

---

---

## MIRANDO HACIA EL FUTURO

Sección a cargo de

**Antonio Viruel**

---

---

### Buscando órbitas periódicas

por

**Eva Miranda**

**RESUMEN.** En este artículo presentamos una aproximación topológica y geométrica al estudio de órbitas periódicas (existencia y localización) tomando como punto de partida problemas de mecánica celeste. Describimos, a grandes rasgos, diversas conjeturas abiertas, y presentamos un enfoque novedoso que incluye problemas de compactificación de trayectorias de escape en astrodinámica.

#### 1. INTRODUCCIÓN

Matemáticamente, volver a empezar es volver al punto de partida describiendo una trayectoria en forma de circunferencia (órbita periódica). Desde un punto de vista básico en la teoría de sistemas dinámicos, las órbitas periódicas se identifican con los puntos fijos de una sección de Poincaré. Pero ¿qué nuevas técnicas se han elaborado para estudiar este problema? El propósito de este artículo es describir diversas técnicas desarrolladas en las últimas décadas, enunciar las conjeturas más relevantes del área y anunciar nuevas líneas en las que la autora está trabajando en la actualidad con su equipo.

Empecemos por el principio: No sorprende saber que fue Poincaré quien dio los primeros pasos substanciales en este tema: para Poincaré entender las órbitas periódicas era fundamental para comprender los sistemas en general. Para él se trataba de un primer paso para comprender la teoría general de sistemas dinámicos puesto que, a su entender, las órbitas periódicas separaban los sistemas dinámicos en «islas» donde los sistemas podrían ser mucho más complicados. En boca de Poincaré, las órbitas periódicas actuarían como auténticos marcadores del «libro de sistemas dinámicos» separando éstos en diversos grados de dificultad.

En sus propias palabras:

*On peut alors avec avantage prendre [les] solutions périodiques comme première approximation, comme orbite intermédiaire [...]. Ce qui nous rend ces solutions périodiques si précieuses, c'est qu'elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable.*

H. Poincaré,

*Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste,*  
Gauthier-Villars et fils, Paris, 1892.

La geometría riemanniana se asocia a la geometría de las distancias, que es simétrica; pero si en lugar de medir por distancias midiésemos utilizando áreas, nuestra geometría sería antisimétrica. Se trata de la geometría simpléctica que tiene su origen en el estudio de problemas físicos. El estudio de las trayectorias de los planetas viene naturalmente asociado a la geometría de las formas simplécticas. El conjunto de posiciones y momentos de la física definen un conjunto de cartas del fibrado cotangente a la variedad de posiciones. Dicho fibrado tiene asociada una forma diferencial de forma canónica: la forma de Liouville. La diferencial de esta forma,  $\omega$ , gobierna las ecuaciones de las trayectorias de las partículas ya que éstas vienen determinadas por el flujo de los campos hamiltonianos asociados a la energía total del sistema. Resumiendo, la geometría de las trayectorias es simpléctica y, en particular, de dimensión par.

Una de las contribuciones más importantes en el estudio de órbitas periódicas de los sistemas hamiltonianos viene de la mano de Rabinowitz, quien identificó las órbitas periódicas con los puntos críticos de un funcional, el llamado *funcional de acción*. Estos puntos críticos se pueden organizar en un complejo de cadenas de la misma forma que los puntos críticos de una función dan lugar al complejo de Morse. Ésta fue la idea genial, implementada por Floer conjuntamente con Zehnder, que asocia al problema de órbitas periódicas una nueva herramienta: la de la topología algebraica. Sin embargo, en esta nueva aventura surgen numerosas dificultades ya que el funcional de acción está definido en un espacio de dimensión infinita. El análisis jugará un papel fundamental en toda la teoría.

Cuando Poincaré buscaba órbitas periódicas usando métodos de continuación analítica en [41], demostraba que existían órbitas periódicas que se aproximan al infinito. Aunque sus métodos continúan presentes en nuestros días, las nuevas técnicas en teoría de Floer están desarrollándose a gran velocidad para *alcanzar y mejorar* a los clásicos. A pesar de todo, en muchas ocasiones la complicada cohomología de Floer que permite probar la existencia de órbitas periódicas se reduce a un cálculo de cohomología de De Rham.

Poincaré ya vaticinó en [41] la existencia de infinitas órbitas periódicas acumulándose en el infinito para el problema circular restringido de tres cuerpos. Este comportamiento también aparece en las trayectorias de algunos campos de Beltrami en variedades con borde. Esta coincidencia no es casualidad, ya que Etnyre y Ghrist [10] demostraron que existe una correspondencia entre campos de Beltrami y campos de Reeb de estructuras de contacto. Sin embargo, la novedad es que los modelos detrás del estudio de variedades con frontera (en el caso de campos de Beltrami) o de compactificaciones de variedades no compactas (como es el caso del mode-

lo compacto simpléctico singular que completa el modelo hamiltoniano) presentan singularidades. Éstas están presentes tanto en las estructuras geométricas que las modelizan como en los campos vectoriales asociados y, por tanto, también en su dinámica. Las singularidades permiten comprender, desde una perspectiva unificada, diversos fenómenos naturales en astrodinámica, como las existencia de órbitas de escape y la existencia de órbitas periódicas singulares.

¿Qué sabemos de estas estructuras singulares? El problema restringido de tres cuerpos está modelizado por una variedad simpléctica singular vía las transformaciones de regularización (relacionadas con colisión). El segundo problema descrito arriba sigue los patrones singulares del campo de Reeb en una variedad de contacto singular, extendiendo la correspondencia de Beltrami-contacto a variedades con borde, como se demuestra en [4]. Estas singularidades en dinámica celeste y de fluidos dejan una huella significativa que impregna la estructura geométrica subyacente. Las ecuaciones que gobiernan la dinámica, originalmente hamiltonianas en una variedad simpléctica, heredan una estructura singular. Cuando la dinámica se restringe a un conjunto de nivel de la función hamiltoniana, la geometría inducida es frecuentemente de tipo de contacto (singular). Las singularidades impregnan la estructura geométrica, que deja de ser una estructura simpléctica o de contacto para convertirse en una de Poisson o de Jacobi.

En este artículo daré una visión global de algunas de las conjeturas fundamentales sobre la existencia de órbitas periódicas y describiré las herramientas clásicas, fuertemente inspiradas en la clásica teoría de Morse, que se han utilizado para atacarlas (homología de Floer). La idea del artículo es extender nuestra mirada más allá de las estructuras regulares. Para ello detallaré, como ejemplo motivador, el problema restringido de tres cuerpos y la transformación de McGehee usada para estudiarlo. También describiré la geometría singular subyacente en estas transformaciones de regularización, y expondré cuáles son los resultados obtenidos en el estudio de órbitas periódicas.

El artículo acaba describiendo nuevas líneas de investigación futura en esta teoría que se basan en permutar técnicas clásicas en mecánica celeste y dinámica hamiltoniana con técnicas propias del análisis geométrico en hidrodinámica. Estas técnicas, que aparentemente pertenecen a mundos distintos, son intercambiables gracias a la existencia de un espejo entre la geometría de contacto y la geometría de los campos de Beltrami.

## 2. NUESTRO ESCENARIO: LA GEOMETRÍA SIMPLÉCTICA Y DE CONTACTO

Como matemáticos estamos acostumbrados a trabajar con la geometría de las formas y las distancias de forma riemanniana. Es decir, asociamos una métrica definida positiva a nuestra variedad. Una vez asociada esta métrica aparecen invariantes geométricos, como la curvatura, que juegan un papel fundamental en muchas áreas de las matemáticas y sus aplicaciones.

Una pregunta natural es qué ocurre si en vez de estudiar la geometría de las estructuras simétricas le asociamos una forma antisimétrica: éste es el caso de la geometría simpléctica cuyo origen se encuentra en el estudio de las ecuaciones hamiltonianas.

