

## El problema de los triángulos de Kobon

por

José Pedro Moreno y Luis Felipe Prieto-Martínez

RESUMEN. Este artículo se ocupa de un problema de geometría elemental propuesto como pasatiempo por Kobon Fujimura aunque, en un contexto ligeramente distinto, había sido considerado antes por Branko Grünbaum en una monografía sobre configuraciones de líneas:

¿Cuál es el número máximo de triángulos sin solapamiento que pueden formarse con  $n$  rectas (o, sencillamente,  $n$  segmentos) en el plano?

La solución, que denotamos mediante  $K(n)$ , se conoce para los primeros naturales hasta 9, para  $n = 13, 15, 17$  y para dos sucesiones definidas de manera recursiva. Saburo Tamura probó que  $K(n) \leq n(n-2)/3$  y esa estimación fue refinada más tarde por Gilles Clément y Johannes Bader. De ahí se deduce, por ejemplo, que  $K(10) \leq 26$ , aunque no se ha encontrado ninguna configuración que confirme ese valor. En cuanto a las cotas inferiores, una elegante construcción obtenida por Füredi y Pálásti prueba que  $n(n-3)/3 \leq K(n)$ . En este trabajo se exponen estos resultados junto con alguna de las ideas que hay detrás de las acotaciones.

El problema planteado por Fujimura en su último libro de pasatiempos [5] y conocido popularmente como «problema de los triángulos de Kobon», forma parte de una rama muy activa de las matemáticas, la geometría combinatoria, en la que han trabajado matemáticos tan famosos como Euler o Erdős. Sin entrar en cuestiones sobre su importancia o su relación con otras áreas, representa una fuente inagotable de problemas sin resolver, con enunciado más o menos sencillo.

El estudio de las configuraciones de rectas tiene por objeto entender las estructuras que aparecen cuando se considera una familia finita de rectas en el plano proyectivo real o, con menor frecuencia, en el plano euclídeo [2]. Admite generalizaciones a dimensiones mayores (configuraciones de hiperplanos) y a familias de líneas que no sean rectas. Tiene relación con otras cuestiones de geometría discreta, como las triangulaciones o las teselaciones no periódicas. Aunque es un tema en el que se ha trabajado durante casi 200 años, la primera exposición sistemática parece ser [7], monografía en la que aparece planteado por primera vez el problema de Kobon, y en cuya introducción se insiste en la importancia de la geometría elemental y el razonamiento geométrico como inspiradores para los descubrimientos matemáticos.

La palabra inglesa para referirse al tipo de rompecabezas en los que era experto Fujimura es *puzzle*, y no alude únicamente a los que consisten en el encaje de piezas para formar una imagen, sino a cualquiera que requiera inteligencia o habilidad en

su solución. Muchos de estos problemas pertenecen a lo que se ha dado en llamar «matemática recreativa» y algunos han llegado a ser muy populares, como el juego del 15, el problema de las torres de Hanói o, más recientemente, el cubo de Rubik y los sudokus. Martin Gardner, uno de los divulgadores científicos más importantes del siglo pasado, escribió en la introducción a la versión inglesa del libro de Fujimura [5] que esos problemas están muy lejos de ser un simple entretenimiento y que, en realidad, son una excelente manera de aprender matemáticas. El problema de Kobon es un perfecto ejemplo de lo anterior, y una prueba más de que no hace falta ser un profesional de las matemáticas para apreciar su belleza y comprender la dificultad que entrañan.

## LOS PRIMEROS CASOS

Llamaremos *configuración* a cualquiera de las figuras que podemos dibujar con rectas en el plano formando triángulos, para cuyo recuento exigiremos que éstos no se solapen. Diremos que una configuración de  $n$  líneas es *óptima* si contiene el número máximo de triángulos que se pueden formar con  $n$  rectas, denotado por  $K(n)$ .

Para empezar, es evidente que no puede dibujarse un triángulo con una única recta, ni tampoco con dos, de modo que  $K(1) = K(2) = 0$ . Cualquier triángulo tiene tres lados distintos y por eso se precisan tres líneas diferentes para dibujarlo. Por otra parte, con tres rectas no puede dibujarse más que un triángulo, de modo que  $K(3) = 1$ . El siguiente caso es  $n = 4$ . Es fácil observar que  $K(4) \geq 2$  porque hay dos configuraciones con cuatro rectas que tienen, cada una de ellas, dos triángulos, como puede verse en la figura 1.

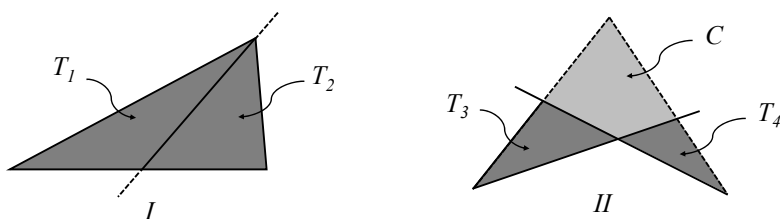


Figura 1:  $K(4) \geq 2$ .

En el caso de la configuración  $I$  sólo hay que contar los triángulos  $T_1$  y  $T_2$ . El triángulo  $T_1 \cup T_2$  es admisible, porque el enunciado de Kobon permite que los triángulos sean atravesados por rectas de la configuración, pero se solapa con  $T_1$  y  $T_2$ . El triángulo  $T_3 \cup C$  en la configuración  $II$  también es admisible, pero se solapa con  $T_3$ . En la última sección veremos que considerar triángulos que son unión de otros polígonos nunca hace que aumente el número de triángulos de la configuración.

Incluso en este caso sencillo empieza a mostrarse la principal dificultad del problema: ¿estamos seguros de que con cuatro rectas no podemos construir más triángulos? Es decir, ¿es cierto que  $K(4) \leq 2$ ? Para convencernos de que efectivamente es así, podemos suponer que tres de las cuatro rectas de que disponemos,  $r_1, r_2$  y  $r_3$ , forman

un triángulo  $T$ , tal como muestra la figura 2. De no ser así, las cuatro rectas pasarían por un mismo punto o bien tres de ellas (al menos) serían paralelas: en cualquiera de ambos casos no se obtiene ningún triángulo.

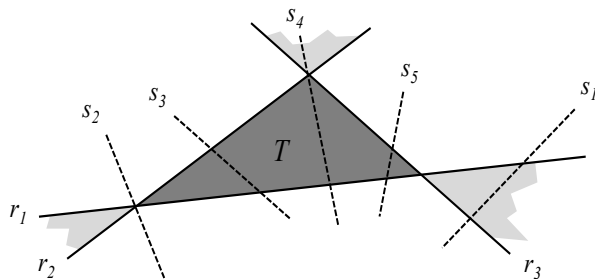


Figura 2:  $K(4) \leq 2$ .

Si añadimos la cuarta recta que falta pueden suceder dos cosas: que esa nueva recta no corte a  $T$  o que sí lo haga. En el primer caso, tal como sucede con la recta  $s_1$ , obtendremos una configuración del tipo II anterior. En el segundo caso existen, a su vez, tres posibilidades: (1) si la nueva recta es paralela a una de las tres rectas anteriores, como ocurre con  $s_3$ , no se consiguen dos triángulos; (2) si no lo es y contiene un vértice de  $T$ , se obtiene una configuración del tipo I anterior, bien dividiendo el triángulo original, como sucede con  $s_4$ , bien añadiendo uno más, como sucede con  $s_2$  (aunque el vértice del nuevo triángulo queda fuera de la figura); (3) finalmente, si no contiene ningún vértice de  $T$ , como ocurre con  $s_5$ , no se obtienen dos triángulos.

