Matemáticas en las aulas de Secundaria

Sección a cargo de

Carlos Vinuesa del Río

Dominados: dominó y dados

por

Carlos Vinuesa

Circula por el mundillo de la magia una máxima: «No hay juego malo, sino mal presentado». Una apotegma[1] muy golosa que gusta repetir a aficionados a la magia de todo el mundo en diversas situaciones. Bueno, pues vamos a empezar el artículo con polémica: ¡Claro que hay juegos malos! ¡Incluso muy malos! También hay juegos buenos, claro.

En este artículo hablaremos de juegos de magia basados en principios matemáticos con dominós (sobre todo) y dados (muy poco), y de las matemáticas y preguntas que pueden surgir al reflexionar un poquito sobre ellos. En realidad, para nuestra sorpresa, con lo «matemáticos» que parecen el dominó y los dados, entre lo que ya conocíamos y lo que hemos investigado para escribir este artículo, hemos recopilado un total de un juego bueno con un dominó, que será del que más hablaremos, y uno regular con dados. ¿Nos estaremos volviendo demasiado críticos? También aportaremos un poco de frescura con un par de variantes nunca presentadas ante público del juego bueno (los malos no hace falta versionarlos), tratando de darle otro aire, pero sin bajarlo a la categoría de malo. Un momento, ¿eso quiere decir acaso que pretendemos triplicar el número de juegos buenos con dominós sobre la faz de la Tierra? ¿Nos estaremos volviendo demasiado arrogantes?

En primer lugar, puede surgir la pregunta de por qué hablar sobre magia matemática en la sección «Matemáticas en las aulas de Secundaria». Pues el director de la sección no nos ha puesto ningún problema. Sí, definitivamente nos hemos vuelto demasiado arrogantes. También, tanto los juegos de este artículo como las ideas matemáticas que surgen al analizarlos se pueden contar en las aulas de cualquier curso de educación secundaria con alguna esperanza de receptividad por parte de la audiencia.

[1] ¿Cómo era eso de «perígmetro por apotegma partido por dos»? Chiste malo en la primera nota al pie: hecho.

1. Un poquito de historia

La parte del artículo sobre la que hemos pasado más tiempo investigando y en la que las conclusiones son menos firmes es la de la historia y los libros de magia.

La mención escrita más antigua de las fichas de dominó que se conoce fue en China, en el texto «Antiguos hechos en Wulin» (nombre con el que se conocía la actual Hangzhou, capital de Zhejiang) de Zhou Mi (1232–1298). No hay referencias al dominó en fuentes occidentales hasta mediados del siglo xviii, cuando parece que ya se jugaba con fichas de dominó en Italia y Francia. Sin embargo, y aunque parece que la actividad misionera de la iglesia católica en China (que se desarrolló en el siglo xvii y fue muy intensa durante la primera mitad del xviii) y los viajes que en aquella época hicieron los europeos a Asia podrían ser la forma en que el juego se introdujo en Europa [2], hay alguna referencia anterior al dominó en nuestro continente. Y es que en los papeles privados y gastos de Enrique VIII está documentado que perdió en Inglaterra, en enero de 1530, 450 libras (que equivaldrían a unas 135 000 en la actualidad) al dominó, y otras 100 libras (unas 30 000 de hoy) a las cartas y a los dados. Por cierto, y esto viene un poco a cuento, Enrique VIII, rey de Inglaterra y señor de Escocia, fue el primero en promulgar, en 1542, una ley —*Witchcraft Act*— que castigaba la brujería con la muerte (nueve años antes, había sido el primero en promulgar otra —*Buggery Act*— que castigaba la sodomía de igual manera). Eso sí, dicen que el amigo Enrique bailaba muy bien [17].

En cuanto a los dados, se sabe que llevan rodando por ahí más de 5000 años, pues en Turquía se encontraron los dados más antiguos que se conocen, que datan alrededor del año 3000 antes de Cristo. Si hablamos de dados cúbicos, sabemos que ya se encontraban en tumbas egipcias en el 2000 antes de Cristo, y en Tuscania (cerca de Roma) se encontraron dados cúbicos con los puntos de cada una de sus 6 caras distribuidos siguiendo el patrón que hoy consideramos habitual que datan de alrededor del año 900 antes de Cristo [1].

¿Para qué nos sirven los dos párrafos anteriores en un artículo de juegos de magia matemáticos? El segundo para no tanto, ¡los dados son demasiado antiguos! El primero para algo más porque nos dice que es «razonable» no buscar juegos de magia con dominó en los libros occidentales anteriores a mediados del siglo xviii; salvo, si acaso, algún privilegiado que otro, no parece que la gente estuviera familiarizada con ellos.

Además, y esto es bonito porque relaciona los dos elementos de los que hablamos en nuestro artículo, los antiguos dominós chinos no tenían caras blancas; todas sus fichas tenían números del 1 al 6 en cada una de sus mitades: ¡las fichas representaban los posibles resultados que se pueden obtener al lanzar dos dados! Incluso el 1 y el 4 tienen sus puntos de color rojo, igual que en los dados chinos (el resto de puntos son blancos, salvo en la ficha 6-6, en la que la mitad de los puntos de cada 6 son rojos para que esa ficha destaque como la de mayor valor). Los dominós tradicionales chinos tenían 32 fichas; contenían todos los resultados que pueden obtenerse con dos dados, pero algunos de ellos estaban repetidos. Las fichas se dividían en dos «palos», chinas y bárbaras que, durante el periodo en que reinó la dinastía Qing (1644–1912), pasaron a denominarse civiles y militares para evitar ofender a los gobernantes manchúes.

Había dos copias de cada ficha civil y una de cada ficha militar. Pues ya tenemos un primer problema que se puede plantear a cualquier estudiante: ¿cuántas fichas civiles hay en el dominó chino?

Veamos. Lo primero ¿cuántos posibles resultados hay al tirar dos dados? No son $6{\times}6$ porque estaríamos contando como distintos 2-3 y 3-2 y ambos dan lugar a la misma ficha de dominó (o sea, los dados son idénticos, el orden no importa). Tampoco son $\frac{6\times 6}{2}$ porque el truco de dividir entre dos solo nos funcionaría si cada resultado se obtuviese de dos formas, pero los dobles solo se obtienen de una. Ni siquiera son las formas de escoger dos elementos del conjunto $\{1,2,3,4,5,6\}$, es decir, $\frac{6\times 5}{2}$, porque entonces nos estaríamos olvidando de los dobles. Nosotros que veníamos con nuestro cursillo de combinatoria recién estudiado y ni variaciones ni combinaciones… Ni funciona la regla del producto ni el truco de dividir entre 2 para «quitar el orden» ¡ni nada! (figura 1).

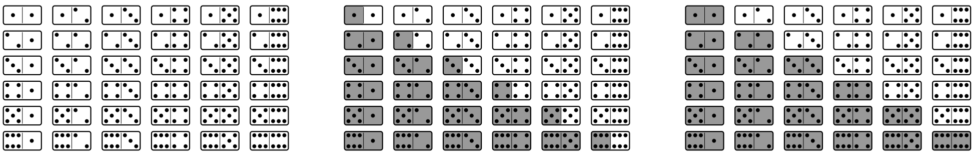

Figura 1: Los posibles resultados al tirar dos dados no son estos, ni esos ni aquellos.

Hombre, nada, nada tampoco. Por un lado, los posibles resultados que nos interesan son justamente aquellos de los 36 que no hemos contado con el número combinatorio $\binom{6}{2} = \frac{6\times 5}{2}$, es decir, los que salen en gris al final de la figura 1. Así, hay $36 - \frac{6\times 5}{2} = 21$ posibles resultados al tirar dos dados. Pero esa es una forma muy rara de contarlos. Si nos fijamos en la escalerita que forman (parte izquierda de la figura 2), parece más sencillo sumar $1+2+3+4+5+6$. Quizá la «mejor» forma de sumar los números del 1 al 6 sea sumarlos sin más, pero no hace falta ser Sherlock Holmes para darse cuenta que desde el párrafo anterior estamos buscando maneras de contar generalizables a ejemplos más grandes. Los profes, y los aficionados a las matemáticas, ya saben que el nombre de Gauss va a hacer su aparición en breve porque parece ser que ese señor, uno de los más grandes matemáticos de la historia, cuando era pequeño, fue el primero de su clase en sumar los términos de una progresión aritmética. A ellos les recomendamos el artículo de Brian Hayes *Gauss's Day of Reckoning* ([7]) en el que se puede comprobar que, con la fama de rectos y aburridos que tenemos los matemáticos, nos encanta tanto copiarnos unos a otros como añadir salseo y detalles de creación propia a las historias (145 versiones tiene recopiladas Hayes en el momento en que escribimos esto [8]). A los que no conozcan la historia se la contamos a nuestra manera, «resumiéndola» en una frase: Gauss se dio cuenta de que hay cosas que es más fácil hacer dos veces que una.

$$\begin{array}{r}
\text{suma} = 1+2+3+4+5+6\\
\text{suma} = 6+5+4+3+2+1\\
\hline
2\times\ \text{suma} = 7+7+7+7+7+7
\end{array}$$

Así que la suma será $\frac{7\times 6}{2} = 21$. Hay otras maneras de pensarlo, como que la suma de un conjunto de números es siempre igual a la media multiplicada por el número de elementos. Normalmente eso no ayuda mucho para hacer la suma porque para hacer la media hay que sumar primero los elementos. Pero en el caso de números en progresión aritmética, la media de todos coincide con la media del primero y el último, así que la suma es $6 \times \frac{1+6}{2} = 21$.