El movimiento de partículas en el espacio se puede formular como un sistema hamiltoniano donde la energía total del sistema es la función hamiltoniana. Las ecuaciones clásicas de Hamilton se escriben

$$\begin{cases} \dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial p}, \\ \dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q}. \end{cases} \quad (1)$$

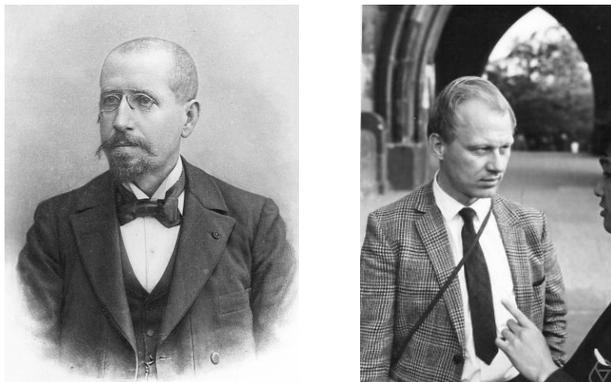
El movimiento de partículas en la dirección (posición)  $q$  en  $M$  se modeliza mediante un espacio (el espacio de fases) cuya dimensión es el doble de la dimensión del espacio de posiciones, ya que se considera a la «velocidad» como nuevas coordenadas. Éstas se conocen en física como posición y momento del espacio de fases. Hay dos objetos matemáticos asociados naturalmente a este sistema: el fibrado cotangente de las «posiciones»,  $T^*(M)$ , y una forma natural asociada, la *forma de Liouville*. Su diferencial  $\omega = -d\lambda = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$  es una 2-forma exacta no degenerada en el sentido de que la ecuación  $\iota_{X_\alpha} \omega = \alpha$  tiene una solución única, el campo  $X_\alpha$ , para cualquier forma  $\alpha$ . Para la forma exacta  $\alpha = -dH$ , siendo  $H$  una función, este campo vectorial se denomina *campo vectorial hamiltoniano* asociado a la función  $H$ . Una 2-forma  $\omega$  cerrada y no degenerada se denomina **forma simpléctica**. Las ecuaciones de Hamilton (1) coinciden con las ecuaciones del flujo del campo vectorial hamiltoniano asociado a  $H$ . Los fibrados cotangentes son los primeros ejemplos naturales de variedades simplécticas, pero hay muchos otros ejemplos simples. Por ejemplo, cualquier superficie orientable es una variedad simpléctica.

Obsérvese que de la definición de campo hamiltoniano se obtiene  $X_f(f) = df(X_f) = \omega(X_f, X_f) = 0$ , es decir, el campo hamiltoniano es tangente a las hipersuperficies  $f = \text{cte}$ . Esta idea tan natural es, en realidad, el principio de Noether que fue clave en la noción de integrabilidad de un sistema integrable.

El estudio de las propiedades geométricas de las variedades que poseen una forma simpléctica se denomina geometría simpléctica. Un hecho característico de la geometría simpléctica es que, a diferencia de la geometría riemanniana, no existen invariantes locales. Así pues, no existe la noción de *curvatura simpléctica*, y uno de los primeros teoremas de clasificación en geometría simpléctica sería el siguiente resultado, que establece un único modelo local asociado a una forma simpléctica.

**TEOREMA 1 (Darboux).** *Todas las variedades simplécticas son localmente equivalentes.*

Concretamente, Darboux demostró que, en el entorno de cualquier punto de una variedad simpléctica, podemos encontrar coordenadas locales centradas en el punto  $(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)$  tal que la estructura simpléctica se escribe localmente como  $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$ . En otras palabras, la geometría simpléctica local es la geometría del espacio de fases (fibrado cotangente  $T^*M$ ) descrita arriba.



A la izquierda Gaston Darboux y a la derecha Jürgen Moser. Fuente: Wikipedia.

Los problemas de clasificación global en geometría simpléctica son complicados. En dimensión 2, puesto que una forma simpléctica coincide con una forma de volumen, la cuestión se vuelve más sencilla. De hecho, se pueden «deformar» formas simplécticas que estén en la misma clase de cohomología siempre y cuando exista un camino de formas simplécticas realizando la deformación.

En dimensión 2, dadas dos formas simplécticas  $\omega_0$  y  $\omega_1$  en la misma clase de cohomología, i.e.  $[\omega_0] = [\omega_1]$ , podemos escribir  $\omega_1 - \omega_0 = d\alpha$ . El camino lineal de formas  $\omega_t = t\omega_1 + (1 - t)\omega_0$  es, en realidad, un camino de formas simplécticas. Las ecuaciones de Moser (que se asemejan a las ecuaciones de Hamilton descritas antes)

$$\iota_{X_t}\omega_t = -\alpha$$

permiten construir un campo  $t$ -dependiente,  $X_t$ , cuyo flujo a tiempo 1 da un difeomorfismo que conjuga ambas formas simplécticas.

Esta idea fue utilizada por Moser para clasificar las estructuras de volumen. En particular, dos estructuras simplécticas en una superficie orientable son equivalentes si pertenecen a la misma clase de cohomología. Este resultado no es cierto en dimensión superior, Dusa McDuff construyó contraejemplos en [28].

El truco descrito arriba se conoce como *truco de Moser* y, todavía en nuestros días, continúa siendo una de las técnicas más utilizadas en geometría simpléctica.

A toda estructura simpléctica  $\omega$  le podemos asociar un paréntesis de Poisson de la siguiente forma: dadas un par de funciones  $f, g \in C^\infty(M^{2n})$  definimos el paréntesis

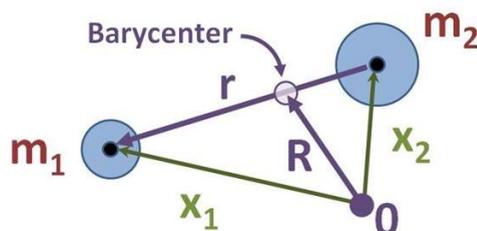
$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g),$$

siendo los campos  $X_f$  y  $X_g$  los campos hamiltonianos respecto a  $\omega$ .

Obsérvese que, en el lenguaje de paréntesis, el principio de Noether se convierte en la expresión  $\{f, f\} = 0$ . Para poder aplicar la idea de Noether a la integrabilidad necesitamos introducir nuevas integrales primeras. De la definición de campo hamiltoniano es sencillo comprobar la igualdad  $\{f, g\} = X_f(g)$ . Un sistema integrable en



A la izquierda Sofia Kovalevskaya (fuente: Wikipedia) y a la derecha Dusa McDuff (fuente: Gert-Martin Greuel, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach).

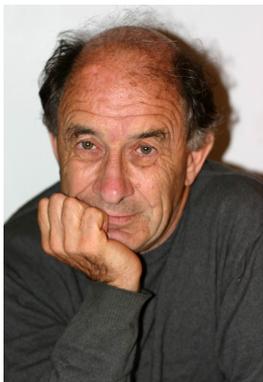


Emmy Noether (izquierda) y el problema de dos cuerpos (derecha). Fuente: Wikipedia.

una variedad simpléctica de dimensión  $2n$  viene dado por  $n$  funciones (integrales primeras) que conmutan respecto al paréntesis de Lie (es decir  $\{f_i, f_j\} = 0, \forall i, j$ ). Un ejemplo de sistema integrable es la *peonza de Kovalevskaya*, donde los momentos de inercia cumplen una relación concreta. Otros ejemplos vienen dados por el *problema de dos cuerpos*, donde se estudia la trayectoria de dos cuerpos que se atraen entre sí. En este caso, el momento angular total y el momento lineal total son integrales primeras.

De la condición  $\{f, g\} = X_f(g)$  también deducimos que este paréntesis define una derivación en cada una de las variables (regla de Leibniz). Claramente es anti-simétrica (Noether) y se puede comprobar la propiedad  $X_{\{f, g\}} = [X_f, X_g]$ , lo cual implica que cumple también la identidad de Jacobi (i.e.,  $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$  para tres funciones  $f, g$  y  $h$  cualesquiera).

En general se puede definir una estructura de Poisson no asociada a una estructura simpléctica (por lo tanto, en una variedad que no tiene por qué tener dimensión



Vladimir Arnold (fuente: Svetlana Tretyakova vía Wikipedia) y Alan Weinstein (fuente: Margo Weinstein vía Wikipedia).

par). Una estructura de Poisson general se define como un paréntesis antisimétrico en una variedad  $M$  (no necesariamente de dimensión par)  $\{\cdot, \cdot\} : \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$  que satisface las identidades de Leibniz y Jacobi.

Dado que un paréntesis de Poisson define una biderivación, en geometría de Poisson se suele trabajar con el lenguaje de bivectores. Se define un bivector  $\Pi$  como una sección del fibrado  $\Lambda^2(TM)$ . La correspondencia entre paréntesis de Poisson y bivectores queda clarificada con la fórmula  $\Pi(df, dg) = \{f, g\}$ . La condición de Jacobi impone una restricción adicional a un bivector para que sea Poisson,  $[\Pi, \Pi] = 0$ , habitualmente denominada condición de integrabilidad, donde el corchete corresponde con la extensión del corchete de Lie a los bivectores (corchete de Schouten).