Para valores más altos de  $n$ , las configuraciones correspondientes van siendo algo más complicadas, y también la demostración de su idoneidad, que ha de hacerse por otros métodos. De momento, nos conformamos con mostrar algunas configuraciones óptimas, empezando con  $n = 5$ . Como se ilustra en la parte izquierda de la figura 3, partimos de una configuración II para cuatro líneas y añadimos una quinta línea  $r$  representada con trazo discontinuo, lo que proporciona tres nuevos triángulos coloreados con un gris más claro.

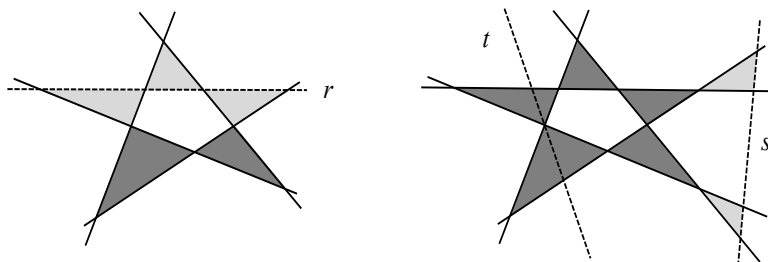


Figura 3: Configuraciones para  $n = 5$  (izquierda) y  $n = 6$  (derecha).

La configuración mostrada prueba que  $K(5) \geq 5$ , pero no demuestra que  $K(5) = 5$ , como sucede en realidad. El motivo por el que  $K(5) \leq 5$  y, por tanto, se tiene la igualdad, se verá después, cuando hablemos de cotas superiores. El resto de valores de  $K(n)$  que se presentan en esta sección y la siguiente habrán de esperar también a ese momento para tener su justificación.

Es interesante observar que esta configuración comparte la siguiente propiedad con la correspondiente a  $n = 3$ : cada uno de los segmentos que forman los triángulos es lado de, a lo sumo, *un único triángulo*. Llamaremos a este tipo de configuraciones «simples» para distinguirlas de otras, como sucede con la configuración  $I$  para  $n = 4$ , en las que uno o más segmentos es lado de dos triángulos. Dicho de otro modo, una configuración es simple si tres o más rectas nunca tienen un punto en común. Existe aún otra similitud entre las configuraciones para  $n = 3$  y  $n = 5$ : ambas son únicas, en el sentido de que no existen otras configuraciones óptimas con tres y cinco rectas, respectivamente. Esto, que es obvio en el primer caso, no lo es tanto para el segundo y dejamos los detalles de la demostración para la última sección.

Para el caso  $n = 6$  resulta que  $K(6) = 7$  y que hay varias configuraciones distintas que forman los siete triángulos. Dos de ellas (a la derecha en la figura 3) parten de la configuración para  $n = 5$  y le añaden una recta más, consiguiendo así dos nuevos triángulos. Si esto se hace con la recta  $s$  se obtiene una configuración simple, al contrario de lo que sucede si se hace con  $t$ . La configuraciones mostradas en la figura 4 utilizan una idea distinta y demuestran que se puede conseguir una configuración óptima para  $n = 6$  sin necesidad de partir de una configuración óptima para  $n = 5$ . Se puede comprender que son distintas configuraciones sin necesidad de explicar por qué lo son. Uno de los temas favoritos de la matemática discreta consiste en clasificar estructuras, para lo cual hay que definir antes con cuidado qué se entiende por estructuras distintas.

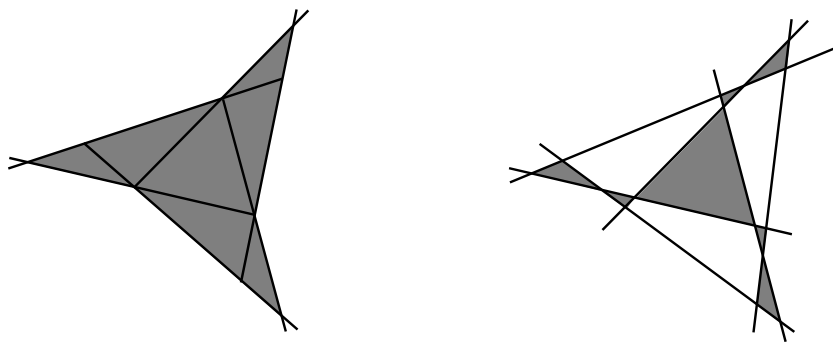


Figura 4: Otras dos configuraciones para  $n = 6$ .

El número máximo de triángulos sin solapamiento que se pueden formar con siete líneas rectas es 11. Fujimura afirma en [5] que durante algunos años se pensó que  $K(7) = 10$  e incluye en el libro tres configuraciones distintas con siete rectas y 10 triángulos. Después añade, con signo de admiración, que existe una configuración con

11 triángulos, precisamente la que se reproduce en la figura 5 y que le atribuimos, porque no menciona que se deba a ningún otro autor.

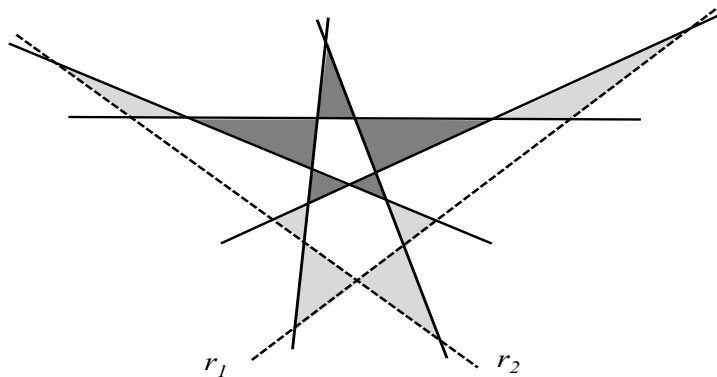


Figura 5:  $n = 7$ .

Para llegar a esta configuración empezamos de nuevo con la configuración óptima para cinco rectas, que proporciona los cinco triángulos coloreados en gris oscuro que se ven en la figura 5. Añadiendo dos rectas  $r_1$  y  $r_2$  conseguimos seis triángulos más (pintados con un gris más claro).

Una modificación sencilla (pero ingeniosa) de la configuración para  $n = 7$  proporciona una configuración óptima para  $n = 8$ , que tiene 15 triángulos. Como puede verse en el lado izquierdo de la figura 6, la modificación consiste en añadir una recta en el sitio adecuado que produce los cuatro nuevos triángulos en gris claro.

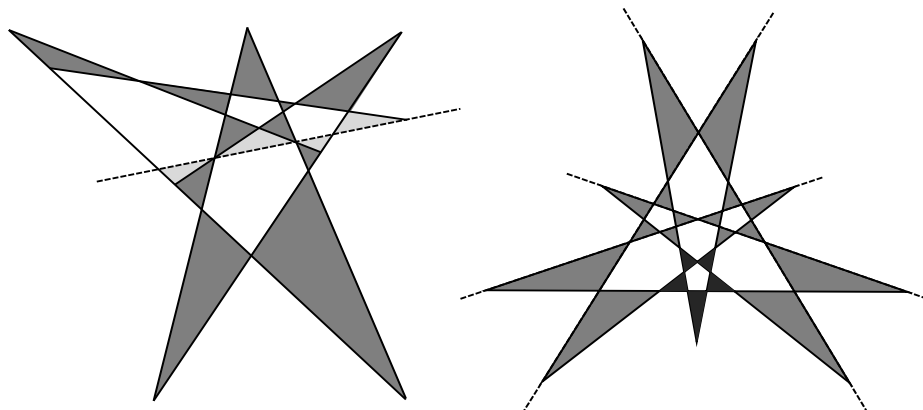


Figura 6: Configuraciones para  $n = 8$  (izquierda) y  $n = 9$  (derecha).