Sin embargo, la forma más fácil de contar esas fichas de dominó (o posibles resultados al tirar dos dados) es cortarlas por la mitad y contar cuántos cuadraditos hay de cada número. Está claro que de cada uno de los 6 números hay los mismos, 7, pues cada número aparece combinado con los otros cinco y consigo mismo. Entonces hay 6×7 cuadraditos y, por tanto, $\frac{6\times 7}{2} = 21$ fichas. Como íbamos diciendo, ¡la regla del producto y el truco de dividir entre dos funcionan a la perfección!

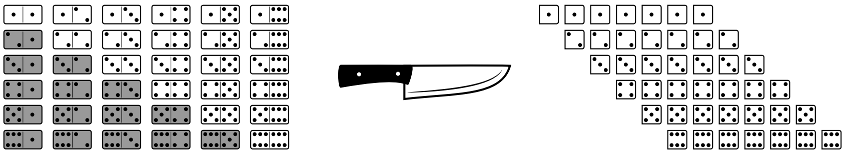

Figura 2: ¡Son estos! Y a veces es bueno «cortar para contar».

Así que, si hay 21 fichas distintas con los números del 1 al 6 y el dominó chino tiene 32, habrá 11 repetidas, ¡11 fichas civiles! Problema resuelto. De hecho, para los curiosos, las 11 fichas civiles, que incluyen todos los dobles, tienen nombre y son, en orden descendente de valor para la mayoría de los juegos: 6-6 (cielo), 1-1 (tierra), 4-4 (hombre), 1-3 (armonía o ganso), 5-5 (flores del ciruelo), 3-3 (treses largos), 2-2 (banco), 5-6 (cabeza de tigre o de hacha), 4-6 (diez pelirrojo o partición), 1-6 (siete de piernas largas) y 1-5 (seis de cabeza grande o mazo rojo). El valor y los nombres de las fichas están relacionados, además de con los colores y la distribución de sus puntos (figura 3), con la filosofía y la cultura chinas [4].

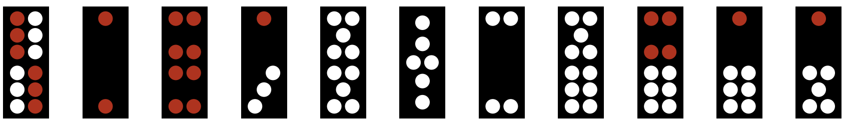

Figura 3: Las 11 fichas civiles del dominó chino (que incluye dos copias de cada una).

En los dominós europeos de comienzos del siglo XVIII ya no había distinciones de palos ni duplicados, pero sí habían aparecido mitades blancas, lo que da lugar a 7 nuevas fichas: 0-0, 0-1, 0-2, 0-3, 0-4, 0-5 y 0-6. Así, en el dominó que se emplea en occidente hay 28 fichas, número que se puede obtener sumando 7 a las 21 que ya habíamos contado o, mejor, con nuestro «truco del cuchillo»: hay 8 copias de cada uno de los 7 números, lo que nos da 7×8 mitades y, por tanto, $\frac{7\times 8}{2} = 28$ fichas. De hecho, esta última forma de contar las fichas parece la adecuada para los jugadores occidentales, pues una de las propiedades más importantes del dominó, que todos los jugadores conocen y emplean de continuo, es que cada número aparece exactamente 8 veces.

Muy bien, después de todo un rollaco histórico-matemático ya sabemos que nuestros dominós tienen 28 fichas. Bueno, en realidad también sabemos muchas cosas sobre la historia del dominó y los dados, y sabemos que si alguien quisiera entretenerse en fabricar un dominó con todas las combinaciones posibles de puntos de 0 a 999, cada uno de los 1000 números saldría 1001 veces y, por tanto, tendría $\frac{1000\times 1001}{2} = 500\,500$ fichas.

Vamos con los libros de magia. El británico Angelo John Lewis, más conocido como Profesor Hoffmann, comenzó a recopilar en 1872, en una revista popular para jóvenes llamada *Every Boy's Magazine*, la magia de su tiempo en entregas. En 1876 compiló todos esos escritos en un volumen titulado *Modern Magic* [9]. La mayoría de los magos de su tiempo se molestaron por esa exposición de secretos, quizá el primer intento de obra enciclopédica de la magia, que se iría viendo ampliada con *More Magic* (1890), *Later Magic* (1903) y *Latest Magic* (1918) hasta completar su tetralogía. Sin embargo, con el tiempo, se convertiría en un texto de referencia, una de las mejores obras de magia escritas en inglés. Pues bien, en *Modern Magic* hay una sección dedicada a juegos con dominó y dados. En ella se explican dos juegos que pueden realizarse con fichas de dominó, que son, posiblemente, los dos juegos matemáticos con dominó más repetidos en la literatura. Como los títulos de los juegos en cuestión son muy largos, vamos a llamarlos «La ficha chivata» (el malo) y «Los extremos» (el bueno). Por cierto que, en 1893, se publicaron varios libritos con las distintas secciones de *Modern Magic* con la idea de hacerlo «más manejable». Uno de ellos era *Conjuring Tricks with Dominoes, Dice, Balls, Hats, etc., Also Stage Tricks From "Modern Magic"*, en el que salían los mismos juegos con las mismas maquetaciones. Como el libro de Hoffmann fue bastante popular entre los magos, es razonable asumir que algunos de los libros posteriores podrían haber sacado los juegos de allí, pero ¿qué hay de los libros anteriores?

Nuestro admirado David Singmaster, que nunca para de sonreír y que, entre otras muchísimas cosas, realizó el primer análisis matemático del cubo de Rubik, adoptándose su notación como la habitual, es uno de los grandes historiadores de la matemática recreativa. Por algo es el asesor de la junta directiva del Conjuring Arts Research Center (carc) de Nueva York. Para justificar ese hecho creemos que basta con decir que su *Bibliografía anotada de fuentes de matemática recreativa* ([15]) cuenta con más de 1000 páginas acerca de más de 450 temas. Con ayuda de ese y otros documentos, emprendimos una búsqueda que resumimos en lo que sigue.

Uno de los libros «famosos» anteriores a Hoffmann fue *The Secret Out*, de mediados del siglo xix. Creemos que se publicó por primera vez por Dick & Fitzgerald en Nueva York en 1859. Y es que, desde finales de la década de 1850 hasta comienzos de la de 1870, se publicaron en Estados Unidos e Inglaterra más de una docena de libros de magia con material copiado o traducido de otros, con diferentes ediciones y versiones, aparecidas en distintos años y con nombres de distintos autores (¡cuando aparecían!). Pues bien, en las ediciones que hemos podido revisar de *The Secret Out* (tanto americanas como británicas) aparecen nuestros juegos, los del libro de Hoffmann, con los títulos «To See and Count Dominoes Through all Obstacles» (el malo) y «Extremes. To Guess the Two Ends of a Line of Dominoes» (el bueno). Antes de nada, parece que nos estamos ensañando demasiado con el primero de los juegos, el que antes hemos bautizado como «La ficha chivata». Pensamos que es malo, pero tampoco es que queramos decir que es el peor juego de magia de la historia con un dominó. El peor es, sin duda, «The Domino Oracle», que también aparece en *The Secret Out*. Vamos a bautizarlo como «El oráculo» y hablaremos también un momento de él en la tercera sección del artículo.

Los franceses llevaron las riendas de la invención y escritura de la magia hasta bien entrado el siglo XIX. Sabemos que, en *Modern Magic*, Hoffmann usó gran cantidad de material de los libros franceses de la época, pero incluso aunque algunos juegos los hubiera leído en *The Secret Out*, ¡resulta que gran parte de este es una traducción de libros franceses de la época! En particular, los juegos de dominó están traducidos del libro *Le Magicien deus Salons ou Le Diable Coleur de Rose*, del que parece que de nuevo tenemos varias ediciones y, quizá, varios autores distintos. La que hemos podido leer ([14]) es de 1856 y está «puesta en orden por» (*mis en ordre par*) Richard[2] (pseudónimo de A.-O. Delarue), y los títulos de los juegos son «Dominos vus et comptès à travers tous les obstacles» (el malo) y «Les extrêmes. Deviner les deux bouts d'une ligne de dominos» (el bueno). Y, tal cual están traducidos los títulos, están traducidos los juegos del libro francés. Lo mismo vuelve a aparecer, con pequeños cambios (quizá introduciendo alguna figura y cosas por el estilo), en otras ediciones y otros libros de la época, como *The Parlor Magician or 100 Tricks for the Drawing Room* (1860, Dick & Fitzgerald, Nueva York) o *The Play Room: or, In-door Games for Boys and Girls* (1866, Dick & Fitzgerald). Vaya, que hay bastantes sitios distintos donde se puede encontrar el mismo material. Aunque estamos convencidos de que la habrá, no hemos encontrado una fuente anterior al libro de Richard donde esté escrito el juego de «Los extremos». Sin embargo, sí que hemos encontrado escrito el juego de «La ficha chivata» en el libro francés de 1830 *Les Mille Récréations de Société* (bueno, el título es un poquito más largo, [3]) de J.-L. Demerson, con el título de «Singulière combinaison du jeu de dominos».

En nuestras búsquedas en los libros franceses más influyentes de mediados y finales del siglo XVIII, a saber, *Nouvelles Récréations, Physiques et Mathématiques* (1740) de Edmé-Gilles Guyot, precursor de más de un siglo de extraordinario crecimiento de la magia de cerca francesa[3], y los trabajos de Henri Decremps (a partir de 1784), no hemos encontrado los juegos del dominó en que estamos interesados. Y en los libros anteriores ni los hemos encontrado ni nos queda mucha esperanza por los datos que hemos recopilado sobre la introducción del dominó en Europa.