Una de las herramientas clave en el estudio de los sistemas hamiltonianos es la geometría de contacto. Ésta es la geometría inducida sobre una hipersuperficie de energía conservada por un campo de Liouville transverso. Estos análogos de las variedades simplécticas en dimensión impar se denominan variedades de contacto, y su geometría se describe mediante una forma  $\alpha$  que satisface una propiedad de no integrabilidad,  $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$ . La dinámica de una variedad de contacto se rige, en gran medida, por la dinámica de los campos vectoriales Reeb  $R$  determinados por las ecuaciones  $\alpha(R) = 1$  y  $\iota_R d\alpha = 0$ .

### 3. DE ARNOLD A WEINSTEIN: LAS GRANDES CONJETURAS

Las últimas décadas han representado un periodo dorado para la topología simpléctica y de contacto (véanse, por ejemplo, los artículos tipo *survey* [9, 13, 15, 38]). Dado un sistema hamiltoniano, una de las cuestiones fundamentales que interesa a topólogos simplécticos, dinámicos y expertos en mecánica celeste, es la existencia de órbitas periódicas. No solo sigue el programa iniciado por Poincaré [41] (véase también [7]) para entender la dinámica global de un sistema dinámico, también en-

cuentra aplicaciones reales de las novedosas técnicas en homología de Floer y de contacto.

El programa analítico desarrollado por Rabinowitz, Conley y Zehnder para estudiar las órbitas periódicas fue llevado al siguiente nivel por Floer, quien vio en esta identificación de las órbitas periódicas y puntos críticos de un funcional una oportunidad para hacer una abstracción de la teoría Morse a dimensiones infinitas (el funcional en cuestión es el de acción en el espacio de lazos). Floer consiguió desarrollar su teoría inspirándose en la teoría de Morse construyendo un complejo mucho más sofisticado, el complejo de Floer.

La restricción del hamiltoniano a un conjunto de niveles revela una nueva estructura geométrica: la de la geometría de contacto y, por lo tanto, tiene sentido preguntarse si existen órbitas periódicas en las hipersuperficies de nivel dadas por el hamiltoniano. Más en general:

CONJETURA 2 (Weinstein). *El campo de Reeb de una variedad de contacto compacta admite al menos una órbita periódica.*

Taubes [42] lo demostró en dimensión 3 (véase también la demostración de Hutchings [24]). Hofer [22] lo demostró para variedades de tipo *overtwisted* utilizando curvas pseudoholomorfas.

En el terreno simpléctico destacamos la conjetura de Arnold que relaciona las órbitas periódicas con los números de Betti.

CONJETURA 3 (Arnold, 1963). *Sea  $H_t : \mathbb{R} \times M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  un hamiltoniano  $t$ -dependiente. Entonces,*

$$\#\{\text{órbitas periódicas de } X_{H_t}\} \geq \sum_{k=0}^{2n} \beta_k.$$

Como veremos en la siguiente sección, si el hamiltoniano no es dependiente del tiempo, este resultado es consecuencia de las desigualdades de Morse.

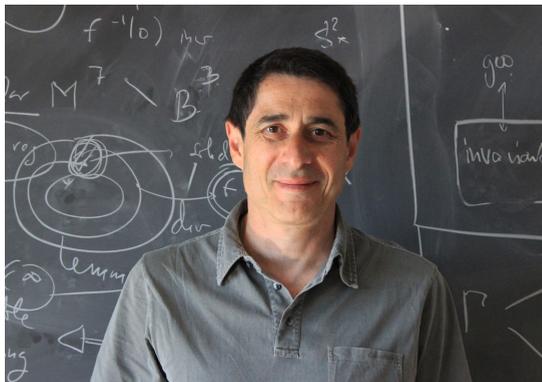
Otras conjeturas muy destacables en el terreno del estudio de órbitas periódicas son las de Conley y Seifert (en versión hamiltoniana).

La conjetura de Seifert clásica dice que cada campo continuo en la esfera 3-dimensional  $S^3$  tiene una órbita periódica. Paul Schweitzer encontró un contraejemplo  $C^1$  a esta conjetura. Más tarde, Krystina Kuperberg [27] proporcionó un contraejemplo diferenciable de tipo  $C^\infty$  usando las denominadas «trampas».

La conjetura de Conley se centra en demostrar la abundancia de órbitas periódicas. La siguiente versión fue demostrada por Ginzburg en [14]:

TEOREMA 4 (Conjetura de Conley). *Sea  $M$  una variedad compacta verificando la condición  $c_1(TM)|_{\pi_2(M)} = 0$  o negativamente monótona. Los difeomorfismos hamiltonianos  $\varphi$  de  $M$  con un número finito de puntos fijos tienen órbitas periódicas simples para cada periodo arbitrario.*

Hofer y Zehnder [23] demostraron que «casi todas» las hipersuperficies de nivel dadas por el hamiltoniano tienen órbitas periódicas para una clase muy amplia de variedades simplécticas (las que tienen capacidad de Hofer-Zehnder finita). Un



Krystina Kuperberg (fuente: Ana Kuperberg vía Wikipedia) y Viktor Ginzburg (fuente: ICMAT).

valor  $a$  del hamiltoniano  $H$  se denomina *aperiódico* si su hipersuperficie de nivel  $\{H = a\}$  no contiene órbitas periódicas. Denotemos por  $\mathcal{AP}_H$  el conjunto de valores aperiódicos; la **conjetura hamiltoniana de Seifert** establece que el conjunto  $\mathcal{AP}_H$  es vacío si  $H$  es una función propia de  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{st})$  (ver [13]). La conjetura es falsa, como se demostró en [12] para  $2n \geq 6$ , y luego en dimensión 4 en [15]. El contraejemplo usa una construcción inspirada por Kuperberg.

#### 4. DE MORSE A FLOER: LO QUE LAS SINGULARIDADES NOS CUENTAN

*I'll be your mirror  
 Reflect what you are, in case you don't know  
 I'll be the wind, the rain and the sunset  
 The light on your door to show that you're home*

The Velvet Underground & Nico

Clásicamente, la topología siempre ha sido fiel aliada de los sistemas dinámicos. Este sistema evoluciona condicionado por la «forma del espacio». Topología y geometría, también entrelazadas entre sí de forma natural, han desarrollado sinergias más allá de lo esperado, siendo la teoría de Morse un ejemplo. La teoría de Morse se encuentra en el cruce de caminos entre la geometría diferencial y la topología. La idea básica es la de reconstruir la topología de la variedad teniendo información sobre los puntos críticos de sus funciones diferenciables. Esta idea de mezclar técnicas propias de la geometría diferencial y la topología se ha labrado como una idea fértil que ha jugado un papel fundamental en la topología diferencial clásica [33] y moderna.

Los topólogos simplécticos han llevado este maridaje hasta las últimas consecuencias, desarrollando la teoría de Floer para abordar las conjeturas de Arnold y Weinstein sobre órbitas periódicas. Las ideas de Floer han dado lugar a un nuevo

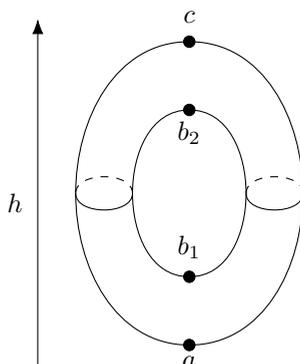


Imagen clásica de la teoría de Morse: la función altura en el toro  $f = h$  es una función de Morse.

mundo que se encuentra en su punto álgido en la actualidad: la teoría de Floer [11]. Estas ideas están profundamente inspiradas por la teoría de Morse, ya que reemplaza las singularidades de funciones diferenciables por los puntos críticos de funciones de acción definidas en el espacio de lazos.

Repasemos a continuación los rasgos más destacables de ambas teorías (para más detalles, consultar [2] y [3]).

La homología de Morse se construye a partir de los elementos que detallamos a continuación.

Dada una variedad diferenciable  $M$  de dimensión  $n$ , diremos que una función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de Morse si todos sus puntos críticos son no degenerados.

El lema de Morse da una forma local normal de cómo se expresa la función en un sistema de coordenadas local en función del índice del punto crítico<sup>1</sup>.