En el caso  $n = 9$ , una configuración óptima debe contener 21 triángulos. Para encontrarla hay que usar una idea completamente distinta sobre cómo han de organizarse las rectas entre sí: formando un hexágono interior y un triángulo exterior.

También puede verse como una configuración para  $n = 5$  (pintada en gris más oscuro a la derecha de la figura 6) a la que hemos añadido las cuatro rectas dibujadas con trazo discontinuo. Vista así, es el ejemplo más sencillo de la construcción recursiva descubierta en [4] sobre la que volveremos más adelante.

## LOS TÉRMINOS SIGUIENTES

El valor del siguiente término de la sucesión, que corresponde a  $n = 10$ , no se conoce. Se sabe que  $K(10) \leq 26$ , pero no se han encontrado configuraciones que confirmen ese valor. Existen varias con 25 triángulos y se conjetura que, efectivamente,  $K(10) = 25$ . La primera de ellas se debe a Grünbaum y aparece en el capítulo 18 de su libro *Convex Polytopes* [6], texto recomendable para lectores con conocimientos de combinatoria. Las otras configuraciones fueron encontradas por Grabarchuk, Kabanovitch, Wajnberg, Honma y Bader, respectivamente. La figura 7 muestra estas dos últimas.

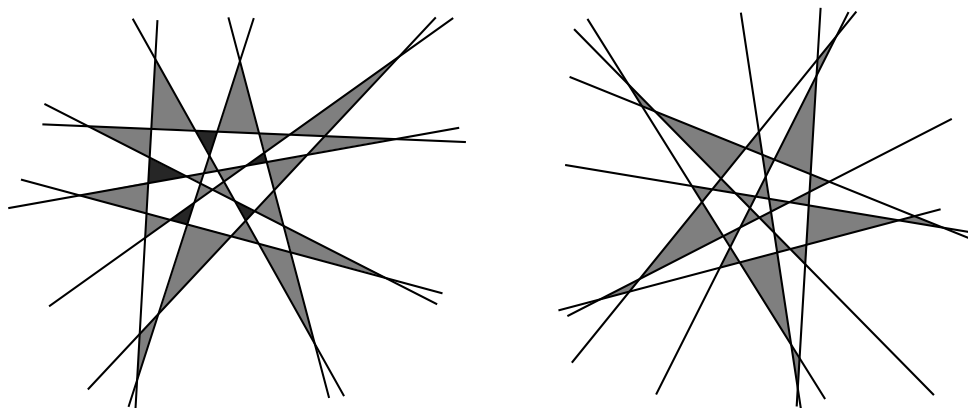


Figura 7: Configuraciones de 25 triángulos para  $n = 10$ .

Ambas se basan, como la de Kabanovitch, en una idea similar que tiene mucho en común con la usada para encontrar la configuración de nueve líneas expuesta antes: cinco rectas forman un pentágono interior y otras cinco un pentágono más grande que contiene al primero y está ligeramente girado con respecto a éste, para asegurar el mayor número de intersecciones. En la de Honma, a la izquierda, hemos pintado de un gris más oscuro el fondo de cinco triángulos para que se vea mejor el pentágono exterior. Bader afirma, con toda razón, que su configuración, la de la derecha, posee una simetría de la que carecen las otras. Quizá la más sencilla, pero menos elegante por no ser simple, sea la de Grabarchuk, que consiste en añadir a la configuración para  $n = 9$  una recta horizontal (dejamos al lector el ejercicio de averiguar dónde).

Tampoco son conocidos  $K(11)$  y  $K(12)$ , aunque se sabe que  $K(11) \leq 33$  y  $K(12) \leq 39$ . Las figuras 8 y 9 muestran dos configuraciones simples, también de

Kabanovitch, con 11 líneas y 32 triángulos la primera y 12 líneas y 38 triángulos la segunda. La estrategia seguida para su construcción no resulta tan clara como en las dos configuraciones presentadas antes para  $n = 10$ . Curiosamente sí se sabe que  $K(13) = 47$ , de nuevo gracias a una configuración simple de Kabanovitch que se reproduce en la figura 10, pero  $K(14)$  vuelve a ser un misterio, aunque se sabe que  $K(14) \leq 56$ . La mejor configuración conocida, representada en la figura 11, se debe a Bader y tiene 53 triángulos.

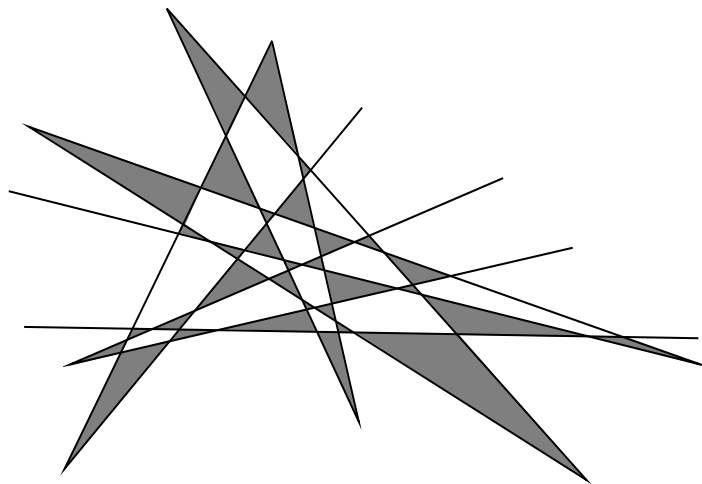


Figura 8: Configuración de 32 triángulos para  $n = 11$ .

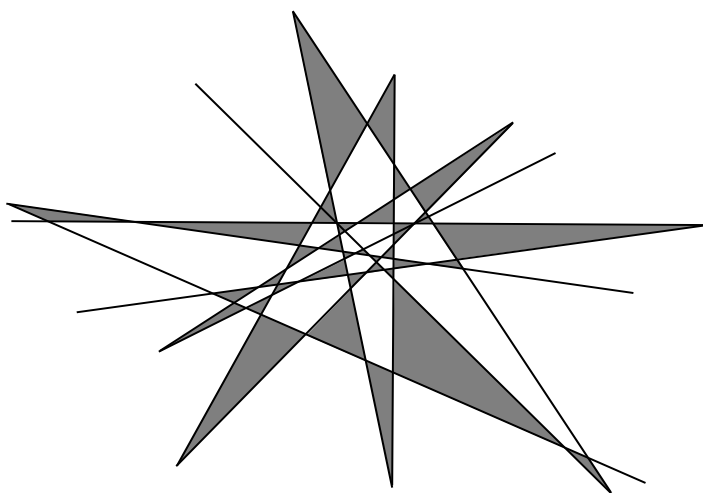


Figura 9: Configuración de 38 triángulos para  $n = 12$ .

Suzuki encontró en 2005 una solución óptima para  $n = 15$ , que se muestra en la figura 12, usando una idea que ya hemos visto antes: las quince rectas están organizadas formando tres pentágonos encajados y girados entre sí adecuadamente para asegurar las intersecciones.