Para no parecer pesados —¡a buenas horas!— resumiremos la situación diciendo que con las costumbres de la época, que no solían incluir eso de dar créditos, pero

[2] Nos hace bastante gracia que la versión escrita más antigua del juego de «Los extremos» que hemos encontrado hasta ahora esté en el libro de Richard porque fue nuestro amigo y grandísimo mago Ricardo Rodríguez el primero que nos «pinchó» para que escribiéramos algo explicando cómo funciona el juego.

[3] Que culminaría con los libros de Ponsin, *Nouvelle Magie Blanche Dévoilée* (1853), y de Robert-Houdin, *Les Secrets de la prestidigitation et de la magie* (1868), quizá el libro de magia más importante del siglo XIX [12].

sí lo de copiar o (en el mejor de los casos) traducir de otros libros, y con el lío de ediciones, autores y años que tenemos, lo que podemos decir es que, tras 5 páginas de rollo, sabemos contar las fichas de dominó y creemos que los franceses, en torno a 1800, ya habrían escrito los juegos de magia matemática con dominós de los que vamos a hablar.

En cuanto a los dados, como ya hemos dicho, vamos a hablar poco de ellos en este artículo. De todos los juegos con dados basados en principios matemáticos que hemos encontrado, los únicos que nos parece que «no huelen a matemáticas para los espectadores» son los que hacen uso del hecho de que los puntos de las caras opuestas de un dado suman 7. Hemos descartado todos los juegos en que se adivinan mediante el cálculo los puntos que han salido en los dados (juegos que empiezan con cosas del estilo de: «añada cinco puntos al doble del número que ha producido uno de los dados, multiplicando en seguida la suma por ese mismo número 5 y añadiendo a este producto el número de puntos que produjo el otro dado. . . »), aquellos cuyo efecto es del estilo de adivinar (mirando el mago tanto antes como después el dado) si el espectador ha realizado con él un número par o impar de giros de 90 grados mientras el mago no miraba y los juegos con muchas preguntitas (como «The Moon Die Mystery» de Bob Hummer). Huelen a matemáticos, son matemáticos y no tienen fácil «arreglo». Encontrar la primera fuente en que se diga que las caras opuestas de un dado suman 7 parece una tarea imposible, así que nos conformaremos con citar lo que Juan Mieg, el Tío Cigüeño, escribe en su libro de 1839, *El brujo en sociedad* ([11]), hasta donde sabemos, el primer libro de magia en castellano en que se describen juegos con dados, tanto matemáticos como «de destreza» (las tildes y comas aparecen como en el original):

> *Al considerar atentamente la disposición simétrica de los seis números en un dado, se observará desde luego que la suma de los puntos de dos caras opuestas es siempre igual á 7, y por consiguiente con dos dados dicha suma será 14. De aqui resulta que al echar un par de dados sobre la mesa, será siempre fácil por la simple inspeccion de las caras superiores, adivinar los números ocultos de las caras inferiores en contacto con la mesa.*

De los juegos que utilizan ese «principio del 7», el libro *Mathematics, Magic and Mystery* ([6]) del gran Martin Gardner nos dirigió al juego escrito por Frank N. Dodd en la revista *The Jinx* de septiembre de 1937. Dodd dice que se basa en algo que leyó en la revista *The Magic Wand*. Y, buscando en dicha revista, encontramos en el número de octubre-noviembre de 1935 «Dice– A Happy Ending» de J. F. Orrin, [13], que es el juego al que se refería Dodd y el que pasaremos a relatar en un momento. Antes, un breve análisis que hace Gardner en ese mismo libro para explicar por qué se llevan construyendo tanto tiempo dados cúbicos con números del 1 al 6 y de manera que las caras opuestas sumen 7:

> *Quizá esto no es tan sorprendente si uno considera los siguientes hechos. Solo un poliedro regular asegura la misma probabilidad a cada cara y de los cinco poliedros regulares el cubo tiene ventajas obvias como elemento para el juego. Es el más fácil de construir y es el único de los cinco*

que rueda fácilmente, pero no tan fácilmente. [...] *Como un cubo tiene 6 caras, los números del 1 al 6 se «proponen voluntarios» de inmediato y la disposición con caras opuestas que suman 7 proporciona la máxima simplicidad y simetría. Es, por supuesto, la única forma en que se pueden emparejar los 6 números para que la suma de cada pareja sea constante.*

A quien no le parezca interesante eso, no sabemos si le va a interesar mucho este artículo. Que deje de leer ya. Vamos con el prometido juego de Orrin (no sin antes meternos con los que han abandonado la lectura; se han ido ya, ¿no?: ¡mentecatos!).

DADOS CON FINAL FELIZ

El mago se vuelve de espaldas y pide a un espectador que apile tres dados. Una vez hecho eso, el mago vuelve a girarse hacia el público y entrega una caja de cerillas a otro espectador. Se pide al primer espectador que sume las 5 caras ocultas de la pila de dados (las inferiores de los tres dados y las superiores de los dos dados de abajo) y al segundo que cuente las cerillas que hay en la caja. ¡Ambos números coinciden!

El secreto es sencillo. Las caras superiores e inferiores de los tres dados suman $7 \times 3 = 21$, así que la suma de las 5 caras ocultas se obtiene restando el número de la cara superior a 21. Esa idea de apilar los dados y tener que adivinar las caras ocultas (en realidad, su suma) para disimular el principio del 7 es muy buena; es anterior a Orrin, él mismo comienza su juego diciendo «¿Hacéis ese pequeño efecto con tres dados en que se pide a un espectador que los apile [...]? Entonces quizá queráis probar el siguiente método para revelar la suma», pero no sabemos de quién es. Puedes practicar con la figura 4.

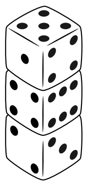

Figura 4: ¿Cuánto suman los puntos de las 5 caras ocultas?

A quien se haya metido mucho en el papel mientras practicaba, puede que le haya pasado lo siguiente: «21 menos 5... Esto... Ehhh... Dieci... ¡seis!». Y es que no es tan fácil restar (o realizar cualquier otra operación) con rapidez y seguridad mientras se actúa delante de público. Por eso, siempre es una alegría cuando una idea ingeniosa permite evitar la operación. La idea de Orrin con las cerillas consigue exactamente eso. El mago tiene en el bolsillo una cajita de cerillas con 15 en su interior y 6 encajadas, 3 a cada lado, entre el borde superior del cajón y la parte superior de la caja, asomando entre 1 y 2 cm por los extremos de sus cabezas. De este modo, en cuanto el mago se gira (ya con su mano en el bolsillo) y ve el número superior, solo tiene que extraer ese número de cerillas de la caja, dejarlas en su bolsillo y empujar el resto al interior de la caja a la vez que saca esta y se la entrega a otro espectador. Se nos ocurre que el «guion» podría ser algo así:

—¿Cuáles son vuestros nombres?

—Primiano.

—Y Secundino.

—Muy bien, encantado de contar con vuestra ayuda. Primiano, el azar es caprichoso y qué mejor forma de representar el azar que estos tres dados. También me gustaría que tu voluntad entrara en juego, así que voy a dejártelos para que juegues con ellos y, en un acto de confianza, voy a darte la espalda para que los coloques, siguiendo tu instinto, formando una pila o torre de tres dados.

El mago se gira, Primiano hace lo que se le ha pedido y, cuando ha terminado, el mago vuelve a girarse y mira la cara superior de la pila de dados. Mientras retira ese número de cerillas y empuja el resto al interior de la caja, prosigue...

—¡Perfecto! Esperaba encontrar cualquier cosa, pero eres un gran constructor. Una torre perfecta. Que además esconde sus secretos... Yo también tengo un secreto para ti, Secundino, guárdalo bien.

El mago entrega la caja de cerillas al segundo espectador y prosigue de nuevo...

—Cinco secretos esconde tu torre, Primiano. La mayoría de las caras de esos dados están a la vista, pero hay 5 caras ocultas. Voy a pedirte que levantes el dado superior y sumes su cara inferior con la superior del dado central. Ahora, levanta el dado central y suma su cara inferior con la superior del dado inferior. Y, por último, levanta el dado inferior y suma a lo anterior su cara inferior. ¿Cuál es el total?

—Dieciocho.

—Secundino, no solo la torre de Primiano tenía algo oculto, la cajita que custodias también tiene algo oculto. ¿Puedes abrirla y contar cuántas cerillas hay en su interior?

—Una, dos, tres... y ¡dieciocho!

Aplausos.

2. El malo

Vamos ya con los juegos con dominós. Empecemos por el malo, tal cual está descrito en *Modern Magic*...

La ficha chivata

El mago coloca fichas de dominó cara abajo sobre la mesa formando una fila y, antes de abandonar la habitación, pide a un espectador que mueva un número de fichas (no más de 12) del lado derecho al izquierdo de la fila. A su regreso a la habitación, el mago dice que no solo va a adivinar el número de fichas que se han movido, sino que puede ver las fichas del dominó como si estuvieran boca arriba y que va a voltear una tal que la suma de sus puntos coincida con el número de fichas movidas por el espectador. El mago señala una de las fichas, pregunta por el número de fichas movidas y se comprueba su acierto. Como final, el mago puede preguntar si quieren que nombre alguna ficha más y nombrar y voltear fichas de distintos lugares de la fila: «esta es un dos, esta es un nueve, esta el doble seis y esta el doble blanco».

Una de las cosas que más disfrutamos es leer los comienzos de las descripciones de los juegos, especialmente cuando «les quedan grandes». Hoffmann comienza así la explicación del juego: «This is a capital drawing-room feat» (algo así como «Esta es una magistral hazaña para presentar en un salón»).

