
MIRANDO HACIA EL FUTURO

Sección a cargo de

Antonio Viruel

Problemas de frontera libre

por

Xavier Ros-Oton

Las ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) son un campo de investigación muy amplio y activo, con importantes conexiones con otros campos como el análisis armónico, la geometría diferencial, el cálculo de variaciones, la teoría de probabilidad, la teoría geométrica de la medida, o la matemática computacional y aplicada.

Una de las preguntas más básicas y centrales en el estudio de EDPs es la regularidad:

*Dada una cierta EDP (o una clase general de EDPs),
¿son regulares todas sus soluciones, o pueden tener singularidades?*

La teoría de regularidad para EDPs elípticas se desarrolló enormemente a lo largo de la segunda mitad del siglo XX, con trabajos de De Giorgi, Nash, Nirenberg, Caffarelli, Krylov y Evans, entre otros; y es aún uno de los temas centrales de investigación en EDPs. Además, cuestiones muy similares aparecen de forma natural en contextos puramente geométricos, y varias ideas de la teoría de regularidad en EDPs tuvieron incluso un papel importante en la demostración de Perelman de la conjetura de Poincaré [62].

En este artículo describiremos la teoría de regularidad para *problemas de frontera libre*. Por un lado, este tipo de ecuaciones modelan muchos fenómenos naturales en física, biología, ecología, economía y matemática financiera. Por otro lado, el estudio de dichos problemas tiene una componente bastante geométrica, y está conectada con el estudio de las superficies mínimas.

A continuación presentamos los problemas que estudiaremos (sección 1), así como la teoría matemática «clásica» sobre la regularidad de las fronteras libres (sección 2). Luego veremos varios resultados recientes y cuestiones abiertas sobre las singularidades que aparecen en dichos problemas (secciones 3 y 4), y por último discutiremos brevemente las versiones no locales de estos problemas de frontera libre (sección 5).

Este artículo no pretende ser una recopilación exhaustiva de resultados sobre problemas de frontera libre, sino una mera introducción, mediante una selección de

algunos resultados y problemas representativos del área. Su elección refleja, evidentemente, los gustos e intereses personales del autor.

1. PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE

Los problemas de frontera libre son una clase de problemas de EDPs en los cuales, además de tener una función u como incógnita, tenemos también una interfase (frontera) que es desconocida (libre) y forma parte del problema.

El ejemplo más clásico es probablemente el problema de Stefan, que describe matemáticamente transiciones de fase sólido-líquido. Más concretamente, podemos pensar que tenemos un bloque de hielo sumergido en agua líquida, y queremos determinar la evolución de dicho sistema, i. e., entender cómo se derrite el hielo. Para hacerlo más sencillo, podemos pensar que el hielo está a cero grados. Las incógnitas en este problema son dos:

- La temperatura del agua líquida en todo punto x y tiempo t .
- La interfase que separa el hielo del agua líquida.

Además, no podemos hallar una sin la otra: las dos incógnitas (función e interfase) se necesitan mutuamente.

Dicha característica es común en los problemas de frontera libre. Típicamente queremos entender la interfase desconocida, y para ello debemos entender al mismo tiempo el problema de EDPs subyacente.

A continuación describiremos brevemente los problemas de frontera libre más clásicos, para luego estudiar la teoría de regularidad de sus fronteras libres. Hablaremos primero de problemas elípticos (i. e., que no dependen del tiempo t), para luego estudiar brevemente el problema de Stefan.

1.1. EL PROBLEMA DEL OBSTÁCULO

El problema del obstáculo es uno de los problemas más conocidos en EDPs elípticas, y aparece de forma natural en contextos muy distintos: desde filtración de fluidos y elasticidad hasta estrategias óptimas en finanzas, pasando por sistemas de partículas en interacción en física o biología. También aparece en problemas puramente matemáticos en teoría del potencial, matrices aleatorias, o teoría de probabilidad. El lector interesado puede consultar los libros [21, 42, 51, 35, 50, 26] para conocer más detalles.