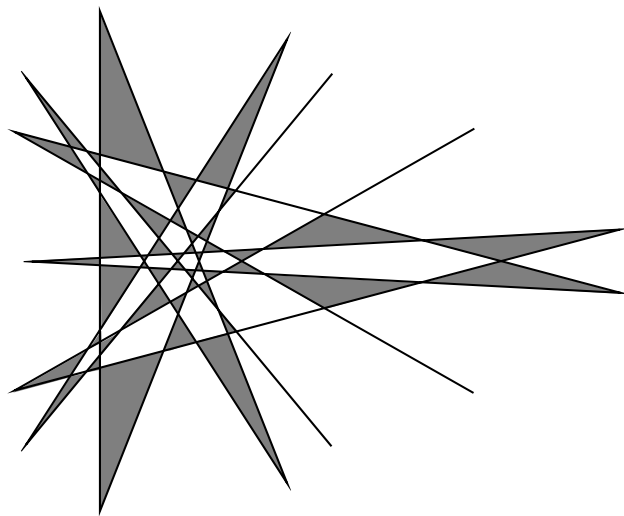


Figura 10: Configuración óptima para  $n = 13$ .

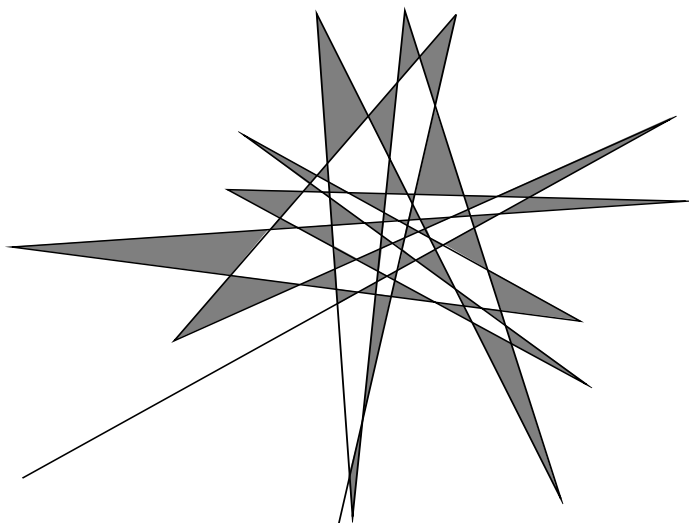
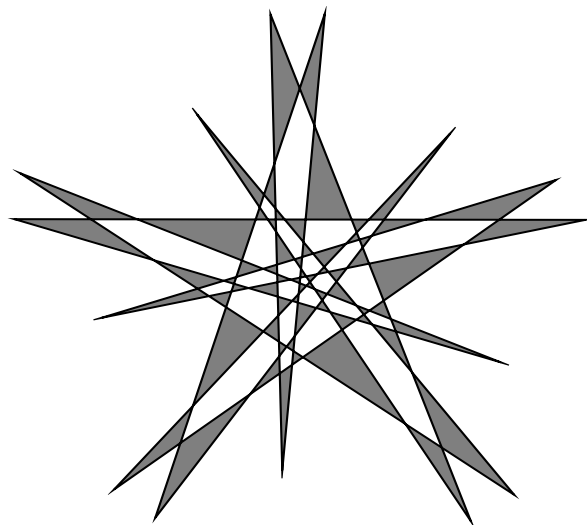


Figura 11: Configuración de 53 triángulos para  $n = 14$ .



Figura 12: Configuración óptima para  $n = 15$ .

En el cuadro 1 aparecen los valores de  $K(n)$  hasta  $n = 18$ , indicando cuál es la mejor configuración conocida en cada caso y cuál es la correspondiente cota superior de acuerdo con la estimación obtenida por G. Clément y J. Bader (C&B) en [3]. Obsérvese que en los casos  $K(10)$ ,  $K(11)$  y  $K(12)$  existe una diferencia de tan solo un triángulo entre la mejor configuración conocida y la cota superior de C&B.

$n$	$K(n)$	mejor configuración	C&B
3	1	1	1
4	2	2	2
5	5	5	5
6	7	7	7
7	11	11 (Fujimura 1978)	11
8	15	15	15
9	21	21	21
10	?	25 (Grünbaum 1967)	26
11	?	32 (Kabanovitch 1999)	33
12	?	38 (Kabanovitch 1999)	39
13	47	47 (Kabanovitch 1999)	47
14	?	53 (Bader 2007)	56
15	65	65 (Suzuki 2005)	65
16	?	72 (Bader 2007)	74
17	85	85 (Forge y Ramírez Alfonsín 1998)	85
18	?	93 (Bader 2007)	96

Cuadro 1: Primeros valores de  $K(n)$  y cota superior de Clément y Bader (C&B).

En la *Online Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS)* [13], donde se intenta recoger la mayor cantidad posible de sucesiones de números enteros con algún interés, a la sucesión  $\{K(n)\}$  de los triángulos de Kobon le han asignado el código A006066. La de los naturales es A000027, la de los primos A000040 y la de Fibonacci A000045. La sucesión A000001 es la que tiene como término general el número de grupos de orden  $n$ .

## COTA INFERIOR DE FÜREDI Y PALÁSTI

Cuando trazamos una configuración cualquiera con  $n$  rectas y obtenemos  $m$  triángulos, lo único que estamos demostrando es que  $m \leq K(n)$ , es decir, una *cota inferior* de  $K(n)$ . Conseguir cotas inferiores para  $K(n)$ , siendo  $n$  un número natural cualquiera, no resulta complicado.

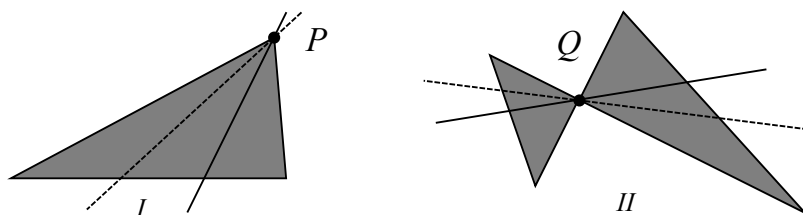


Figura 13: Estimaciones inferiores.

Por ejemplo, si  $n \geq 3$ , entonces  $n-2 \leq K(n)$  ya que, partiendo de la configuración  $I$  de la figura 1, cada vez que añadimos una recta que pase por el vértice  $P$  y corte al interior del lado opuesto, obtenemos un triángulo más. Como puede verse en la figura 13, si consideramos la configuración  $II$  en lugar de la  $I$  y aplicamos la misma idea, obtenemos una estimación un poco mejor que la anterior:  $2(n-3) \leq K(n)$ , que tampoco resulta muy ajustada porque estamos diciendo que  $10 \leq K(8) = 15$ .

La mejor cota inferior general conocida hasta ahora fue obtenida por Füredi y Palásti en 1984 [8]:

$$\frac{n(n-3)}{3} \leq K(n).$$

El procedimiento para obtener una configuración que nos lleve a la estimación anterior consiste en escoger, de forma adecuada,  $n$  diagonales en un polígono regular  $P$  de  $2n$  lados, inscrito en la circunferencia unidad  $C$ . La imagen de la figura 14 ilustra el caso  $n = 5$ .

Podemos suponer que los vértices de  $P$  tienen como argumento (el ángulo desde la recta horizontal)  $\{k\pi/n : k = 0, 1, \dots, 2n-1\}$ . Elegimos aquéllos que tienen índice impar  $2i+1$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , y asociamos a cada uno de ellos la diagonal  $L_i$  que une este vértice con el que tiene como argumento

$$\pi - \frac{2(2i+1)\pi}{n}.$$

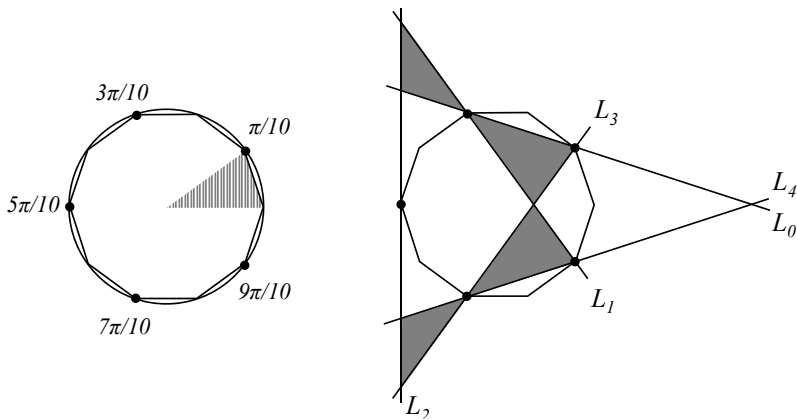


Figura 14: Configuración de Füredi y Palásti para  $n = 5$ .