A ver... Para empezar, se presenta el fenómeno de que se ve a través de las fichas y la forma de «demostrarlo» es voltear una ficha cuyos puntos suman lo mismo que un número de fichas que acaba de mover un espectador, después de que fuera el mago quien las colocara y las instrucciones fueran tan concretas como «mueve un número de fichas, no más de 12, de la parte derecha a la parte izquierda de la fila». Pues vaya demostración de visión a través de las fichas. Y mucho cuidado si alguien va a defender el juego argumentando que al final se adivinan varias fichas más (ese añadido no aparece en las versiones que hemos leído anteriores a Hoffmann) porque, en las condiciones en que se hace, eso no hace más que recordar que el mago colocó las fichas y «se las sabe» (que es parte del secreto). Para seguir, en ningún momento se pide a los espectadores que vuelvan a desplazar la fila de fichas una vez se han realizado los movimientos (solamente con saber a qué distancia del borde izquierdo de la mesa comenzaba la fila de fichas, se podría saber cuántas fichas se han puesto a su izquierda). Eso o que uno de los espectadores le pasara la información al mago con un código (visual o auditivo) previamente acordado (recordemos que todos los espectadores han visto cuántas fichas se movían mientras el mago estaba ausente). Siempre y cuando a nadie se le ocurra pensar que, además de haberlas colocado el mago, las fichas están marcadas de alguna forma (visual o táctil) por el dorso (entonces, el efecto es malo, pero el añadido final es de risa ya...; y, ojo, que no va a ser fácil para el mago demostrar que no lo están). Para finalizar, si no es con alguno de los métodos recién nombrados, ¿cuál va a pensar la gente que es el secreto si el mago adivina una cosa tan birriosa volteando una ficha de una cadena que ha colocado él y ha exigido que se altere de manera tan cuadriculada? ¡Pues claro, una ordenación ingeniosa! (que es el secreto del juego).

En *Le Magicien deus Salons ou Le Diable Coleur de Rose*, además de que no se realizan esas «adivinaciones» (o «visiones a través de las fichas») finales, el mago abandona la habitación vendado y cuando vuelve no se quita la venda, argumentando que ha visto a través de la venda y la pared y que ahora va a ver a través de las fichas. Claro, claro... Como mucho, eso puede llevar a alguien a plantearse si de verdad el mago habrá tenido oportunidad de ver el interior de la habitación desde fuera mientras se movían las fichas. En nuestra opinión, incluso en esta versión, que creemos que es mejor que la de Hoffmann, el juego no pasa de ser un acertijo ingenioso: ¿cómo colocarías las fichas de dominó para saber, sin mirarlas, cuántas se han movido de derecha a izquierda?

Por un lado, casi mejor que no sepamos el autor original del juego, porque le está cayendo por todos los lados... De hecho, les está cayendo más a los más «modernos»; en nuestra opinión, el libro más antiguo en el que hemos encontrado el juego es el que mejor lo enfoca: ni se pretende vender que se ve a través de nada ni se flipa con el título —que es algo así como «Combinación singular del juego del dominó»— o con la descripción. Se vende como lo que es, un divertimento de sobremesa.

Además de esas consideraciones, el juego emplea fichas de dominó como podría emplear cartas, tarjetas o cualquier otra cosa. Las propiedades físicas de las fichas o la manera de jugar al dominó no hacen acto de presencia por ningún lado. Y, como juego de magia matemática, las matemáticas a las que da lugar el análisis del juego no dan para mucho. En otras palabras, la ordenación ingeniosa tampoco es «tan» ingeniosa... Remitimos a los lectores interesados ¡después de pensarlo! a la figura 5.

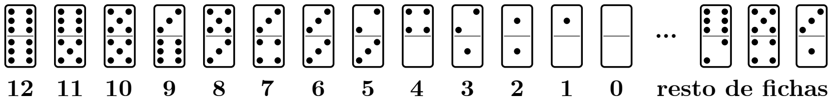

Figura 5: La decimotercera ficha desde la izquierda nos dirá cuántas se han movido de derecha a izquierda.

Sin haber dedicado mucha reflexión al asunto, se nos ocurre que quizá el juego mejoraría transformándolo en una predicción; el mago escribe «13» en un papel y se lo entrega a un espectador. A continuación, sin vendarse ni abandonar la sala, le pide que mueva de la derecha a la izquierda un número de fichas (le puede decir que no se pase de 12, le puede decir que tire dos dados —reales o imaginarios— para obtener el número de fichas a mover, o le puede no decir nada y solo en caso de que vea que se va a pasar de 12 —es raro que mueva tantísimas— decirle que mueva menos, que hay que contarlas y así van a ser muchas). Cuando lo ha hecho, se le pide que lea la predicción. El espectador dice que él no ha movido 13 fichas y el mago le contesta: «No, no, el 13 nos va a llevar a la ficha chivata». Todo el que haya leído hasta aquí sabe cómo termina el juego.

Incluso en esta versión que proponemos, que transforma la «adivinación» en predicción, no nos parece un gran juego. Por algo no se ve presentar mucho, los magos no somos todos imbéciles.

3. El feo

En realidad, esta sección tendría que haberse titulado «El peor», pero se nos hace imposible titular de otra manera una sección que se encuentra entre otras dos de títulos «El malo» y «El bueno». De hecho, esta sección va a ser breve y casi la hemos incluido exclusivamente para hacer ese chiste, porque el juego es más malo...

El oráculo

El mago coloca 12 fichas de dominó cara arriba sobre la mesa en disposición circular, como si marcaran las horas de un reloj. Pide a un espectador que piense una de las 12 fichas. Después, le dice que va a ir tocando fichas a la vez que cuenta y que cuando el número que nombre más los puntos de su ficha sumen 20 le detenga porque estará sobre su ficha. En efecto, el mago comienza a señalar y contar 1, 2, 3, 4, 5… y cuando el espectador le detiene está sobre la ficha que este había pensado.

La descripción del juego, en todas las fuentes en que lo hemos encontrado, comienza con: «This trick, to one not familiar with it, is certainly very surprising». Es decir, algo así como: «Para aquel que no esté familiarizado con él, este juego es muy sorprendente». Y tanto, sorprende que alguien se atreva a hacerlo…

Las fichas se disponen como muestra la figura 6 (de momento, olvidemos los dedos que salen alrededor). Si comenzamos a mirar las fichas en la que marca las 12 y las recorremos en sentido horario, nos dará la sensación de que las fichas cada vez tienen menos puntos; de hecho, cada una tiene un punto menos que la anterior. ¡Es la misma ordenación de las 12 primeras fichas de «la ficha chivata», pero con las fichas cara arriba! El espectador tiene que sumar los puntos de su ficha pensada y ver cuántos le faltan para llegar a 20 porque cuando el mago nombre ese número, deberá detenerle. El «secreto» del juego, según se describe, es que el mago debe tocar fichas «promiscuamente» (las que sea, despreocupadamente) mientras nombra los números del 1 al 7 y cuando nombre el 8 debe tocar la ficha cuyos puntos suman 12 (es decir, el doble 6), cuando nombre el 9 debe tocar la ficha cuyos puntos suman 11 (es decir, el 6-5), cuando nombre el 10 debe tocar la ficha cuyos puntos suman 10 y así, saltando siempre de una ficha a la siguiente en sentido horario (figura 6).

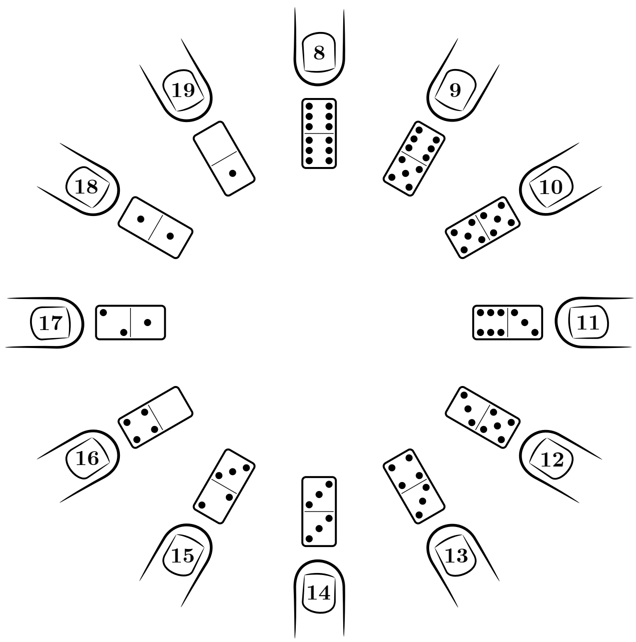

Figura 6: En los números hasta 7 se tocan fichas al azar; en los siguientes, se tocan estas.