La formulación matemática más simple del problema es buscar las funciones que minimizan el funcional de Dirichlet

$$\mathcal{E}(v) = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx$$

entre todas las funciones v que cumplen $v \geq \varphi$ en Ω , donde $\varphi \in C^\infty$ es una función dada (el obstáculo). Aquí, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, y típicamente tendremos condiciones de borde $v = g$ en $\partial\Omega$.

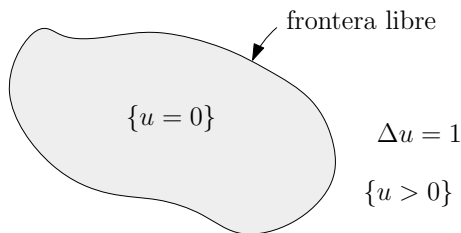


Figura 1: Representación simplificada del problema del obstáculo (1) y su frontera libre.

No es difícil demostrar, con métodos estándar del cálculo de variaciones, que para cada dato de borde g (suficientemente regular) existe una única función v que minimiza dicho funcional. Dicha función v cumplirá $\Delta v = 0$ en el conjunto $\{v > \varphi\}$ donde v es mayor que el obstáculo, y además $\nabla v = \nabla \varphi$ en la interfase $\partial\{v > \varphi\}$. ¡El problema es que no sabemos cuál es este conjunto $\{v > \varphi\}$!

Una forma alternativa de escribir el mismo problema es considerando $u := v - \varphi$, y entonces se puede demostrar¹ que

$$\begin{aligned} \Delta u &= \chi_{\{u > 0\}} \\ u &\geq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $\chi_E(x)$ denota la función característica del conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$.

Es importante remarcar que (1) es una *EDP no lineal*, ya que el conjunto $\{u > 0\}$ es desconocido a priori.

Otra forma de pensar en (1) es que tenemos un abierto $\{u > 0\}$ donde la función cumple $\Delta u = 1$ en $\{u > 0\}$, y fuera de este abierto tenemos simplemente $u = 0$; ver la figura 1. Además, en la *frontera libre* $\Gamma := \partial\{u > 0\}$ tendremos que

$$u = |\nabla u| = 0 \quad \text{en } \Gamma.$$

Eso indica que tenemos un problema sobredeterminado para u , y en cierto sentido eso es lo que hace que Γ quede determinada por el problema.

Desde el punto de vista matemático, la cuestión principal es:

*¿Qué podemos decir de la frontera libre Γ ?
¿Será siempre regular, o puede tener singularidades?*

Este es el tipo de cuestión que estudiaremos en el presente artículo.

1.2. EL PROBLEMA DE FRONTERA LIBRE DE BERNOULLI

El problema de frontera libre de Bernoulli es otro problema clásico que aparece en dinámica de fluidos ideales, problemas de diseño óptimo, electrostática, y otras aplicaciones; el lector interesado puede consultar más detalles en, por ejemplo, [32]

¹De hecho, aquí se supone por simplicidad que $\Delta \varphi \equiv 1$, pero se puede hacer algo muy parecido en el caso general $\varphi \in C^\infty$.

El problema es básicamente una EDP elíptica *sobredeterminada*: buscamos una función $u \geq 0$, que sea armónica y positiva en un cierto abierto U , se anule en el complementario U^c , y tal que tenga gradiente constante en la frontera libre ∂U . En otras palabras², tenemos

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{en } \{u > 0\} \\ |\nabla u| &= 1 && \text{en } \partial\{u > 0\} \\ u &\geq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

La idea es parecida a la que se muestra en la figura 1, pero en este caso la función cumple $\Delta u = 0$ en $\{u > 0\}$, y sobre todo, la condición del gradiente sobre la frontera libre es distinta. Como veremos, eso hace que los resultados para los problemas (1) y (2) sean bastante distintos.

La ecuación (2) se cumple típicamente dentro de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ fijado, con condiciones de Dirichlet $u = g$ en $\partial\Omega$, siendo g una función dada. Sin embargo, en nuestro análisis Ω y g no juegan ningún papel, por lo tanto estudiaremos simplemente (2).