En caso de que ambos vértices coincidan,  $L_i$  será la recta tangente en ese punto a la circunferencia  $C$ . Todas las rectas se cortan, de modo que en cada una de ellas habrá  $n - 2$  segmentos, definidos por los  $n - 1$  puntos de corte. Hay rectas en las que todos los segmentos así definidos son lados de un triángulo (en la configuración para  $n = 5$  de la figura 14, esto sucede con las rectas  $L_1$  y  $L_3$ ), y otras en las que todos los segmentos excepto uno son lados de un triángulo (como ocurre con las rectas  $L_0$ ,  $L_2$  y  $L_4$ ). De ahí que en la estimación aparezca  $n(n - 3)$  y no  $n(n - 2)$  que es el número total de segmentos.

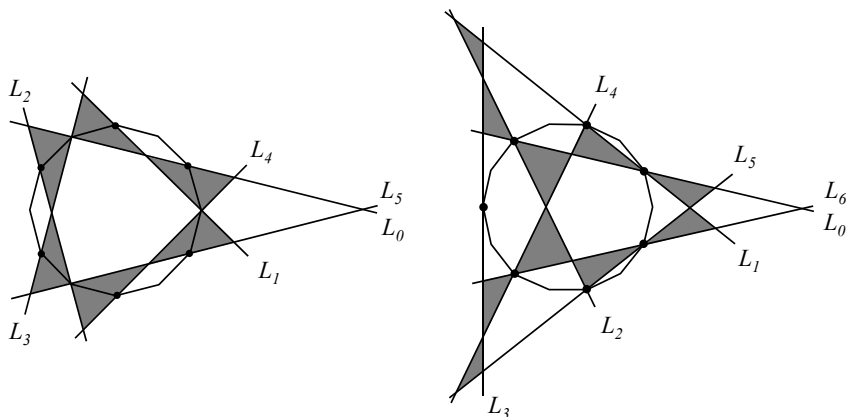


Figura 15: Configuraciones de Füredi y Palásti para  $n = 6$  y  $n = 7$ .

La figura 15 ilustra los casos  $n = 6$  y  $n = 7$ . En la primera de ellas, ninguna de las seis rectas tiene cuatro segmentos que sean lados de triángulos. En la segunda sí que hay rectas, como  $L_1$ , con cinco segmentos (el máximo) que son lados de triángulos.

En la figura 16 vemos cuatro iteraciones más: los casos  $n = 8$ ,  $n = 9$ ,  $n = 10$  y  $n = 11$ . Los triángulos están formados por las rectas  $L_i, L_j, L_{n-i-j-1}$  y  $L_i, L_j, L_{n-i-j-2}$ , con  $0 \leq i < j \leq n-1$ . Las líneas de la construcción son tangentes a los arcos de una deltoide, cuya forma se va haciendo más clara según van aumentando los valores de  $n$ , dibujada en una circunferencia de centro el origen y radio 3.

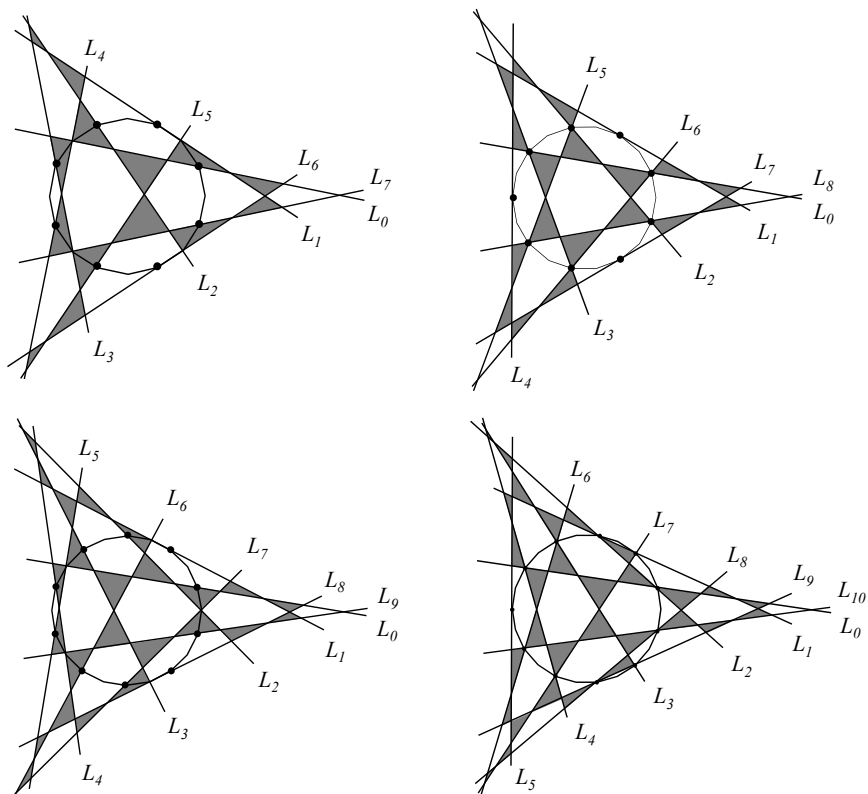


Figura 16: Configuraciones de Füredi y Palásti para  $n = 8, 9, 10, 11$ .

## COTAS SUPERIORES DE TAMURA, CLÉMENT Y BADER

Decidir si una configuración es óptima cuando  $n > 5$  resulta un problema muy complicado, así que interesa obtener cotas superiores para los valores de  $K(n)$ . La razón es sencilla: si encontramos una configuración que tenga el mismo número de triángulos que la cota superior correspondiente, entonces necesariamente es una configuración óptima. Saburo Tamura demostró que  $K(n) \leq n(n-2)/3$ , de modo que  $K(n)$ , al ser un número natural, debe ser menor o igual que la parte entera de

esa fracción:

$$K(n) \leq \left\lfloor \frac{n(n-2)}{3} \right\rfloor.$$

Esta cota fue ligeramente refinada más tarde por G. Clément y J. Bader en el ya citado artículo inédito [3]. El resultado principal es que la cota de Tamura puede bajarse en una unidad para 6, 12, 18,... y para 8, 14, 20,... Dicho en términos precisos, para todos aquellos números congruentes con 0 y 2 módulo 6. Es probable que la prueba de Tamura, que no hemos visto porque nunca aparece la referencia cuando se la menciona, utilice argumentos parecidos a los del artículo de Clément y Bader, que se exponen a continuación.

Para empezar, llamaremos *punto* a la intersección de dos o más líneas en una configuración, y *segmento* a la porción de línea encerrada entre dos puntos consecutivos de una misma recta. Cada triángulo está delimitado por tres segmentos, y un segmento puede ser lado de cero, uno o dos triángulos, en cuyo caso diremos que tiene multiplicidad 0, 1 o 2, respectivamente. Si conseguimos una estimación del número de segmentos contados con su multiplicidad, dividiendo por 3 tendremos también una estimación del número de triángulos.