LEMA 5 (Lema de Morse). *Sea  $p \in M$  un punto crítico de  $f$  de índice  $k$ . Entonces existe un sistema local de coordenadas  $(U, (x_1, \dots, x_n))$  centradas en  $p$  tal que*

$$f|_U = f(p) - x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2.$$

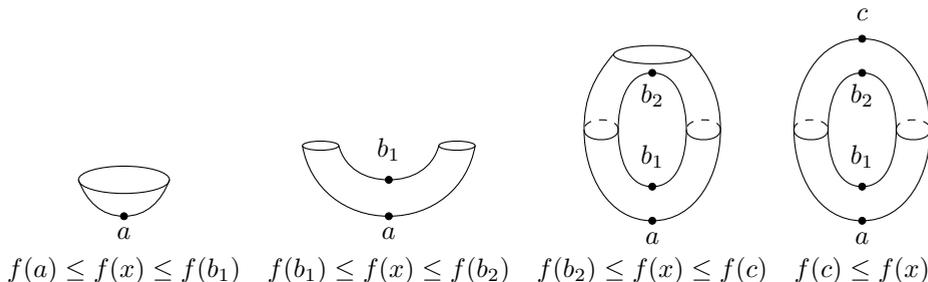
Dada una función de Morse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  se puede construir un complejo de cadenas tomando como generadores los puntos críticos de  $f$  ordenados por el índice. Estos puntos están relacionados por el flujo del gradiente riemanniano asociado a una métrica riemanniana  $g$ ,  $-\text{grad}_g f$ . El operador de borde del complejo de cadenas se define como la cuenta de las trayectorias que conectan puntos críticos de distintos índices. Concretamente, se define por la fórmula

$$\partial_k p = \sum_{q \in \text{Crit}_{k-1}(f)} n_g(p, q) q,$$

<sup>1</sup>Este índice coincide con el índice de la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana en el punto en cualquier carta.

donde  $n_g(p, q)$  denota al número de trayectorias conectando  $p$  y  $q$ , y  $\text{Crit}_k(f)$  a los puntos críticos de índice  $k$ .

Un punto importante de esta teoría es que se puede demostrar que la homología de Morse no depende ni de la función de Morse escogida ni de la métrica. De hecho, la homología de Morse es isomorfa a la homología celular y es, por tanto, un invariante topológico.



Reconstrucción de la topología del toro a partir de su descomposición celular y los índices de la función de Morse.

Debido a la invariancia topológica, el isomorfismo con la homología singular se obtiene como consecuencia de las desigualdades de Morse teniendo en cuenta que los generadores de la homología de Morse son los puntos críticos de un determinado índice.

TEOREMA 6 (Desigualdades de Morse). *Dada  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Morse, denotamos por  $c_k$  el número de puntos críticos de índice  $k$ , y por  $\beta_k$  el número  $k$ -ésimo de Betti de  $M$ . Entonces,*

$$c_k \geq \beta_k.$$

En particular,

$$\# \text{Crit}(f) \geq \sum_{k=0}^n \beta_k.$$

En particular, las desigualdades de Morse demuestran la conjetura de Arnold en el caso en que el hamiltoniano no sea dependiente del tiempo ya que, al ser la forma simpléctica no degenerada, los puntos críticos de  $H$  son ceros del campo hamiltoniano  $X_H$ , que se considera un caso particular de órbita periódica.

Entre las aplicaciones de las ideas de Morse a modelos infinito-dimensionales destacamos la de Floer, donde ambos, índice y coíndice, son infinito dimensionales. Floer pertenece a la escuela de Conley y Zehnder, donde se aplicaban técnicas analíticas a problemas de dinámica hamiltoniana y, más concretamente, al estudio de las órbitas periódicas. El estudio de dichas órbitas se consideró desde los tiempos de Poincaré, utilizando técnicas clásicas de sistemas dinámicos. El enfoque variacional para estudiar las órbitas periódicas de los sistemas hamiltonianos comenzó con la

contribución clave de Rabinowitz, Conley y Zehnder, quienes aplicaron las ideas del cálculo variacional para encontrar este tipo de órbitas (ver, por ejemplo, [22] y [23]).

Más concretamente, el punto de partida es el siguiente. Estamos interesados en las soluciones periódicas (de periodo 1) de la ecuación

$$\dot{x}(t) = X_{H_t}(x(t)),$$

donde  $H_t$  es una función hamiltoniana que depende del tiempo,  $t$ . Estas soluciones se pueden pensar como aplicaciones diferenciables  $x : \mathbb{S}^1 \rightarrow M$ , que son solución de la ecuación anterior. Podemos considerar el conjunto  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1, M) = \{x : \mathbb{S}^1 \rightarrow M \mid x \text{ diferenciable}\}$ . Este espacio no tiene por qué ser conexo (dos lazos no homótopos no están en la misma componente conexa), por eso consideramos  $\mathcal{LM} = \{x \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1, M) \mid x \text{ contractible}\}$ , con la topología  $\mathcal{C}^\infty$ . Además, nos restringiremos a variedades esféricas que cumplen  $\int_{S^2} \psi^* \omega = 0$  para cualquier aplicación diferenciable  $\psi : S^2 \rightarrow M$  (esta condición la cumplen, por ejemplo, las variedades cuyo segundo grupo de homotopía se anula).

Definimos el *funcional de acción* como la aplicación  $\mathcal{A}_H : \mathcal{LM} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\mathcal{A}_H(x) = \int_0^1 H_t(x(t)) dt - \int_{D^2} u^* \omega,$$

siendo  $u$  cualquier extensión de  $x$  al disco (aquí utilizamos la condición de asfericidad).

La diferencial de  $\mathcal{A}_H$  en el punto  $x$  en la dirección  $Y \in T_x \mathcal{LM}$  se escribe

$$d\mathcal{A}_H(x) \cdot Y = \int_0^1 \omega(\dot{x}(t) - X_{H_t}(x(t)), Y(t)) dt.$$

Como la forma simpléctica  $\omega$  es no degenerada, esto implica que las soluciones de la ecuación que queremos se corresponden con los puntos críticos. Es decir, esto demuestra el siguiente teorema de Rabinowitz:

**TEOREMA 7 (Rabinowitz).** *Para variedades compactas esféricas existe una correspondencia biyectiva entre puntos críticos del funcional de acción y órbitas periódicas.*

Con Rabinowitz, la búsqueda de órbitas periódicas dejó de seguir recetas simplificadas de cálculo de secciones de Poincaré y se convirtió en un delicado estudio de puntos críticos de un funcional en el espacio de lazos. Rabinowitz deja, pues, la búsqueda de órbitas periódicas en manos del análisis más abstracto.

Floer contribuyó con un gran paso adelante para acercar el análisis en dimensión infinita recurriendo al imaginario colectivo del topólogo algebraico que persigue diagramas para resolver un problema «de forma algebraica» a partir de sucesiones exactas largas. Así, Floer imitó la idea de reconstruir la topología de la variedad a partir de sus puntos críticos (como lo hace la teoría de Morse [33]) y construyó



Andreas Floer. Fuente: Wikipedia.

el complejo de Floer conectando este enfoque variacional con la teoría de curvas pseudoholomorfas.

El complejo de Floer tiene como generadores las soluciones de la ecuación

$$\dot{x} = X_{H_t}(x)$$

identificadas por Rabinowitz como los puntos críticos del funcional de acción. De la misma manera que en la teoría de Morse los puntos venían clasificados por un índice (el de la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana en el punto crítico), en el caso de Floer se utiliza el índice de Conley-Zehnder. Para definir la homología de Floer se necesita introducir el concepto de estructura casi compleja en una variedad. Una estructura casi compleja  $J$  en  $M$  es una sección de  $TM \otimes T^*M$  tal que

$$J^2 = -\text{Id}.$$

Diremos que es calibrada por la forma simpléctica  $\omega$  si

- $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y), \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  (el conjunto de campos vectoriales);
- $\omega(X, JX) > 0, \forall X \in \mathfrak{X}(M)$ .

