiral en el punto de contacto entre ambas, es decir, la circunferencia de partida debe coincidir con la circunferencia de curvatura de la clotoide en el punto de intersección. Haciendo coincidir el centro de ambas circunferencias en $t_1 = A$, usando (2), se tiene

$$\begin{aligned} (D_1, E_1) &= \left(\frac{\pi R_1 A}{t_1} \cdot C_1(t_1), \frac{\pi R_1 A}{t_1} \cdot \left(S_1(t_1) + \frac{1}{\pi} \right) \right) \\ &= (\pi R_1 C_1(A), \pi R_1 S_1(A) + R_1) \end{aligned}$$

y de esta expresión se obtiene la ecuación no lineal $E_1 = \pi R_1 S_1(A) + R_1$, que se reescribe como

$$S_1(A) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{E_1}{R_1} - 1 \right). \quad (3)$$

Se tiene pues que el valor A que se busca para construir la clotoide como transición entre una recta y un arco de circunferencia fijos, siendo R_1 el radio de la

circunferencia que tiene su centro a una distancia E_1 de la recta, viene dado por la ecuación (3).

Resulta conveniente, en este punto, observar que las integrales de Fresnel son positivas para valores positivos del parámetro t . Este hecho, que no es obvio, se puede comprobar con argumentos de cálculo elemental. De ello se sigue la positividad de la función S_1 y, también, que es monótona creciente. Como consecuencia del comportamiento de la función S_1 , se puede asegurar que la ecuación tiene solución única si $R_1 < E_1$.

El valor buscado de A debe pertenecer al intervalo $(0, 1]$ por cuestiones de tangencia, ya que los ángulos de inclinación de las rectas tangentes en $t = 0$ y $t_1 = A$ tienen una diferencia de $\pi A^2/2$, y se quiere mantener esa diferencia menor o igual que $\pi/2$. Esa limitación para A y la monotonía de S_1 implican que $S_1(1) \geq S_1(A)$ para todo $A \in (0, 1]$.

Usando las estimaciones²

$$\frac{1}{12} u^4 \leq S_1(u) \leq \frac{\pi}{24} u^4, \quad 0 \leq u \leq 1, \tag{4}$$

la desigualdad $S_1(1) \geq S_1(A)$ se verificará si se satisface la restricción

$$\frac{1}{12} \geq S_1(A) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{E_1}{R_1} - 1 \right). \tag{5}$$

Mediante las estimaciones de la función S_1 dadas en (4) se obtiene el siguiente intervalo de acotación para A :

$$\left(\frac{24}{\pi^2} \cdot \left(\frac{E_1}{R_1} - 1 \right) \right)^{1/4} \leq A \leq \left(\frac{12}{\pi} \cdot \left(\frac{E_1}{R_1} - 1 \right) \right)^{1/4}.$$

Obsérvese que este intervalo siempre está contenido en $(0, 1]$ debido a la restricción (5).

Para finalizar, y retomando la pista cubierta estándar de 200 metros según el CSD (figura 2), tenemos que el radio de la circunferencia es de 17.204 metros y la distancia de su centro a la recta son 17.447 metros. Haciendo los cálculos usando la acotación que se acaba de obtener, en este caso particular la clotoide queda determinada por un valor $0.4305 \leq A \leq 0.48195$, es decir, $23.26 \leq a \leq 26.05$ como factor de escala para la espiral.

Aunque el valor obtenido de A es bastante preciso para lo que aquí se necesita, podría obtenerse un valor más ajustado usando algún método numérico para resolver la ecuación (3).

²Se tiene

$$u^2 \leq \text{sen } \frac{\pi}{2} u^2 \leq \frac{\pi}{2} u^2 \implies \frac{1}{3} u^3 \leq S(u) \leq \frac{\pi}{6} u^3 \implies \frac{1}{12} u^4 \leq S_1(u) \leq \frac{\pi}{24} u^4.$$

La restricción $0 \leq u \leq 1$ es necesaria para obtener la cota inferior para S_1 , ya que se deduce de la desigualdad de Jordan para la función seno:

$$\text{sen } z \geq \frac{2}{\pi} z, \quad 0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}.$$

AGRADECIMIENTOS. Doy las gracias al revisor anónimo por sus comentarios y sugerencias, que han permitido mejorar la versión preliminar de este artículo.

REFERENCIAS

- [1] K. G. BAASS, The use of clothoid templates in highway design, *Transportation Forum* **1** (1984), 47–52.
- [2] M. A. CORNU, Études sur la diffraction; méthode géométrique pour la discussion des problèmes de diffraction, *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences* **78** (1874), 113–117.
- [3] L. EULER, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti*, Lausanne, 1744, <http://eulerarchive.maa.org/pages/E065.html>
- [4] L. EULER, De valoribus integralium a terminus variabilis $x = 0$ usque ad $x = \infty$ extensorum, *Institutiones calculi integralis* **4** (1794), 337–345, <http://eulerarchive.maa.org/pages/E675.html>
- [5] A. J. FRESNEL, Mémoire sur la Diffraction de la Lumière, *Mém. Acad. Sci. Paris* **5** (1818), 339–487. Una traducción al inglés «Memoir on the diffraction of light» aparece editada por Henry Crew en *The Wave Theory of Light*, 79–144, American Book Company, New York, 1900.
- [6] A. L. HIGGINS, *The transition spiral and its introduction to railway curves*, D. Van Nostrand Company, New York, 1922.
- [7] T. HOCKEY, *The biographical encyclopedia of astronomers*, Springer, New York, 2007.
- [8] R. LEVIEN, The Euler spiral: a mathematical history, *Technical Report UCB/EECS-2008-111*, EECS Department, University of California, Berkeley, 2008. Disponible en <https://www2.eecs.berkeley.edu/Pubs/TechRpts/2008/EECS-2008-111.pdf>.
- [9] D. S. MEEK Y D. J. WALTON, The use of Cornu spirals in drawing planar curves of controlled curvature, *J. Comput. Appl. Math.* **25** (1989), 69–78.
- [10] D. S. MEEK Y D. J. WALTON, A note on finding clothoids, *J. Comput. Appl. Math.* **170** (2004), 433–453.
- [11] W. J. M. RANKINE, *A manual of civil engineering*, Griffin, Bohn, and Company, London, 1862.
- [12] A. N. TALBOT, *The railway transition spiral*, 5.^a edición, McGraw-Hill, New York, 1862.