No es complicado demostrar que, en una configuración de  $n$  líneas, el número total de segmentos, sin contar multiplicidades, es menor o igual que  $n(n-2)$ , y el número total de puntos es menor o igual que  $n(n-1)/2$ . De esta estimación se deduce directamente que en una configuración *simple* de  $n$  líneas no puede haber más de  $\lfloor n(n-2)/3 \rfloor$  triángulos.

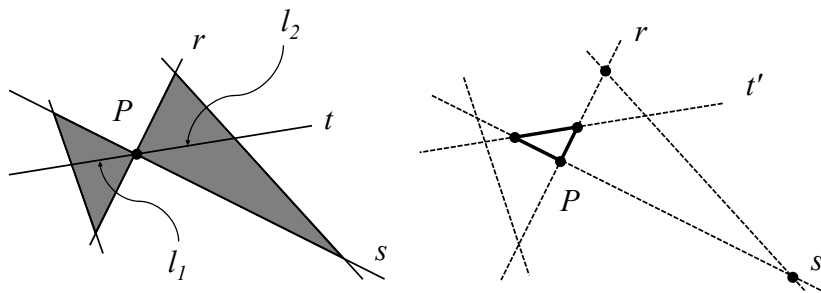


Figura 17: Segmentos con multiplicidad 2.

¿Y si la configuración no es simple? En ese caso, hay uno o más puntos en los que se intersecan tres o más rectas. En la figura 17 se ilustra lo que sucede allí: por cada recta adicional  $t$  (lado izquierdo de la figura) que pasa por el punto  $P$  que es intersección de dos rectas  $r$  y  $s$  (no importa la posición relativa que tengan las tres rectas unas con respecto a otras) se pierden tres segmentos que, como se aprecia en el lado derecho, sí estarían en las rectas  $r$  y  $s$  si una recta  $t'$  las cortara por puntos que no fueran  $P$ ; a cambio, la multiplicidad de los segmentos  $l_1$  y  $l_2$  es 2. Estamos suponiendo que  $t'$  resulta de un desplazamiento de la recta  $t$  hecho de forma que  $t'$  no corte a ningún punto de la configuración.

Si la nueva configuración que se obtiene sustituyendo  $t$  por  $t'$  es simple, paramos, y si no lo es le volvemos a aplicar el mismo argumento. Finalmente se llega a una configuración simple de  $n$  líneas con más segmentos de los que tenía la original contados con su multiplicidad, lo cual prueba la cota de Tamura. (Por cierto, hay que tener cuidado al mirar la figura 17: a la izquierda hay cuatro triángulos, y a la derecha hay tres, a pesar de haber más segmentos. Lo que interesa, sin embargo, no es ese recuento «local».)

De lo anterior se deduce que, si  $n(n-2)$  es múltiplo de 3, entonces cualquier configuración de  $n$  líneas que tenga exactamente  $n(n-2)/3$  triángulos tiene que ser simple. Aún más: para que salga la cuenta, cada segmento tiene que ser lado de un triángulo, y de no más de uno porque de lo contrario la configuración no sería simple. Esto queda mejor recogido en el siguiente lema, que precisa una definición previa: una configuración de  $n$  líneas es *perfecta* cuando cada segmento es lado de un único triángulo y tiene exactamente  $n(n-2)/3$  triángulos [3].

LEMA 1. *Si  $n(n-2)$  es múltiplo de 3, cualquier configuración de  $n$  líneas que tenga  $n(n-2)/3$  triángulos tiene que ser perfecta.*

La configuración para  $n=5$  es perfecta, pero la mostrada después para  $n=7$  no lo es, a pesar de ser simple, ya que hay dos segmentos que no son lados de ningún triángulo. De hecho, no existen configuraciones perfectas cuando  $n(n-2)$  no es múltiplo de 3. Clément y Bader prueban en su artículo que tampoco existen configuraciones perfectas cuando  $n$  es par y de ahí, usando también el lema 1 y llamando  $\chi_A(x)$  a la función indicatriz del conjunto  $A = \{i \in \mathbb{Z} : i \bmod 6 = 0, 2\}$ , deducen que

$$K(n) \leq \left\lfloor \frac{n(n-2)}{3} \right\rfloor - \chi_A(n).$$

Para llegar a esta conclusión empiezan definiendo el *grado* de un punto en una configuración como el número de segmentos a los que pertenece. El primer y el último punto de una recta en una configuración se llaman *extremos*.

LEMA 2. *En una configuración perfecta, cualquier punto extremo tiene grado 2.*

Para demostrar este lema hay que tener en cuenta que cualquier configuración perfecta es simple, y por tanto cada punto es, exactamente, intersección de dos rectas. Eso significa que, en principio, un punto  $P$  sólo puede tener grados 2, 3 o 4. Pero, de hecho, el grado 4 no es posible porque entonces  $P$  tendría dos puntos a cada lado en cualquiera de las dos rectas que lo definen, y no sería extremo.

Y tampoco es posible que  $P$  tenga grado 3 porque la configuración no sería perfecta: como se muestra en la figura 18, los segmentos  $PC$ ,  $PB$  y  $PA$  son lados de dos o de tres triángulos distintos, pero esto último implicaría la existencia de un cuarto segmento que contiene a  $P$ , lo cual no puede suceder por tener grado 3.

LEMA 3. *No existen configuraciones perfectas para ningún número par.*

Supongamos, en contra de lo que afirma el lema, que existe una configuración perfecta para  $n$  líneas, siendo  $n$  un número par. Sea  $L$  una cualquiera de esas líneas que, como el resto, contiene  $n-1$  puntos y  $n-2$  segmentos que son lados de

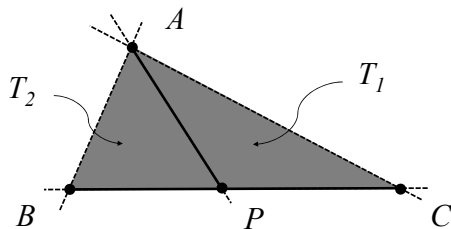


Figura 18: Grado de los puntos en una configuración perfecta.

otros tantos triángulos que se disponen alternativamente en uno y otro de los dos semiplanos definidos por  $L$ , como puede verse en la figura 19.

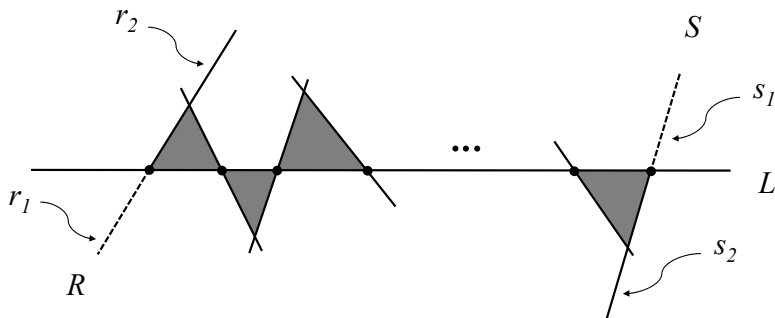


Figura 19: Triángulos a uno y otro lado de la recta  $L$ .

Como  $n$  es un número par,  $n - 2$  también lo es. Por tanto, si el primer triángulo está por encima de  $L$  en el dibujo, el último ha de estar por debajo. Siendo la configuración perfecta, las rectas  $R$  y  $S$  no pueden ser paralelas, así que han de cortarse. El punto de corte ha de estar en la intersección de las semirrectas  $r_1$  y  $s_2$  o bien de las semirrectas  $r_2$  y  $s_1$ , pero en ambos casos se llegaría a que uno de los dos extremos de  $L$  tiene grado 3, lo cual es imposible.