En particular, induce una estructura riemanniana en  $M$ . La forma de definir el análogo de las líneas de gradiente en homología de Morse es considerar las soluciones de la *ecuación de Floer*. Las soluciones en  $(M, \omega, J)$  vienen dadas por las aplicaciones  $u : (-\epsilon, \epsilon) \times S^1 \rightarrow M$  que cumplen

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J_u \frac{\partial u}{\partial t} + \text{grad}_u H_t = 0,$$

que son curvas pseudoholomorfas. Se requiere «energía finita» para conseguir que  $u$  conecte efectivamente los puntos críticos:

$$E(u) = - \int_{\mathbb{R}} d\mathcal{A}_H \cdot \frac{\partial u}{\partial s} = \iint_{\mathbb{R} \times S^1} \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right|^2 < +\infty.$$

En estas condiciones es posible definir el operador de borde del complejo, contando en el espacio de módulos de soluciones de la ecuación de Floer asociado a dos puntos. De esta forma, se define una homología de Floer (solo para variedades esféricas, lazos contractibles, y con ciertas condiciones adicionales necesarias que no describo con detalle aquí, como la condición de no degeneración). Un resultado fundamental de esta teoría es que la homología de Floer (como pasaba en el caso de la homología de Morse) no depende de los datos auxiliares usados para definirla. Por lo tanto, no depende de  $\omega$ , de  $H_t$  ni de  $J$ , lo cual no deja de ser sorprendente (o, decepcionante, según se mire), ya que el origen de toda la teoría era detectar las órbitas periódicas de un hamiltoniano concreto.

Esto nos dice que, en particular, la homología de Floer es isomorfa a la de Morse (con un corrimiento de índice), siendo un invariante topológico de la variedad.

**TEOREMA 8.** *La homología de Floer,  $HF$ , de una variedad simpléctica  $(M^{2n}, \omega)$  es isomorfa a la homología de Morse,  $HM$  (con un corrimiento de índice):*

$$HF_{\bullet}(M) \cong HM_{\bullet+n}(M).$$

Eso demuestra, en particular, la conjetura de Arnold para variedades esféricas.

## 5. LA GEOMETRÍA SIMPLÉCTICA Y DE CONTACTO DEL PROBLEMA RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS

Uno de los problemas que surgen en dinámica espacial es el de describir la trayectoria de varios cuerpos cuyo movimiento viene condicionado por su atracción mutua.

El problema se conoce como el clásico problema de tres cuerpos o, más generalmente, el problema de  $n$  cuerpos. En sus versiones restringidas, uno de los cuerpos tiene masa despreciable y se intenta aproximar por la versión de  $n - 1$  cuerpos.

Para el problema de dos cuerpos, tanto el momento total lineal  $L$  como el angular  $J$  son integrales primeras del sistema. Eso quiere decir que las órbitas están trazadas sobre las subvariedades  $L = \text{cte}$  y  $J = \text{cte}$ . Clásicamente, la integración del problema de dos cuerpos se produce al simplificar primero por  $L$  y conseguir convertir el problema inicial en el conocido problema de Kepler.

El problema de tres cuerpos dista de ser teórico, ya que el sistema Tierra-Luna-Sol sigue ese paradigma. Los problemas restringidos aparecen cuando consideramos el movimiento de un satélite.

Es conocido desde Poincaré que el problema de tres cuerpos es no integrable; sin embargo, gran parte de la teoría deriva de conseguir diversos resultados, como el de la existencia de órbitas periódicas, a partir de los problemas restringidos. El lenguaje simpléctico permite formular y tratar el problema de las trayectorias de los campos hamiltonianos de forma efectiva.

Centrémonos ahora en el problema circular restringido (plano) de tres cuerpos. En éste, consideramos el movimiento de un cuerpo sin masa bajo el campo gravitacional de otros dos cuerpos que siguen las leyes de Kepler. La versión plana del problema restringido supone que el movimiento tiene lugar en un plano. El hamiltoniano coincide con la energía total del sistema, que es la suma de las energías cinéticas y potencial:

$$H(q, p) = \frac{\|p\|^2}{2} + \frac{1 - \mu}{\|q - q_1\|} + \frac{\mu}{\|q - q_2\|} = T + U$$

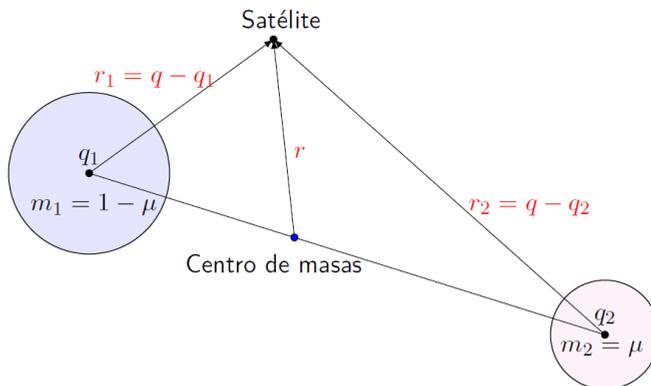
donde  $\mu$  es la masa reducida del sistema.

Al estudiar el problema restringido circular plano considerando las simetrías del sistema, conviene realizar un cambio a coordenadas polares  $q = (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ . Tras el correspondiente cambio en las coordenadas momento, la función hamiltoniana queda

$$H(r, \alpha, P_r, P_\alpha) = \frac{P_r^2}{2} + \frac{P_\alpha^2}{2r^2} + U(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$$

donde  $P_r, P_\alpha$  son los momentos asociados y  $U(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$  representa la energía potencial del sistema en las nuevas coordenadas. El cambio de McGehee se utiliza para estudiar el comportamiento de las órbitas próximas al infinito. Este cambio viene dado por

$$r = \frac{2}{x^2}. \tag{2}$$



Problema restringido de tres cuerpos.

La función hamiltoniana en las nuevas coordenadas momento  $P_r = -\frac{x^3}{4}P_x$  se escribe

$$H(r, \alpha, P_r, P_\alpha) = \frac{x^6 P_x^2}{32} + \frac{x^4 P_\alpha^2}{8} + U(x, \alpha).$$

Si consideramos el cambio de McGehee sin cambiar las coordenadas momento correspondientes (2), obtenemos una función hamiltoniana más simple, pero la forma simpléctica adquiere una *singularidad* y deja de ser una forma diferenciable en  $x = 0$ :

$$\omega = \frac{4}{x^3} dx \wedge dP_r + d\alpha \wedge dP_\alpha.$$

Sin embargo, el dual de esta forma tiene sentido como estructura de Poisson. El estudio de estas formas diferenciales con singularidades ha sido formalizado en [31] en el caso de orden 1, y son denominadas *b*-formas. La notación de *b* viene del estudio de variedades con borde. El estudio de su geometría simpléctica y de Poisson se ha realizado en [19]. En particular, esta forma se denomina forma *b*<sup>3</sup>-simpléctica.

Este modelo presenta un tipo de singularidades que, más generalmente, son del tipo:

- (*b*<sup>*m*</sup>-simplécticas)

$$\omega = \frac{1}{x_1^m} dx_1 \wedge dy_1 + \sum_{i \geq 2} dx_i \wedge dy_i;$$

- (*m*-dobladas)

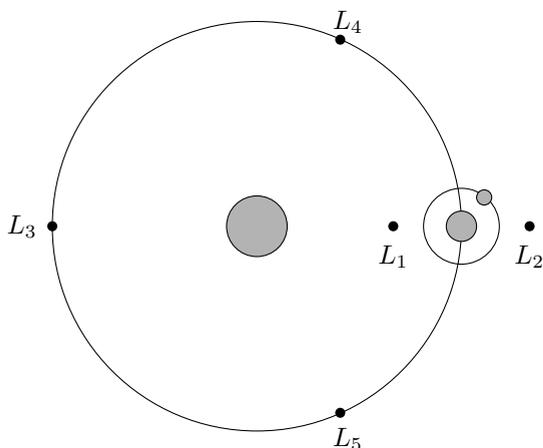
$$\omega = x_1^m dx_1 \wedge dy_1 + \sum_{i \geq 2} dx_i \wedge dy_i.$$

En la siguiente sección analizaremos en detalle y describiremos con total propiedad estas estructuras.

Ahora pretendemos analizar la geometría de contacto del problema restringido de tres cuerpos y estudiar el efecto de las posibles singularidades. En particular describimos una aplicación de la conjetura de Weinstein a este problema.

*Geometría de contacto:* La restricción a  $H = \text{cte}$  induce una estructura de contacto cuando existe un *campo de Liouville* transverso a la hipersuperficie. En el caso singular, esta estructura puede admitir singularidades.

Albers, Frauenfelder, Van Koert y Paternain [1] dieron un paso adelante en el estudio teórico de las órbitas periódicas del problema restringido de tres cuerpos aplicando la conjetura de Weinstein en la dimensión 3 a este problema. Su estrategia es considerar los conjuntos de niveles de los hamiltonianos y estudiar la existencia de campos vectoriales de Liouville transversos (condición requerida para tener una estructura de contacto inducida). Sin embargo, como la compacidad es una hipótesis necesaria para que la prueba de Taubes funcione, Albers, Frauenfelder, Van Koert y Paternain tuvieron que compactificar primero usando la técnica de regularización clásica de Moser [26], por lo que prueban la existencia de órbitas periódicas no para el problema inicial sino para el regularizado.