Y ahora, no nos lo perdamos, es el espectador el que tiene que parar al mago cuando nombre el número que le faltaba a la suya para llegar a 20. Y, al parar él mismo al mago, resulta que es su ficha y va a decir que sí. Finalaco, vamos. Y claro, es que el número que se nombra más los puntos de la ficha suman 20 desde que empezó la vuelta porque, en sentido horario, las fichas van sumando uno menos y el número que se va nombrando es uno más. Y como, tras la «promiscuidad» inicial, el espectador lleva un rato viendo cómo el mago va dando la vuelta de manera muy ordenadita, igual se le ocurre mirar a la ficha anterior y ver que suma 20 con el anterior número nombrado y se huele la tostada… En realidad, lo que se dice en la explicación del juego es que el mago no debe contar en voz alta, sino ir señalando las fichas de esa manera contando solo para él; es el espectador el que, tras haber calculado «20 menos los puntos de su ficha», tiene que ir contando en silencio las veces que va señalando el mago para detenerle. Pero es que da igual que el espectador se huela la tostada o no y que el mago cuente en voz alta o no, es un bodrio de juego, el efecto es malísimo, el secreto está a la vista, se agota al espectador, huele a matemática mala y usa matemática mala… Quizá por eso nunca hemos visto presentar este juego. Incluso aunque habrá algún mago imbécil, no creemos que tanto como para presentarlo. Como posible «mejora», se nos ocurre, una vez que el espectador ha visto y recuerda una de las fichas, voltearlas todas cara abajo para que el juego no sea tan fácil de seguir (incluso estaría bien que las fichas estuvieran aparentemente desordenadas cara arriba y, al ir colocándolas en disposición de reloj cara abajo, se ordenaran de manera aparentemente despreocupada). Con o sin la aplicación de estas propuestas, el juego es tan malísimo que esperamos no tener que presenciarlo nunca e intentaremos no volver a hablar de él jamás.

4. El bueno

Salvo por los datos históricos, un truquito para contar las fichas del dominó cortándolas por la mitad, un juego con una pila de tres dados y una caja de cerillas, y nuestra singular forma de exponer las cosas, poco se ha perdido quien esté empezando a leer el artículo por esta sección. De hecho, esa sería nuestra recomendación. De nada.

Los extremos

El mago escribe una predicción en un trozo de papel, que dobla y deja a un lado. A continuación, saca un juego de dominó y, volcando sus fichas sobre la mesa, pide a los espectadores que formen una cadena con ellas siguiendo las reglas del dominó. Cuando terminan de hacerlo, se lee la predicción, que dice: «La partida terminará con un 3 en un extremo y con un 4 en el otro». Por supuesto, ¡esos son los números de los extremos!

Aunque en las fuentes más antiguas (hasta Hoffmann incluido) el juego está planteado como una adivinación (el mago abandona la habitación y, antes de volver a entrar o entrando vendado, nombra los números de los extremos), hemos descrito el efecto con una predicción, que es como aparece en las fuentes «más modernas» ([6], [16]) y como creemos que es mejor presentarlo. Por cierto, el juego de la pila de dados de la sección 1, tal como lo hemos presentado, parece más una predicción (o coincidencia), pero antiguamente se presentaba como una adivinación.

El secreto del juego es tan elegante como gracioso: el mago había retirado la ficha 3-4 del dominó. ¿Y con hacer eso la partida va a terminar siempre con un 3 en un extremo y un 4 en el otro? ¿Por qué? Vamos a tratar de entenderlo.

En primer lugar, vamos a volver a pensar en mitades de fichas en lugar de en fichas completas, como cuando las cortábamos por la mitad para contarlas en la primera sección del artículo. Trabajamos, claro, con el dominó de 28 fichas, que incluye todas las parejas que pueden formarse con números del 0 al 6. ¿En cuántas mitades aparece cada número? Ya lo sabemos, en 8, pues aparece consigo mismo (en la ficha doble) y con los otros 6 números. ¿Y si quitamos la ficha 3-4? Entonces todos los números aparecen 8 veces, menos el 3 y el 4, que aparecen 7. Si conseguimos poner las otras 27 fichas formando una cadena y siguiendo las reglas del dominó, observamos que excepto para los dos números de los extremos de la cadena, lo que hacemos es ir emparejando números iguales: «un dos con un dos», «un cuatro con un cuatro»… ¡Claro, esa es la regla más importante del dominó! Eso quiere decir que en la cadena sin contar los dos números de sus extremos, cada número aparece una cantidad par de veces. Así, como no dejamos fichas sin colocar (excepto la 3-4 que hemos escondido, claro), obligatoriamente los números de los extremos habrán de ser los dos de los que teníamos un número impar, es decir, el 3 y el 4. Fin.

Bueno, fin, fin… ¿Quién dice que se puedan poner esas 27 fichas formando una única cadena? A lo mejor no se puede y entonces ¿qué pasa?

La respuesta corta es: pueden ponerse. Busca un dominó y empieza a poner todas las fichas, una detrás de otra, emparejando números iguales… Como los dobles «no hacen nada», puedes olvidarte de ellos. En breve vas a tener una cadena cerrada con todas las fichas menos los dobles, algo parecido a lo que hay en la figura 7. La respuesta larga es que los dobles «sí que hacen algo» y que vamos hablar de ello al final de esta sección…

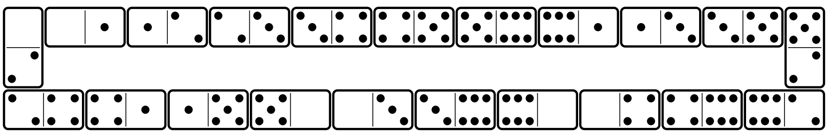

Figura 7: Con las fichas del dominó (menos los dobles) se puede formar una cadena cerrada.

Eso ya es una demostración de por qué funciona el juego. Si quitamos el 3-4, se puede formar una cadena con todo el resto de fichas, y como todos los números aparecen un número par de veces excepto el 3 y el 4, esos son los números que obligatoriamente aparecerán en los extremos.

Parece que eso da por zanjado el tema, pero, si haces varias veces el juego, verás que, al igual que en una partida de dominó, puede producirse un bloqueo; es decir, antes de agotar todas las fichas, puede formarse una cadena en la que sea imposible añadir más porque las fichas que contienen los números de sus extremos ya se hayan utilizado todas. Y claro, el bloqueo puede ser «bueno» para nuestros propósitos si se usan todos los treses y cuatros menos el 3-4 (figura 8, arriba) o «malo» para nuestros propósitos si se usan, por ejemplo, todos los unos (figura 8, abajo).

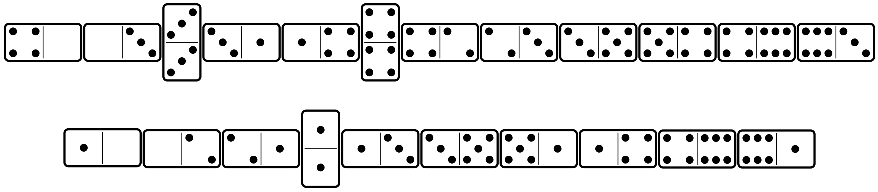

Figura 8: Bloqueos «bueno» (arriba) y «malo» (abajo).

Como no queremos cosas con 3 o más extremos ni «bloqueos malos», al comienzo del juego se pide a los espectadores que formen «una cadena» con las fichas (no queremos que la cosa se bifurque); y como no recomendamos que el mago abandone la habitación, sino, al contrario, que observe y amenice la «partida», si se produce un «bloqueo bueno», es mejor que el mago recalque que los espectadores han jugado de cierta manera y han decidido usar solo esas fichas (si hubieran jugado de otra forma, habría otras fichas distintas involucradas), mientras que si se produce un «bloqueo malo» el mago retira alguna ficha de uno de los extremos diciendo que, como les ha dicho al principio, han de usar «todas» las fichas para formar una cadena (¡malditos magos embusteros, eso no lo había dicho nadie!).

Por supuesto, la ficha 3-4 no tiene mucho de especial. Si se retira la ficha A-B, se cumplirá que «La partida terminará con A en un extremo y con B en el otro», siempre y cuando la ficha A-B no sea un doble (0-0, 1-1, 2-2, 3-3, 4-4, 5-5 o 6-6). En el caso de que la ficha retirada sea un doble, solamente se puede predecir que «La partida terminará con el mismo número en ambos extremos de la cadena» (claro, todos los números aparecen una cantidad par de veces y todos los del centro de la cadena están emparejados, así que los de los extremos también tienen que ser iguales). Pero nuestros lectores son suficientemente inteligentes como para no retirar un doble, ¿no?

¡Al fin un juego bueno! El efecto es claro y contundente, las fichas de dominó se usan para lo que deben, los espectadores tienen absoluta libertad en sus decisiones. . . ¿Qué puede fallar? Bueno, al igual que les habrá pasado a otros muchos, nuestro amigo David Pacho nos dice que, cuando hizo este juego en el bar de su pueblo, los abueletes le dijeron algo así como que dejara de hacerles perder el tiempo y devolviera la ficha 3-4, que el dominó cierra y eso no cerraba. Punto. Ni aplausos ni gloria para el mago. ¿Qué se puede hacer contra eso? Lo primero ya lo deduce cualquiera, no hacer el juego del dominó a gente que sabe de dominó (o, al menos, leer antes este artículo). Para quienes persistan en su lucha contra los viejetes, una estrategia es que al final sí que estén todas las fichas, lo que puede confundir a los listillos o quitar peso a sus argumentos. Eso ya lo han pensado más magos; por ejemplo, esto es lo que propone el maestro de la magia Juan Tamariz [16]:

> *Mientras la despliegan y la leen en voz alta, coge el lápiz con el que escribiste la predicción y que habías dejado sobre la mesa y guárdatelo en el bolsillo derecho de la americana, apoderándote allí de la ficha que retiraste. Saca la mano semicerrada, con la ficha «cara arriba» oculta en los dedos y mueve las manos para mezclar de nuevo todas las fichas, añadiendo de esta forma, ocultamente, la ficha que faltaba, por si a alguien se le ocurre contarlas...*

Si se hace con despreocupación y sin tensión lo anterior, funcionará porque las acciones se realizan de formas y en momentos muy buenos (¡confiemos en los magos, que saben de estas cosas!). Otra cosa que hace Tamariz en el juego y que ayuda también es el hecho de que al principio parezca que están todas las fichas, aunque no lo estén. Para ello, como el dominó suele venir en una caja en la que hay 4 filas de 7 fichas ($4 \times 7 = 28$), una idea bonita es colocar una de las fichas de la segunda fila en perpendicular (y centrada), de manera que sujete en equilibrio (muy estable) las dos que tiene encima y al abrir la caja se vea «lisa» la fila superior (figura 9), sugiriendo que el juego de dominó está completo. Incluso si se vuelca la caja sobre la mesa y se levanta dejando que el conjunto mantenga su forma, basta cubrir un poco el hueco por el frente con los dedos para que todo se vea normal. Acto seguido, las fichas se desparraman y mezclan de la manera habitual. También se puede comenzar con un dominó completo y «robar» la ficha en cuestión al desparramarlas y mezclarlas.