Para terminar esta sección, conviene señalar que Roudneff demostró, unos años antes que Clément y Bader, una acotación superior para el número de caras triangulares definidas por  $n$  rectas, con  $n \geq 9$ , en el plano proyectivo [12]. Como el número de triángulos de una configuración en el plano euclídeo es siempre menor o igual que en el proyectivo, la acotación (aunque un poco peor que la de Tamara) también sirve para el problema de Kobon y se tiene

$$K(n) \leq \frac{n(n - 1)}{3}.$$

Roudneff [10] también probó que, en el plano proyectivo, dicha cota se alcanza para infinitos valores de  $n$  de modo que, en cierto sentido, esa cota es la mejor posible

en el plano proyectivo. Para  $n = 3, 4, \dots, 8$  existen configuraciones cuyo número de triángulos supera la cota de Roudneff [12].

## UNICIDAD DE LAS CONFIGURACIONES ÓPTIMAS

Se conoce muy poco sobre las propiedades que puedan tener las configuraciones óptimas en relación con su simetría, por ejemplo, o con su unicidad. En lo que respecta a esta última, es trivial ver que para  $n = 3$  existe una única solución óptima, pero no resulta evidente demostrar que sucede lo mismo para  $n = 5$ .

En primer lugar, una configuración con cinco triángulos (que es el resultado de  $5 \cdot 3/3$ ) tiene que ser simple, tal como se ha observado al final de la sección anterior. Consideramos una línea cualquiera  $r_1$  sobre la que, necesariamente, se apoyan tres triángulos: dos hacia un lado de la recta y el central hacia el otro lado. Los ángulos que forman las rectas  $r_2$  y  $r_3$  con  $r_1$  se pueden elegir para que  $r_2$  y  $r_3$  se corten en el lado de  $r_1$  donde hay un solo triángulo o en el otro lado. ¿Qué resulta más conveniente?

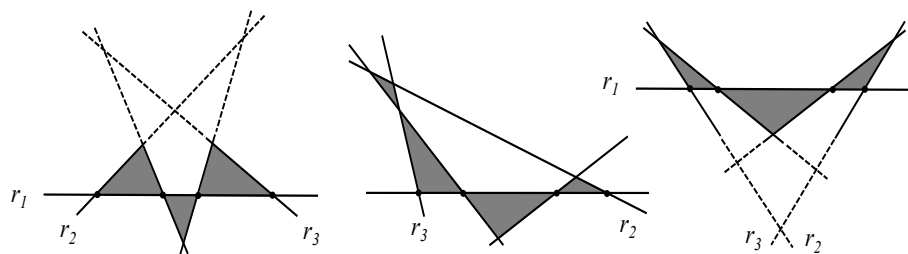


Figura 20: Unicidad de la configuración para  $n = 5$ .

Uno podría pensar que quizá las configuraciones simples son únicas, pero no es así. Forge y Ramírez Alfonsín, respondiendo a una pregunta de Grünbaum, encontraron la solución al problema de los triángulos de Kobon para un conjunto infinito de naturales [4]. Probaron que, si existe una configuración perfecta para  $n > 3$ , entonces también existe para  $2n - 1$ . Así, de la configuración para  $n = 5$  se obtienen otras para  $n = 9, 17, 33, \dots$  y lo mismo sucede si empezamos con  $n = 15$ , llegando a las de  $n = 29, 57, \dots$

Cuando Bader fue informado de la existencia de ese artículo, escribió un programa en MATLAB (que puede descargarse en [1]) para obtener una configuración perfecta con 33 líneas, a partir de una de 17. También sirve para obtener una de 17 a partir de una de 9, que contiene a la original de 9, del mismo modo que la de 9 contiene la de 5 de la que procede. El interés del asunto estriba en que Clément y Bader habían encontrado en [3] una configuración perfecta de 17 líneas, que reproducimos en la figura 21. Una inspección de esta última revela que no contiene la configuración de 9 mostrada en la primera sección, de modo que es diferente a la de Forge y Ramírez Alfonsín, que no es posible reproducir aquí y que hay que ver necesariamente con



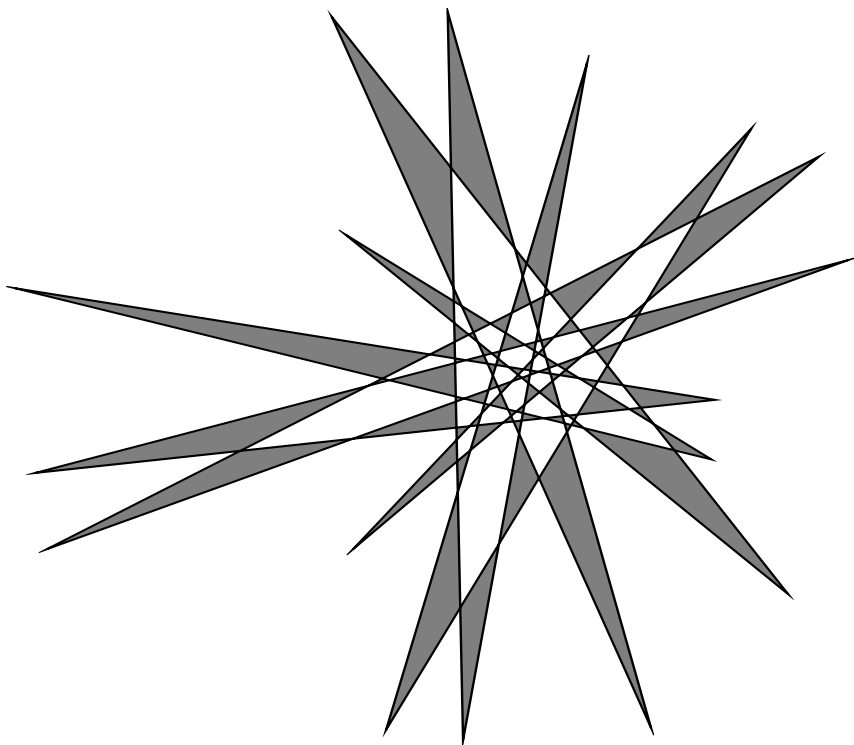


Figura 21: Configuración de Clément y Bader para  $n = 17$ .

MATLAB (por la desproporción que hay entre unos triángulos y otros y la necesidad de ampliar varias veces una parte de la configuración). En otras palabras, hay al menos dos configuraciones perfectas distintas de 17 líneas.

No sabemos si aplicando el procedimiento de Forge y Ramírez Alfonsín a las dos configuraciones distintas de 17 líneas se obtienen, de forma recursiva, infinitas configuraciones perfectas que no son únicas.

## CONSIDERACIONES FINALES

La única estrategia que se conoce para calcular con exactitud  $K(n)$ , en aquellos casos en los que se ha conseguido, consiste en hallar una configuración con el mismo número de triángulos que la cota superior de Clément y Bader. Esto sugiere algunas preguntas: ¿coincidirá siempre esa cota con los valores de  $K(n)$ ? Si la respuesta es positiva, sería deseable (pero probablemente muy difícil) encontrar una construcción general que muestre las configuraciones óptimas para cada posible  $n$ . Y si la respuesta es negativa, ¿qué estrategia podría usarse para demostrar que una configuración es óptima en los casos en que  $K(n)$  sea menor que su correspondiente cota superior?

En una configuración se llama *cara* a cada uno de los polígonos convexos que no están atravesados por ninguna recta. Una misma configuración puede contener diversos conjuntos de triángulos sin solapamiento pero cada uno de ellos tiene, a lo sumo, el mismo número de elementos que el formado por los triángulos que son caras de la configuración. La razón es que todo triángulo que no sea una cara contiene a una cara triangular. Esto se puede demostrar por inducción sobre el número de rectas que cortan al triángulo: si sólo hay una, esa recta divide al triángulo en dos triángulos o en un triángulo y un cuadrilátero. Iterando, cada vez que añadimos una recta estaremos creando o dejando una cara triangular contenida en él.