Esquema de los puntos de Lagrange.

Utilizando su método, no es posible localizar las órbitas periódicas más allá de localizarlas en una hipersuperficie de nivel del hamiltoniano. El estudio de la topología del problema depende en gran medida de la geografía de los puntos lagrangianos, que son los puntos críticos del hamiltoniano, representados en la figura. En [1], los autores prueban que, para  $c < H(L_1)$ , la hipersuperficie de nivel  $c$  es una variedad de contacto y aplican la conjetura de Weinstein para demostrar que el problema restringido de tres cuerpos tiene una órbita periódica para cada valor de la energía  $c < H(L_1)$ .

Los resultados de [1] identifican la topología de contacto en los conjuntos de nivel de  $H$  y prueban la existencia de órbitas periódicas, pero no localizan estas órbitas con respecto a la línea en el infinito/conjunto de colisiones (ya que la regularización de Moser elimina este conjunto singular). Sin embargo, éste no es el caso de la regularización de McGehee [30], donde la línea en el infinito se identifica con el conjunto singular de la estructura  $b^3$ -simpléctica descrita arriba.

A continuación, motivados por estos ejemplos, formalizamos el estudio de esta geometría simpléctica singular.

## 6. UN CURSO ACELERADO EN GEOMETRÍA SIMPLÉCTICA SINGULAR

En esta sección damos un repaso rápido a los conceptos fundamentales desarrollados en geometría  $b$ -simpléctica y geometría singular siguiendo fundamentalmente las referencias [16], [17], [18], [19], [20] y [21].

Las variedades  $b$ -simplécticas o  $b$ -Poisson corresponden a un tipo de variedades de Poisson que son de dimensión par (digamos que de dimensión  $2n$ ) tal que el producto exterior de orden  $n$  del bivector de Poisson  $\Pi^n$  corta la sección cero de  $\Lambda^n TM$  de forma transversa. Estas variedades son simplécticas fuera del conjunto donde  $\Pi^n$  se anula (conocido como **lugar singular**,  $Z$ ).

El estudio de las variedades de  $b$ -Poisson se puede abordar usando técnicas próximas a las simplécticas. Para ello, es necesario poder tratar dichas estructuras como formas. Eso se puede conseguir cambiando el fibrado cotangente por otro fibrado y redefiniendo las nuevas formas como secciones diferenciables de un nuevo fibrado que esconde las singularidades.

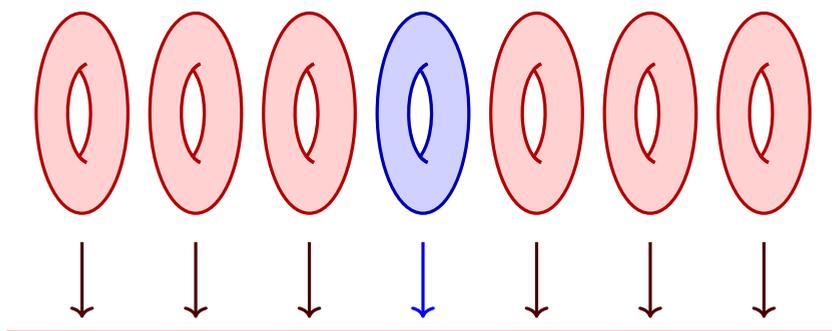
Para definir este fibrado consideramos sus secciones locales: un  $b$ -campo es un campo tangente a la hipersuperficie singular  $Z$ . Usando un argumento *à la Serre*, el espacio de  $b$ -campos se puede identificar con secciones de un nuevo fibrado denominado **fibrado  $b$ -tangente**,  ${}^b TM$ . Las  $b$ -formas son secciones del álgebra exterior de su dual (el fibrado  $b$ -cotangente  ${}^b T^*M := ({}^b TM)^*$ ) y han sido utilizadas ampliamente por Melrose para estudiar el teorema del índice en variedades con borde [31], y por Nest y Tsygan [37] para el estudio de la cuantización por deformación de variedades con borde.

Si imponemos tangencia a la hipersuperficie singular  $Z$  hasta orden  $m$ , obtenemos un nuevo fibrado, el  $b^m$ -tangente, y las formas tienen singularidades de orden  $m$  y se denominan  $b^m$ -formas. Una  $b$ -forma simpléctica es una  $b$ -forma de grado 2, cerrada y no degenerada como sección de  $\Lambda^2({}^b T^*M)$ . En [19] probamos que hay una correspondencia entre  $b$ -formas simplécticas y estructuras de  $b$ -Poisson.

En particular, se puede definir un complejo de  $b$ -formas que da lugar a la  $b$ -cohomología, que es isomorfa a la cohomología de De Rham suma directa con la cohomología de  $Z$  en grado  $-1$ . El uso del lenguaje de estas estructuras de Poisson con el lenguaje de formas ha permitido importar técnicas del mundo simpléctico, como la técnica del camino de Moser. En particular, gracias a ello se ha podido demostrar un teorema de coordenadas acción-ángulo para las variedades  $b$ -simplécticas [25], obteniendo importantes aplicaciones a teoría KAM, útiles para el estudio de teoría de perturbaciones en variedades con borde.

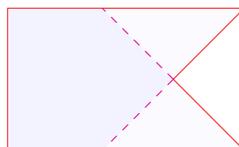
Una estructura  $b$ -contacto en una variedad de dimensión  $2n+1$  viene dada por una  $b$ -forma que verifica  $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$ . En total analogía con el espejo  $b$ -simpléctico/ $b$ -Poisson: una estructura de  $b$ -contacto se puede visualizar como una forma de *Jacobi structure* en una variedad de dimensión impar.

Las variedades  $b$ -simplécticas se asemejan a las variedades simplécticas dobladas. De hecho, en [21] demostramos que una variedad  $b$ -simpléctica se puede desingularizar como una variedad simpléctica doblada. Una estructura simpléctica doblada viene dada por una 2-forma  $\omega$  en una variedad  $M^{2n}$  simpléctica fuera de  $Z$ , tal que



Toros de Liouville asociados a un sistema integrable. En el centro, con distinto color, el toro de Liouville *singular*.

$\omega^n$  corta la sección cero del fibrado  $\Lambda^n(TM)$  transversalmente y cuya restricción a  $Z$  tiene grado maximal. Las variedades simplécticas dobladas se pueden visualizar como variedades simplécticas que se doblan por la hipersuperficie singular (de hecho su estudio está relacionado con el estudio de las variedades de origami [40]), que son denominadas así por el estudio en papiroflexia y que son variedades dobladas. Las variedades tóricas de origami se pueden reconstruir a partir de una superposición de polítopos de Delzant (puzzle de variedades tóricas).



A la izquierda, auténtico origami (fuente: Wikipedia); a la derecha, origami asociado al *blow-up* radial de dos superficies de Hirzebruch.

## 7. EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE TRES CUERPOS Y GEOMETRÍA SINGULAR: NUEVOS RESULTADOS

Ahora que ya disponemos del lenguaje de formas singulares, retomemos los resultados de Albers, Frauenfelder, Van Koert y Paternain [1] sobre el problema restringido de tres cuerpos plano y circular. Lo hacemos en el contexto singular e intentamos obtener y localizar nuevas órbitas periódicas.

Empezamos describiendo el hamiltoniano en coordenadas rotacionales:  $H(q, p) = \frac{|p|^2}{2} - \frac{1-\mu}{|q-q_E|} + \frac{\mu}{|q-q_M|} + p_1q_2 - p_2q_1$ . Tras efectuar el cambio de McGehee nos preguntamos si la hipersuperficie de nivel  $c$  tiene una estructura de  $b^3$ -contacto.

Junto con Oms demostramos un nuevo resultado sobre la existencia de órbitas periódicas para el problema restringido de los tres cuerpos (plano y circular):

TEOREMA 9 (Miranda-Oms, [35]). *El campo  $Y = p \frac{\partial}{\partial p}$  es un  $b^3$ -campo de Liouville que es transverso a la hipersuperficie de nivel  $c$  para  $c > 0$ , y las hipersuperficies de nivel  $(\Sigma_c, \iota_Y \omega)$  para  $c > 0$  son variedades de  $b^3$ -contacto.*

1. *El lugar singular es un cilindro.*
2. *El campo de Reeb admite infinitas órbitas periódicas en el conjunto singular.*

¿Qué ocurre con las variedades de  $b^m$ -contacto en general? ¿Se puede demostrar un teorema de Weinstein para los campos de Reeb singulares?