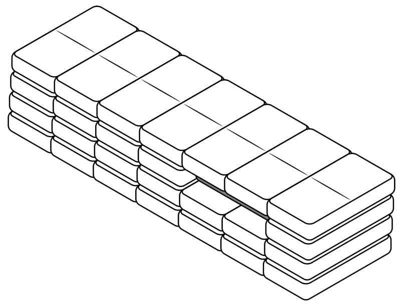

Figura 9: Ficha en perpendicular en la segunda fila (marcada en gris, que casi no se ve).

De todas formas, puede que estas estrategias no convenzan a todos nuestros lectores. Otra opción sería presentar un juego de dominó incompleto abiertamente o, mejor, sacar un juego de dominó realmente completo y retirar con despreocupación algunas fichas diciendo que si no el juego se alargaría mucho. Pregunta: ¿Qué conjuntos de fichas se pueden retirar para asegurarse de que en los extremos habrá un 3 y un 4? ¿Puede hacerse sin llevarse la ficha 3-4 para que nadie la eche en falta? Bueno, sabemos mucho, basta con que dejemos una cantidad impar de treses y cuatros y una cantidad par del resto de los números. Por ejemplo, llevarse las fichas 3-2 y 2-4 funcionaría (lo que responde a la segunda pregunta). Pero hay muchísimas otras opciones: uno puede llevarse cualquier cadena de fichas que, siguiendo las reglas del dominó, tenga un 3 en un extremo y un 4 en el otro. Claro, de esa forma estamos retirando (¡y dejando!) una cantidad impar de treses y cuatros y retirando (¡y dejando!) una cantidad par del resto de números. Bueno, quizá deberíamos asegurarnos bien de que con las fichas que dejamos se puede formar una cadena. Antes hemos visto que se podía si quitábamos el 3-4 (o cualquier otra ficha) porque basta con retirar esa ficha de la cadena cerrada de la figura 7. Pero, aunque nuestro argumento de paridad nos dice que si dejamos cantidades pares de todos los números menos dos y se puede formar una cadena con esas fichas, entonces tendrá esos dos números en los extremos, todavía no hemos dado un argumento claro para demostrar que se podrá formar dicha cadena.

No somos los únicos que hacen afirmaciones sin un argumento del todo claro. Entra en escena Euler, otro de los más grandes matemáticos de la historia. Entre otras cosas mucho más importantes, en 1736, Euler presentó su solución al ya mítico problema de los puentes de Königsberg (hoy Kaliningrado). Quien no conozca el problema y sepa latín puede leer el trabajo original publicado por Euler unos años más tarde ([5]). A quien prefiera algo «más suave», le recomendamos el acertado artículo de Hopkins y Wilson ([10]) en el que se explica lo que Euler hizo y cómo lo hizo, y también lo que no hizo pero se le suele atribuir, que es hablar de grafos (estos hicieron su aparición más de 100 años después). Quien no sepa lo que es un grafo, puede mirar la figura 10. Un grafo tiene vértices (en nuestro ejemplo hay 7 vértices etiquetados con cuadrados con números del 0 al 6) y aristas que unen algunos de los vértices (en nuestro ejemplo hay 28 aristas, que unen todos los vértices con todos los vértices —incluso consigo mismos—, etiquetadas con las 28 fichas del dominó).

El grado de un vértice es el número de aristas que salen de él (o llegan a él, en este caso las aristas no tienen un sentido) cuando se mira de cerca (sí, el «cuando se mira de cerca» es para que se cuenten como 2 las aristas que unen un vértice consigo mismo). Es decir, en nuestro grafo todos los vértices tienen grado 8. ¿De qué nos suena eso? Claro, el grado de un vértice es la cantidad de mitades de fichas con ese número que hay en el dominó y cada arista está etiquetada con la ficha de dominó en la que figuran los dos números de sus extremos. Y hacer una cadena de dominó es lo mismo que echar a andar por el grafo siguiendo las aristas y sin repetir ninguna (no tenemos fichas repetidas). Y si uno consigue pasar por todas las aristas sin repetir ninguna (¡que mola!) está haciendo un camino euleriano —que puede ser abierto (si empieza y acaba en distintos vértices) o cerrado (si empieza y acaba en el mismo vértice)—. La traducción de lo que escribió Euler al lenguaje de los grafos no es más que cambiar paseos que recorren todos los puentes de una zona sin repetir ninguno por lápices que trazan todas las aristas de un grafo sin levantar el lápiz del papel y sin hacer ningún trazo dos veces.

Bien, pues, con esa traducción al lenguaje actual de los grafos, Euler escribió lo siguiente para grafos conexos (aquellos en los que se puede ir paseando de cualquier vértice a cualquier otro; es decir, los que son de una pieza y no tienen dos o más partes separadas):

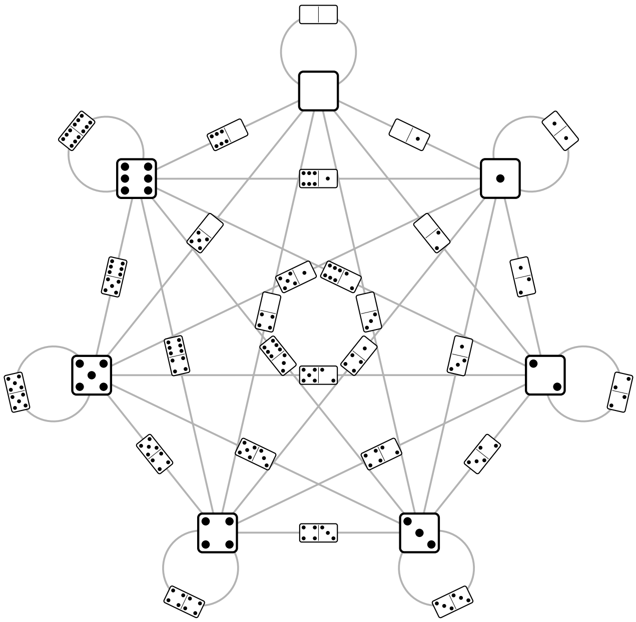

Figura 10: Grafo cuyas aristas son las fichas del dominó. Otra cosa igual no, pero ¡qué figuras más bonitas estamos haciendo para este artículo!

TEOREMA

(1) Si hay más de dos vértices de grado impar, entonces no hay ningún camino euleriano.
(2) Si hay exactamente dos vértices de grado impar, entonces hay caminos eulerianos, pero tienen que empezar en uno de esos vértices y acabar en el otro.
(3) Si no hay ningún vértice de grado impar, entonces hay caminos eulerianos cerrados.

Sin embargo, Euler solo escribió una demostración de (1). Vamos a demostrar el teorema rápidamente en este párrafo. En primer lugar, no hay más que esos tres casos porque el número de vértices de grado impar es par en cualquier grafo (claro, cada arista aporta 2 al grado total del grafo, luego este es par y la suma de un número impar de números impares sería impar). Para probar (1) basta con observar que, para cada uno de los vértices impares, si hubiera un camino euleriano que no comienza en él, entonces tendría que terminar en él (cada vez que se entra y se sale de un vértice se gastan dos aristas). Si hay más de dos vértices impares, el camino no puede comenzar o terminar en todos ellos. Para probar (3), observamos primero que el camino en el grafo que tiene más aristas sin repetir ninguna es cerrado (si no, al ser los grados pares, podría alargarse por cualquiera de sus extremos añadiendo una de las aristas no utilizadas). Ahora observamos que dicho camino también recorre todas las aristas (recorre todos los vértices porque si no, por conexión, podríamos añadir alguna arista al camino y, por tanto, recorre todas las aristas, pues si no recorriera alguna, podríamos alargar nuestro camino cerrado, recorriendo primero esa arista). Por último, para probar (2) se puede emplear una idea muy placentera: añadimos al grafo una nueva arista que une los dos vértices impares. Como ahora todos los vértices son pares, sabemos por (3) que hay un camino euleriano cerrado. Si a ese camino le quitamos la arista que habíamos añadido, tenemos nuestro camino euleriano abierto en el grafo original.

Usando nuestro grafo y este teorema, del hecho de que todos los vértices tienen grado 8 deducimos que hay un camino euleriano cerrado, es decir, que se puede formar una cadena cerrada con las fichas de dominó. Eso ya lo sabíamos, pero ahora podemos afirmarlo también para el dominó que tiene fichas con números del 0 al 1000 (cuidado, que otra cosa que podemos afirmar usando nuestro teorema es que en el dominó con números del 0 al 999 no se pueden poner las fichas formando una cadena cerrada; ¡en ese dominó todos los vértices son impares!). No solo eso, ya hemos justificado lo que queríamos. Siempre que tengamos dos números que aparecen una cantidad impar de veces y el resto que aparecen una cantidad par de veces, se podrá formar una cadena con esas fichas y los números que aparecen una cantidad impar de veces estarán en los extremos.