El comentario anterior sugiere que, cuando hablamos de que una configuración  $\mathcal{A}$  está contenida en otra  $\mathcal{B}$ , podemos considerar dos tipos de contenido. El primero, más restrictivo (que podemos llamar *estricto*), vendría a decir que  $\mathcal{A}$  es isomorfo a un subconjunto de caras triangulares de  $\mathcal{B}$ . El otro, menos restrictivo, exigiría únicamente que  $\mathcal{A}$  fuera isomorfo a un subconjunto de triángulos de  $\mathcal{B}$ . Tal como puede verse en la figura 22, la configuración de  $n = 9$  contiene sendas configuraciones para  $n = 6$  y  $n = 7$ , ambas óptimas, pero el contenido no es estricto. Los contenidos de los que hablamos en la sección sobre unicidad eran estrictos.

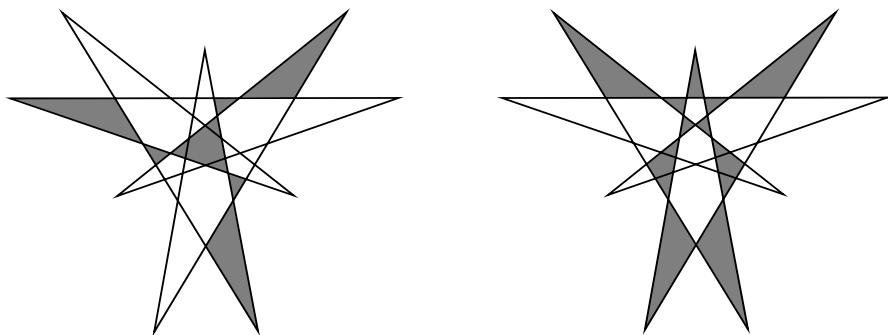


Figura 22: Configuraciones de  $n = 6$  y  $n = 7$  contenidas en la de  $n = 9$ .

El problema de encontrar configuraciones con el número mínimo de triángulos también ha sido estudiado: Levi demostró en 1926 que  $n \geq 3$  rectas en el plano proyectivo definen al menos  $n$  regiones triangulares [9]. Muchos años después, Roudneff [11] probó que, en caso de igualdad con esa cota inferior, la configuración es necesariamente simple, respondiendo así a una conjetura de Grünbaum. En el plano euclídeo siempre es posible encontrar una configuración de  $n$  rectas que no contenga ningún triángulo: basta que todas ellas sean paralelas o que todas pasen por un mismo punto. Por tanto, para considerar un problema de número mínimo de triángulos en ese contexto hay que excluir las configuraciones de esos dos tipos triviales.

Quizá el lector se pregunte la razón de que la investigación sobre configuraciones de rectas se haya llevado a cabo, en su mayor parte, en el plano proyectivo. Branko Grünbaum lo justifica diciendo que la variante euclídea es algo más complicada y que la mayoría de la información que ofrecen los resultados obtenidos en el caso proyectivo se puede utilizar en el euclídeo [7].

Terminamos con algunos detalles sobre la vida de Kobon Fujimura, entresacados de los apuntes biográficos que Martin Gardner incluye en el prólogo a *The Tokyo puzzles*. Nació en Osaka, en 1903, y su afición a los pasatiempos se inició con la lectura de un libro de Henry E. Dudeney, cuando era estudiante de la Escuela de Comercio. Fue tal la admiración que desde entonces profesó al famoso autor de acertijos inglés, que Fujimura guardó toda su vida, como gran tesoro, una carta suya fechada en 1926. Tras dejar el colegio, él y su hermano se ocuparon de la tienda de curiosidades que su padre regentaba en aquella ciudad. Las tareas diarias en la tienda y su afición por los acertijos se compaginaban bien: al fin y al cabo, en palabras de Gardner, éstos no son sino «curiosidades de la mente». Sin embargo, las cosas se pusieron difíciles tras la Segunda Guerra Mundial, y se vio obligado a impartir clases de matemáticas, primero en un colegio público y luego en uno privado, hasta su jubilación en 1972. A lo largo de su vida, Fujimura publicó diversos libros de rompecabezas y terminó convirtiéndose en una figura muy conocida en Japón, que era invitada con frecuencia a pronunciar conferencias y participar en programas de radio y televisión, donde llegó a tener su propio espacio semanal en 1959. En un plano más personal, Gardner revela que su intensa relación epistolar le hacía considerarlo como un viejo amigo, a pesar de no haber tenido el honor de conocerlo en persona.

AGRADECIMIENTOS. Este trabajo ha sido financiado en parte por los proyectos PGC2018-097286-B-I00 (en el caso del primer autor) y MTM2015-63612-P (en el caso del segundo). Los autores agradecen los comentarios y sugerencias de Francisco Santos y Daniel Ortega.

## REFERENCIAS

- [1] J. BADER, *341 Triangles with 33 Lines*, <https://www.johannesbader.ch/2013/09/341-triangles-with-33-lines/> (consultado el 19 de octubre de 2019).
- [2] W. B. CARVER, The polygonal regions into which a plane is divided by  $n$  straight lines, *Amer. Math. Monthly* **48** (1941), no. 10, 667–675.
- [3] G. CLÉMENT Y J. BADER, *Tighter Upper Bound for the Number of Kobon Triangles*, versión preliminar (2007) disponible en la web de la *OEIS*, <https://oeis.org/A006066/a006066.pdf>.
- [4] D. FORGE Y J. L. RAMÍREZ ALFONSÍN, Straight line arrangements in the real projective plane, *Discrete Comput. Geom.* **20** (1998), no. 2, 155–161.
- [5] K. FUJIMURA, *The Tokyo Puzzles*, Charles Scribner's Sons, Nueva York, 1978.
- [6] B. GRÜNBAUM, *Convex Polytopes*, Wiley, Nueva York, 1967.
- [7] B. GRÜNBAUM, *Arrangements and spreads*, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1972.
- [8] Z. FÜREDI Y I. PALÁSTI, Arrangements of lines with a large number of triangles, *Proc. Amer. Math. Soc.* **92** (1984), 561–566.
- [9] F. LEVI, Die Teilung der projektiven Ebene durch Gerade oder Pseudogerade, *Bet. Math.-Phys. Kl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig* **78** (1926), 256–267.

- [10] J. -P. ROUDNEFF, On the number of triangles in simple arrangements of pseudolines in the real projective plane, *Discrete Math.* **60** (1986), 243–251.
- [11] J.-P. ROUDNEFF, Arrangements of lines with a minimum number of triangles are simple, *Discrete Comput. Geom.* **3** (1988), no. 2, 97–102.
- [12] J.-P. ROUDNEFF, The maximum number of triangles in arrangements of pseudolines, *J. Combin. Theory Ser. B* **66** (1996), no. 1, 44–74.
- [13] N. J. A. SLOANE (EDITOR), *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, publicada electrónicamente en <https://oeis.org>.

J. P. MORENO, DPTO. DE MATEMÁTICAS, FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

Correo electrónico: [josepedro.moreno@uam.es](mailto:josepedro.moreno@uam.es)

L. F. PRIETO-MARTÍNEZ, DPTO. DE MATEMÁTICAS, FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID, E I.E.S. ANSELMO LORENZO, SAN MARTÍN DE LA VEGA, MADRID

Correo electrónico: [felipe.prieto@educa.madrid.org](mailto:felipe.prieto@educa.madrid.org)