Más en general: ¿qué ocurre con los análogos al teorema hamiltoniano de Seifert en el contexto singular? Una primera idea sería desingularizar las estructuras usando las técnicas de desingularización desarrolladas conjuntamente con Guillemin y Weitsman en [21] donde, en particular, se deducen obstrucciones topológicas a la existencia de estructuras  $b^m$ -simplécticas sobre una variedad dada:

- Toda variedad  $b^{2k}$ -simpléctica admite una estructura simpléctica.
- Cualquier variedad  $b^{2k+1}$ -simpléctica admite una estructura simpléctica doblada.

El problema de aplicar las técnicas de desingularización y luego aplicar la conjetura de Weinstein (regular), Hamiltoniana-Seifert (regular), etc., es que el funcional de acción puede no depender de forma diferenciable de la deformación que lleva las estructuras  $b^{2m}$  a las estructuras regulares.

No obstante, pudimos demostrar el siguiente resultado:

TEOREMA 10 (Miranda-Oms, [35]). *Cualquier variedad de  $b^m$ -contacto 3-dimensional con superficie singular compacta  $Z$  admite infinitas órbitas periódicas localizadas en  $Z$ .*

Un punto clave de la demostración de este teorema es que el campo de Reeb es tangente a la superficie crítica  $Z$ , que a su vez es simpléctica. Además, el campo de Reeb es hamiltoniano a lo largo de  $Z$ , de hamiltoniano  $H_Z$ . Las órbitas periódicas surgen como las soluciones regulares de la ecuación  $H_Z = \text{cte}$  en dimensión 2.

En [35] también dimos un resultado de existencia de órbitas periódicas en variedades denominadas *overtwisted*, no compactas, adaptando los resultados de [22] para estructuras no compactas. En particular, conseguimos nuevos resultados en el caso singular, ya que dada una variedad de  $b^m$ -contacto  $M$  con hipersuperficie singular  $Z$ ,  $M \setminus Z$  es una variedad de contacto no compacta.

A pesar de todo, en [35] queda pendiente entender cómo buscar «órbitas singulares». Encontrar estas órbitas singulares es interesante, ya que incluye una serie de órbitas relevantes en sistemas dinámicos: como las órbitas heteroclínicas y las órbitas homoclínicas. Curiosamente, también incluye el estudio de trayectorias de escape en mecánica celeste ya que, en muchas ocasiones, éstas se pueden compactificar como órbitas periódicas tras utilizar transformaciones de regularización.

Una estrategia para conseguir esta hazaña sería repetir el «recetario» de Rabinowitz y Floer [11] y permitir órbitas que fuesen topológicamente círculos con puntos marcados como soluciones críticas del funcional de acción. Para ello, deberíamos cambiar la estructura diferenciable del espacio de lazos y extender los complejos de Floer para que dichas soluciones sean admisibles.



En la izquierda, órbitas singulares. En la derecha, órbitas singulares vs. trayectorias de escape.

Otro punto de vista se centra en buscar trayectorias de escape como primera aproximación a encontrar las órbitas singulares periódicas, dado que en un pequeño entorno de la hipersuperficie singular coinciden. Este punto de vista es interesante desde la perspectiva de astrodinámica, ya que las trayectorias de escape (véanse, por ejemplo, los trabajos [32], [7] y [8]) son una de las cuestiones centrales de su estudio y las variedades  $b^m$ -simplécticas o  $b^m$ -contacto [34] se pueden pensar, en numerosas ocasiones, como compactificaciones de modelos simplécticos o de contacto no compactos.

## 8. MIRANDO HACIA EL FUTURO A TRAVÉS DEL ESPEJO

*'It seems very pretty,' she said when she had finished it, 'but it's RATHER hard to understand!' (You see she didn't like to confess, even to herself, that she couldn't make it out at all.) 'Somehow it seems to fill my head with ideas—only I don't exactly know what they are!*

Lewis Carroll,

Through the Looking-Glass: And What Alice Found There.

En esta última sección desvelamos nuevas estrategias de futuro para demostrar la existencia de órbitas singulares y órbitas de escape. Como Alicia, necesitamos nuevas técnicas que nos permitan entender el problema que consideramos atractivo, pero difícil de entender. En particular, necesitamos un espejo que permita transformar nuestra estructura de contacto (simpléctica. . .) en otra estructura matemática donde la búsqueda de órbitas singulares o trayectorias de escape se pueda conseguir con nuevas técnicas.

Para las estructuras de contacto, Etnyre y Ghrist [10] demostraron que existe una correspondencia entre campos de Reeb de una estructura de contacto y campos de Beltrami.

Recordamos brevemente qué son los campos de Beltrami y qué técnicas de la hidrodinámica permiten importar a nuestro terreno que nos permitan avanzar en

el estudio de las órbitas singulares. Una excelente referencia para introducirse en el estudio de los campos de Beltrami es el artículo [39].

Las ecuaciones de Euler modelizan la dinámica de un fluido no viscoso e incompresible. Clásicamente, escritas en el contexto euclídeo 3-dimensional, se pueden generalizar para cualquier métrica y cualquier variedad 3-dimensional  $(M^3, g)$  como

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t} + \nabla_X X = -\nabla P, \\ \operatorname{div} X = 0, \end{cases}$$

donde  $X$  es la velocidad,  $\nabla$  el gradiente riemanniano y  $P$  la presión. La función de Bernoulli está dada por  $B = P + \frac{1}{2}g(X, X)$ . Cuando el flujo no depende del tiempo, obtenemos las llamadas *soluciones estacionarias*. Denotando por  $\alpha = \iota_X g$  y por  $\mu$  el volumen asociado, las ecuaciones de Euler estacionarias se pueden escribir como

$$\begin{cases} \iota_X d\alpha = -dB, \\ d\iota_X \mu = 0. \end{cases}$$

Una clase importante de soluciones estacionarias la dan los campos de Beltrami (que incluyen los flujos ABC y los campos de Hopf). Los campos de Beltrami verifican  $\operatorname{rot} X = fX$ , con  $f \in C^\infty(M)$ . Los campos de Beltrami con  $f \neq 0$  se llaman *rotacionales*. Si  $X$  es un campo de Beltrami rotacional que no se anula, entonces la 1-forma  $\alpha = \iota_X g$  es de contacto.

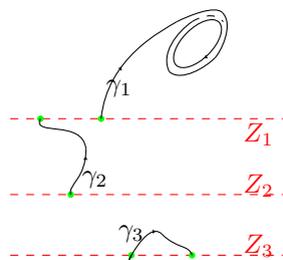
De hecho, el espejo contacto/Beltrami funciona en las dos direcciones:

**TEOREMA 11** (Etnyre y Ghrist, [10]). *Existe una correspondencia (módulo reparametrización) entre campos de Beltrami rotacionales no singulares y campos de Reeb para alguna estructura de contacto.*

Usando esta identificación, en [4] probamos que dicha correspondencia se puede extender a variedades de  $b$ -contacto que a su vez modelizan variedades con borde. En [5] demostramos que la correspondencia se puede generalizar a cualquier dimensión impar.

Etnyre y Ghrist ya utilizaron el espejo cuando aplicaron la conjetura de Weinstein en dimensión 3, para demostrar la existencia de órbitas periódicas para los campos de Beltrami.

En [36] demostramos que podemos aplicar el teorema 10 de la sección anterior a través del espejo. Lo interesante es que, en numerosos casos, la función hamiltoniana  $H_Z$  tal que  $X_{H_Z|_Z} = R|_Z$  (campo de Reeb) es una autofunción del laplaciano asociado a la métrica de la correspondencia Reeb/Beltrami. Por lo tanto, se pueden aplicar las técnicas de Uhlenbeck [43] de análisis geométrico para demostrar la existencia genérica de órbitas singulares periódicas para un conjunto muy representativo de estructuras de contacto.



Diversas órbitas de escape ( $\gamma_1$  no es periódica).

La técnica también permite dar cotas inferiores sobre el número de órbitas de escape utilizando las desigualdades de Morse que hemos presentado en la sección 4 de este artículo.