Además, si alguien coge un puñado de fichas del dominó, basta con considerar el grafo que forman (olvidarse en la figura 10 de las aristas correspondientes a las fichas que no estaban en el puñado) y contar los grados para que nuestro teorema nos diga si hay un camino, si es cerrado o si no lo hay.

Si no se hace con la actitud adecuada, puede que quitar algunas fichas concretas al dominó y jugar solo con el resto sea «sospechoso» (claro —dirán—, el mago habrá quitado las que le hacía falta quitar). Quizás por eso, a lo largo de los años ha habido diversas variantes en el material para realizar el juego; si se utilizan dominós «raros» u otros elementos, nadie va a decir que faltan los dobles o quejarse de que no estén todas las fichas. Además, en la mayoría de estos ejemplos, el número de fichas o elementos es mucho menor que 27, por lo que el tiempo para completar la cadena es menor y el juego gana en ritmo. Tenemos, entre otros, fichas de dominó con un color en cada mitad (sin números; se han vendido bajo diversos nombres: «Magic Color Teller», «The Blocks of India», «Disc-color-ation»...), dominós con animales o pares de cuentas de colores para formar un collar (como los de Len Belcher), tarjetas con una cara de cada color que se apilan (como las de R. D. Merrill), dominós con los símbolos ESP[4] de Karl Zener o fichas con un color en cada cara que se apilan (como los de Ray Piatt) e incluso fichas de plástico con un símbolo ESP a cada lado que se apilan («ESP Chips» de Astor Magic). En su explicación de «Animal Dominoes» de 1956 en *The Magic Wand*, Len Belcher se refiere al «viejo truco de las 15 fichas de dominó» que cierran una cadena y de las que secretamente se retira una, así que hacía ya tiempo que a alguien se le había ocurrido quitar los dobles y usar menos fichas para poder retirar cualquiera de ellas y que el juego no fuera muy largo. Por cierto, que también hemos encontrado que en varias de las descripciones

[4]Extra-Sensory Perception.

de los efectos se pide al espectador que coja una de las fichas y la guarde (al final, los extremos de la cadena coinciden con los de su ficha). En la próxima sección del artículo, explicaremos un par de ideas que tenemos para hacer este tipo de efectos en los que el espectador «escoge» el final con dominós usuales y completos.

Antes, retomemos un tema que teníamos pendiente: ¿cómo que los dobles no hacen nada? Sabemos que se puede formar una cadena cerrada con las fichas del dominó sin los dobles (figura 7). Y los dobles se pueden colocar muy fácilmente dentro de esa cadena, formando otra con todas las fichas del dominó. De hecho, hay bastantes más de una… Concretamente, hay 129 976 320 caminos eulerianos cerrados en el grafo del dominó. Por cierto, ese número es «difícil» de calcular (ver, por ejemplo, la enciclopedia en línea de sucesiones de enteros, `https://oeis.org/A135388`) y no hay una fórmula cerrada o una relación de recurrencia para dominós más y más grandes.

A lo que vamos, ¿y si afirmáramos que en realidad no se puede formar ninguna cadena cerrada con todas las fichas del dominó? Claro, hasta donde sabemos, los dobles se colocan en perpendicular y eso puede dar problemas de ajuste que hagan que la cadena no cierre (sí quedarían los mismos números en los extremos, pero no podrían «encajar» manteniendo las fichas pegadas unas a otras y los ángulos rectos en los giros). De hecho, una forma elegante de ver las cosas es imaginar que creamos nuestras cadenas de dominó sobre un tablero de ajedrez con los escaques (¡claro que eso son las casillas!) del tamaño de media ficha de dominó. Colocar fichas que no son dobles es «aburrido»; si la primera mitad de una ficha está en cuadrado blanco, la segunda está en cuadrado negro y la primera de la siguiente ficha que pongamos en la cadena estará en blanco y su otra mitad en negro y blanco y negro y blanco y negro… (figura 11, izquierda). Sin embargo, si se introduce un doble, la cosa cambia de blanco y negro a negro y blanco (figura 11, centro) y, como hay 7 dobles, para cerrar una cadena tendríamos que poner una ficha negra y blanca con una blanca y negra a continuación, cosa que no es posible.

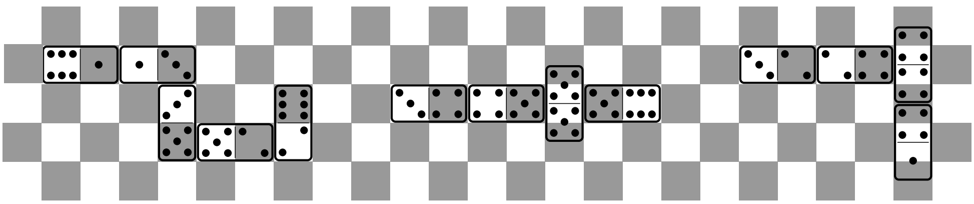

Figura 11: Jugando al dominó sobre un tablero de ajedrez.

Pero eso es hasta donde sabíamos y la figura 11 tiene una parte derecha por algo. Resulta que viendo partidas del mundial de dominó (¿quién nos iba a decir hace unos días que íbamos a hacer eso?), observamos que se puede colocar un doble y poner la siguiente ficha en línea con el doble (figura 11, derecha). Eso cambia la cosa y nos deja las fichas desacompasadas de los escaques del tablero. Como tantas otras veces, después de largo rato de intentar probar que no se podía cerrar una cadena, probamos a hacer una y lo conseguimos (los lectores pueden intentar hacer la suya propia o mirar la nuestra en la figura 12).

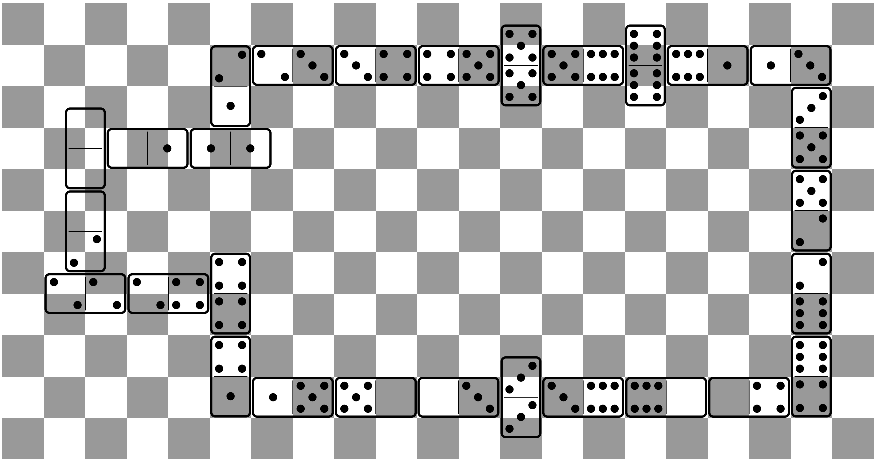

Figura 12: Al final sí que se podía cerrar una cadena con todas las fichas del dominó.

5. Versiones

En realidad, para un mago que ya conociera el juego bueno y no esté muy interesado en las matemáticas, la sección anterior igual también sobraba un poco (salvo por algún detallito). Quizá deberíamos recomendar a los magos empezar a leer el artículo por esta última sección. Sí, eso es, magos, empezad por esta sección. De nada.

Como hemos visto, cambiar el efecto de «adivinación» a «predicción» funciona bien en todos los juegos que hemos estudiado en este artículo (salvo en el juego del que ya no hablamos). En esta sección proponemos dos versiones del juego de los extremos en las que cambiamos la predicción por una coincidencia con una elección del espectador. Son divertidos y usan muchas de las cosas que hemos aprendido. Como hemos adelantado en la introducción, hay un aliciente más para leerlos: ¡podrías ser la primera persona en presentarlos ante público en la historia!; nosotros no se los hemos hecho a nadie todavía.

Extremos dominados

El mago pide a un espectador que lance un par de dados varias veces hasta que le parezca bien (teniendo en cuenta que, si saca un doble, tendrá que volver a tirar, como en el Monopoly). A continuación le pide que aplaste los dados con un bloque de plastilina y saca un juego de dominó en su caja. Las fichas se vuelcan sobre el tapete y se pide a uno o varios espectadores que formen una cadena con ellas siguiendo las reglas del dominó. Cuando terminan de hacerlo, se llama la atención sobre los números que han quedado en los extremos. Entonces, se pide al primer espectador que ponga cara arriba su bloque de plastilina y los dos números que se ven ¡son los números de los extremos!

Con todo lo que sabemos, la explicación va a ser muy sencilla. En primer lugar, justo antes de que el espectador tape los dados, miramos sus caras superiores y calculamos, restando dichas cantidades de 7, qué números habrá en sus caras ocultas (que al final del juego serán las visibles, claro). En principio, podría parecer que tenemos que llevar 28 dominós a los que les falta una ficha y sacar aquel al que le falte ese par de números recién calculados. Al final, hemos conseguido hacerlo con 2 dominós (de hecho, con dos dominós menos una ficha). Veamos, los dobles quedan descartados (¡necesitamos descartarlos para que el juego funcione!) con la excusa de que si sale lo mismo en los dos dados, hay que volver a tirar, como en el Monopoly. Si resulta que el espectador, además de experto en dominó es experto en Monopoly y pregunta qué pasaría si saca tres dobles seguidos ya que en el Monopoly iría a «la cárcel», igual ese espectador tampoco tiene por qué ver el juego. Bueno, 7 fichas que ya nos hemos quitado. Pero, ojo, en los dados no puede salir cero, así que también nos quitamos todas las fichas que tienen cero. ¡13 fichas fuera! Quedan 15, que son las fichas visibles de la figura 13.