Este hallazgo abre nuevas puertas para resolver muchos problemas abiertos en mecánica celeste sobre trayectorias de escape utilizando técnicas propias del análisis geométrico. Pretendemos explorar los análogos en dimensión superior que permitirían, por ejemplo, abordar más precisamente el estudio iniciado por Xia [6] sobre singularidades sin colisión y órbitas de escape en el problema de cinco cuerpos, así como otros problemas en mecánica celeste (ver también [8], [26], [29], [30], [32] y [41]).

AGRADECIMIENTOS: Estoy muy agradecida a Joaquim Brugués Mora y Cédric Oms por su inestimable ayuda con las ilustraciones de este artículo. Agradezco a Antonio Viruel la invitación a escribirlo y su valioso tiempo durante la edición del mismo. Mi investigación está financiada por un premio ICREA Academia 2016, y parcialmente por los proyectos de ministerio MTM2015-69135-P (MINECO/FEDER) y PID2019-103849GB-I00 y de la Generalitat de Catalunya 2017SGR932 (AGAUR).

## REFERENCIAS

- [1] P. ALBERS, U. FRAUENFELDER, O. VAN KOERT Y G. PATERNAIN, Contact geometry of the restricted three-body problem, *Comm. Pure Appl. Math.* **65** (2012), 229–263.
- [2] M. AUDIN Y M. DAMIAN, *Morse theory and Floer homology*, Universitext, Springer, London, 2014.
- [3] J. BRUGUÉS, *Morse theory and Floer theory*, Tesis de Máster, UPC, 2019.
- [4] R. CARDONA, E. MIRANDA Y D. PERALTA, Euler flows and singular geometric structures, *Philos. Trans. Roy. Soc. A* **377** (2019), no. 2158, 20190034, 15 pp.
- [5] R. CARDONA, E. MIRANDA, D. PERALTA Y F. PRESAS, Universality of Euler flows and flexibility of Reeb embeddings, ArXiv:1911.01963 (2020).
- [6] A. CHENCINER, À l’infini en temps fini, Séminaire Bourbaki, Vol. 1996/97, *Astérisque* **245** (1997), Exp. No. 832, 5, 323–353.
- [7] A. CHENCINER, Poincaré and the three-body problem, *Henri Poincaré, 1912–2012*, 51–149, Progress in Mathematical Physics 67, Birkhäuser/Springer, Basel, 2015.
- [8] N. DUIGNAN, R. MOECKEL, R. MONTGOMERY Y G. YU, Chazy-Type asymptotics and hyperbolic scattering for the  $n$ -body problem, ArXiv:1910.05871 (2019).
- [9] Y. ELIASHBERG, Symplectic topology in the nineties. Symplectic geometry, *Differential Geom. Appl.* **9** (1998), 59–88.
- [10] J. ETNYRE Y R. GHRIST, Contact topology and hydrodynamics I. Beltrami fields and the Seifert conjecture, *Nonlinearity* **13** (2000), 441–458.
- [11] A. FLOER, Symplectic fixed points and holomorphic spheres, *Comm. Math. Phys.* **120** (1989), 575–611.

- [12] V. GINZBURG, A smooth counterexample to the Hamiltonian Seifert conjecture in  $\mathbb{R}^6$ , *Internat. Math. Res. Notices* **13** (1997), 641–650.
- [13] V. GINZBURG, The Hamiltonian Seifert conjecture: examples and open problems, *Proceedings of the Third European Congress of Mathematics, Barcelona, 2000*, 547–555, Progress in Mathematics 202, vol. II, Birkhäuser, 2001.
- [14] V. GINZBURG, The Conley conjecture, *Ann. of Math. (2)* **172** (2010), 1127–1180.
- [15] V. GINZBURG Y B. GÜREL, A  $C^2$ -smooth counterexample to the Hamiltonian Seifert conjecture in  $\mathbb{R}^4$ , *Ann. of Math. (2)* **158** (2003), 953–976.
- [16] M. GUALTIERI Y S. LI, Symplectic groupoids of log symplectic manifolds, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **11** (2014), 3022–3074.
- [17] M. GUALTIERI, S. LI, A. PELAYO Y T. RATIU, The tropical momentum map: a classification of toric log symplectic manifolds, *Math. Ann.* **367** (2017), 1217–1258.
- [18] V. GUILLEMIN, E. MIRANDA Y A. R. PIRES, Codimension one symplectic foliations and regular Poisson structures, *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)* **42** (2011), 1–17.
- [19] V. GUILLEMIN, E. MIRANDA Y A. R. PIRES, Symplectic and Poisson geometry on  $b$ -manifolds, *Adv. Math.* **264** (2014), 864–896.
- [20] V. GUILLEMIN, E. MIRANDA, A. R. PIRES Y G. SCOTT, Toric actions on  $b$ -symplectic manifolds, *Int. Math. Res. Not. IMRN.* **14** (2015), 5818–5848.
- [21] V. GUILLEMIN, E. MIRANDA Y J. WEITSMAN, Desingularizing  $b^m$ -symplectic structures, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **10** (2019), 2981–2998.
- [22] H. HOFER, Pseudoholomorphic curves in symplectizations with applications to the Weinstein conjecture in dimension three, *Invent. Math.* **114** (1993), 115–563.
- [23] H. HOFER Y E. ZEHNDER, *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics*, Birkhäuser, Basel, 2011.
- [24] M. HUTCHINGS, Taubes’s proof of the Weinstein conjecture in dimension three, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **47** (2010), 73–125.
- [25] A. KIESENHOFER, E. MIRANDA Y G. SCOTT, Action-angle variables and a KAM theorem for  $b$ -Poisson manifolds, *J. Math. Pures Appl. (9)* **105** (2016), 66–85.
- [26] A. KNAUF, *Mathematical physics: classical mechanics*, Unitext, 109, La Matematica per il 3+2, Springer, Berlin, 2018.
- [27] K. KUPERBERG, A smooth counterexample to the Seifert conjecture, *Ann. of Math. (2)* **140** (1994), 723–732.
- [28] D. MCDUFF, Examples of symplectic structures, *Invent. Math.* **89** (1987), 13–36.
- [29] R. MCGEHEE, Triple collision in the collinear three-body problem, *Invent. Math.* **27** (1974), 191–227.
- [30] R. MCGEHEE, Double collisions for a classical particle system with nongravitational interactions, *Comment. Math. Helv.* **56** (1981), 524–557.

- [31] R. MELROSE, *The Atiyah-Patodi-Singer index theorem*, Research Notices in Mathematics, A K Peters, Wellesley, MA, 1993.
- [32] K. MEYER, Periodic orbits near infinity in the restricted  $N$ -body problem, *Celestial Mech.* **23** (1981), 69–81.
- [33] J. MILNOR, *Morse theory. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells*, Annals of Mathematics Studies 51, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.
- [34] E. MIRANDA Y C. OMS, The geometry and topology of singular contact manifolds, ArXiv:1806.05638 (2020).
- [35] E. MIRANDA Y C. OMS, The singular Weinstein conjecture, ArXiv:2005.09568 (2020).
- [36] E. MIRANDA, C. OMS Y D. PERALTA-SALAS, On the singular Weinstein conjecture and the existence of escape orbits for  $b$ -Beltrami fields, ArXiv:2010.00564 (2020).
- [37] R. NEST Y B. TSYGAN, Formal deformations of symplectic manifolds with boundary, *J. Reine Angew. Math.* **481** (1996), 27–54.
- [38] F. PASQUOTTO, A short history of the Weinstein conjecture, *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* **114** (2012), 119–130.
- [39] D. PERALTA-SALAS, Selected topics on the topology of ideal fluid flows, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **13** (2016), suppl., 1630012, 23 pp.
- [40] A. PIRES, *Origami manifolds*, Ph.D. thesis, MIT, 2010.
- [41] H. POINCARÉ, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, Vols. 1-3*, Gauthier-Villar, Paris, 1892–1899 (reimpreso por Dover, New York, 1957).
- [42] C. H. TAUBES, The Seiberg-Witten equations and the Weinstein conjecture, *Geom. Topol.* **11** (2007), 2117–2202.
- [43] K. UHLENBECK, Generic properties of eigenfunctions, *Amer. J. Math.* **98** (1976), 1059–1078.

EVA MIRANDA, DPTO. DE MATEMÁTICAS, UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA Y OBSERVATOIRE DE PARIS

Correo electrónico: [eva.miranda@upc.edu](mailto:eva.miranda@upc.edu)

Página web: <https://web.mat.upc.edu/eva.miranda/nova/>