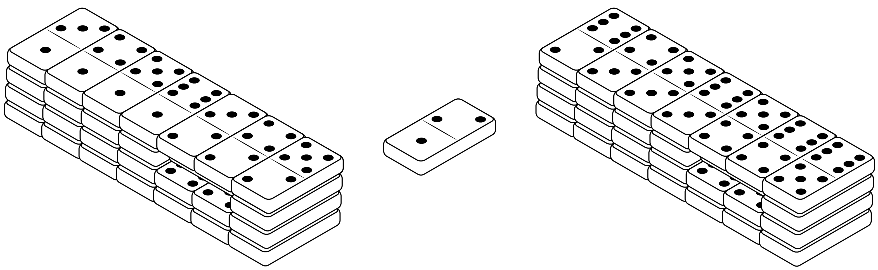

Figura 13: Preparación para «Extremos dominados».

Así, retiramos la ficha 1-2 de los dos dominós. Una de ellas nos la dejamos en casa y la otra la llevamos suelta. En cada una de las dos cajas de dominó hacemos el truco de colocar una ficha perpendicular en la segunda fila y colocamos en las primeras las fichas que se ven en la figura 13. Además del bloque de plastilina que le damos al espectador para cubrir los dados, tenemos debajo de la mesa, junto con nuestros dominós (que están allí escondidos porque para el público solo debería haber uno), otro pequeño pedazo de plastilina. En cuanto sepamos qué números han quedado en la parte inferior de los dados, si son un 1 y un 2, cogemos cualquiera de los dos dominós y lo sacamos a la vista de inmediato; si no, tomamos nuestro pedazo de plastilina, lo pegamos sobre la ficha correspondiente (tiene que estar en la primera fila de uno de los dos dominós), la levantamos y ponemos en su lugar la pieza 1-2, al tiempo que sacamos la caja a la vista (se puede sacar a la vez la tapa de la caja si se ha dejado por ahí con la intención de que parezca que el momentito que hemos perdido bajo la mesa ha sido para abrir la caja).

No hay más que explicar.

El siguiente juego solventa varios de los problemas que hemos observado en la sección anterior y algún otro (que haya demasiadas fichas y el juego se haga muy largo, que se eche en falta alguna ficha concreta, que se sospeche que la ficha que se quita abiertamente puede tener que ver con lo que pasa luego. . .) de manera graciosa y elegante, con un dominó y dos bolsas de papel.

Extremos en bolsas

El mago muestra sobre la mesa las 28 fichas de un juego de dominó. Echa la mitad en una bolsa que tiene una letra A escrita y la otra mitad en una bolsa que tiene una letra B escrita. A la espalda del mago, un espectador saca una ficha de la bolsa A y la guarda sin mirarla. Las fichas de la bolsa B se vuelcan sobre la mesa y los espectadores forman con ellas una cadena siguiendo las reglas del dominó. Cuando terminan de hacerlo, se llama la atención sobre los números que han quedado en los extremos. Entonces, se pide al primer espectador que muestre la ficha que retiró y los números que aparecen en ella ¡son los números de los extremos de la cadena!

Usamos una treta muy divertida, las dos bolsas llevan escritas una A por un lado y una B por el otro (figura 14).

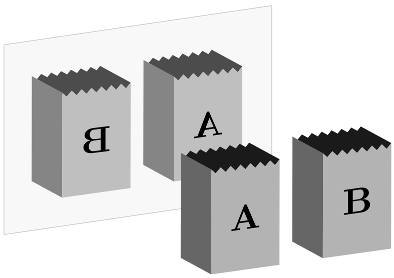

Figura 14: Las bolsas de «Extremos en bolsas» mirándose al espejo.

Ordenamos sobre la mesa las fichas en la disposición de la figura 15 y aprovechamos para contar alguna cosa interesante sobre el dominó; hemos aprendido muchísimas con este artículo (desde que Gauss cogió dos copias de ese triángulo para hacer un rectángulo y contar las fichas dos veces —que es mucho más fácil que contarlas una vez—, hasta que el dominó es casi una «novedad» comparado con los dados).

Después, como se indica en la figura 15, decimos que vamos a echar «más o menos» la mitad en cada bolsa, y en la bolsa que muestra su A al público (que nunca se usará en todo el juego) echamos las fichas marcadas en gris: los dobles (que no queremos que cojan) y una cadena que cierra (para llevarnos una cantidad par de

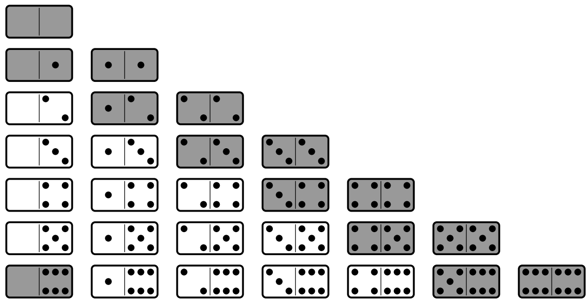

Figura 15: Las fichas grises van a la bolsa que muestra su A al público y las blancas a la que muestra su B.

cada número). En la bolsa que muestra su B al público echamos el resto. Creemos que es mejor ir echando las fichas en pequeños puñados alternativamente porque dará mayor sensación de desorden.

Pedimos a un espectador que se ponga a nuestra espalda (nosotros seguimos mirando al público y no hace falta decir nada, ya se entiende que hacemos eso para que no podamos ver nada; ¡aunque en realidad es para engañar a todo el mundo!, ¡qué bonita es la magia!) y llevamos allí las dos bolsas sin girarlas para que, tras nuestro cuerpo, tome con total libertad una ficha de «la bolsa A» (en la que él verá la A es la que muestra la B al público). Cuando lo hace, le decimos que la guarde sin mirarla y vuelva a su sitio. Mientras, volvemos a colocar las dos bolsas en la mesa. Apartamos un poco hacia un lado la que muestra su A al público (no se usa para nada, solo para meter los dobles y demás «desechos») y volcamos (de lado, no vayamos a voltearla hacia delante y la liemos. . .) las fichas de la que muestra la B sobre la mesa.

Como en la bolsa que acabamos de volcar había una cantidad par de todos los números y el espectador ha retirado una ficha que no es un doble, ya sabemos todos cómo termina esta fiesta.

Y hasta aquí hemos llegado. Agradecemos la labor de `conjuringarchive.com`, `askalexander.org` y `march.es`, que hacen mucho más fácil la investigación en magia, y emplazamos a nuestros lectores a una próxima entrega; mientras, esperamos que disfruten de esta tanto como tiempo nos ha llevado escribirla.

REFERENCIAS

[1] AWESOME DICE, History of Dice, `https://www.awesomedice.com/blogs/news/history-of-dice`.

[2] R. P. CARLISLE, *Encyclopedia of Play in Today's Society*, SAGE Publications Inc, 2009.

[3] J.-L. DEMERSON, *Les mille récréations de société, contenant la description de tous les tours intéressans de gobelets et de cartes, et généralement tout ce qui*

est relatif à l'escamotage; des récréations de mécanique, d'optique, de chimie, d'hyraulique, etc., etc., Aug. Wahlen, Bruxelles, 1830.

[4] Domino-Play, Chinese Domino Suits and Tiles, http://www.domino-play.com/TypeChineseTiles.htm.

[5] L. Euler, Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, publicado originalmente en *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* **8** (1741), 128–140. Disponible, junto con más información, en http://eulerarchive.maa.org/backup/E053.html.

[6] M. Gardner, *Mathematics, Magic and Mystery*, Dover Publications, 1956.

[7] B. Hayes, Gauss's Day of Reckoning, *American Scientist* **94** (2006), n.º 3, 200–205.

[8] B. Hayes, Versions of the Gauss Schoolroom Anecdote, http://bit-player.org/wp-content/extras/gaussfiles/gauss-snippets.html.

[9] P. Hoffmann, *Modern Magic*, 1876.

[10] B. Hopkins y R. Wilson, The Truth about Königsberg, *The College Mathematics Journal* **35** (2004), 198–207.

[11] J. Mieg, «el tío Cigüeño», *El brujo en sociedad ó sea Breve instrucción para aprender a ejecutar con destreza muchos juegos de manos, y otras varias suertes curiosas y divertidas*, Imprenta de los Hijos de doña Catalina Piñuela, 1839. Disponible en la Biblioteca digital de ilusionismo «Sim Sala Bim» de la Fundación Juan March: https://www.march.es/bibliotecas/ilusionismo/visor.aspx?p0=magia:19.

[12] S. Minch, *From Witchcraft to Card Tricks*, Hermetic Press, 1991.

[13] J. F. Orrin, Dice– A Happy Ending, *The Magic Wand* **24** (1935), octubre-noviembre, 134.

[14] Richard (A.-O. Delarue), *Le Magicien deus Salons ou Le Diable Coleur de Rose*, Delarue Libraire-Éditeur, 1856. Disponible en https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k9631150n.

[15] D. Singmaster, *Sources in Recreational Mathematics, an Annotated Bibliography*, Novena edición preliminar, actualizada por última vez el 2 de febrero de 2015. Versión de 2004 disponible en https://www.puzzlemuseum.com/singma/singma6/SOURCES/singma-sources-edn8-2004-03-19.htm.

[16] J. Tamariz, *Magia en el Bar*, Editorial CYMYS, 1975.

[17] A. Weir, *Henry VIII: The King and His Court*, Ballantine Books, 2001.

Carlos Vinuesa, Dpto. de Matemáticas, IES Manuel Elkin Patarroyo, Parla (Madrid)
Correo electrónico: carlosvinuesadelrio@gmail.com
Página web: https://carlosvinuesa.com