Para construir soluciones de (2), hay que estudiar el funcional³

$$\mathcal{E}_B(u) := \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + |\{u > 0\} \cap \Omega|.$$

Usando métodos estándar del cálculo de variaciones no es difícil demostrar que, dada una función regular g en $\partial\Omega$, existe una⁴ función $u \in H^1(\Omega)$ que minimiza el funcional \mathcal{E}_B entre todas las funciones tales que $u = g$ en $\partial\Omega$. Además, dicha función minimizante cumplirá necesariamente (2) dentro del dominio Ω . A lo largo de este artículo, llamaremos solución minimizante de (2) a cualquier solución del problema que sea un minimizante del funcional $\mathcal{E}_B(u)$.

El estudio matemático de los minimizantes de \mathcal{E}_B fue iniciado por Alt y Caffarelli en [3] y, aunque quedan algunos problemas abiertos importantes, hoy en día la teoría de regularidad para este problema está muy desarrollada.

1.3. EL PROBLEMA DE STEFAN

Como hemos visto antes, el problema de Stefan, introducido durante el siglo XIX [60, 61, 46], describe la evolución de la temperatura durante una transición de fase, por ejemplo un bloque de hielo sumergido en agua.

La formulación matemática del problema de Stefan es la siguiente. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado. Denotamos por $\theta(x, t)$ la temperatura del agua en el punto $x \in \Omega$ a tiempo t , y supondremos por simplicidad que $\theta \geq 0$. Se puede demostrar

²Dicho abierto U , por definición, coincide con el conjunto $\{u > 0\}$. Es por eso que la notación U no aparece en (2).

³Aquí, $|E|$ denota la medida del conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$.

⁴No necesariamente única.

que, si consideramos $u(x, t) := \int_0^t \theta(x, \tau) d\tau$, entonces la nueva función u cumple

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= -\chi_{\{u>0\}} \\ u &\geq 0 \\ \partial_t u &\geq 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Esta formulación del problema de Stefan tiene la ventaja de que el caso estacionario de (3) es exactamente el problema del obstáculo (1).

2. REGULARIDAD DE LAS FRONTERAS LIBRES

Desde el punto de vista matemático, una pregunta central en los problemas anteriores es entender la *regularidad de las fronteras libres* [14, 50].

Por ejemplo, en el problema de Stefan: ¿hay alguna propiedad de regularización que haga que la frontera libre sea regular, independientemente de la condición inicial? (A priori solo sabemos que la frontera libre es el borde de un conjunto cerrado, por lo que podría ser extremadamente irregular, ¡incluso un conjunto fractal!)

Este tipo de preguntas son, en general, muy difíciles, e incluso en los casos más simples no se sabía nada antes de 1970. El desarrollo de la teoría de regularidad para fronteras libres empezó a finales de los setenta, y desde entonces ha sido un campo de investigación muy activo.

2.1. ESTRATEGIA GENERAL

La teoría de regularidad para problemas de frontera libre usa muchas ideas y herramientas de teoría geométrica de la medida, y hay una analogía clara con la teoría de regularidad para *superficies mínimas* [39].

La estrategia general se podría resumir de la siguiente forma. Tenemos una función u que es solución del problema de frontera libre (1) o (2). Entonces:

- El problema es invariante cuando reescalamos de la siguiente forma:

Si u es solución de (1), definimos $u_r(x) := \frac{u(rx)}{r^2}$.

Si u es solución de (2), definimos $u_r(x) := \frac{u(rx)}{r}$.

No es difícil demostrar que la función reescalada u_r cumple la misma EDP que u .

- Como el problema es invariante al reescalar, podemos estudiar *blow-ups*, i. e., límites de la forma

$$u_r \longrightarrow u_\circ \quad \text{cuando } r \downarrow 0.$$

De hecho, el límite existe a lo largo de una subsucesión $r_k \rightarrow 0$, y en principio distintas subsucesiones pueden dar distintos límites u_\circ .

- Los blow-ups u_\circ son siempre *homogéneos*, gracias a una cierta fórmula de monotonicidad.
- Luego la idea es *clasificar blow-ups*, por lo menos bajo ciertas hipótesis, y demostrar que u_\circ tiene que ser una función 1D (como en la figura 2).⁵
En particular, en ese caso, la frontera libre $\partial\{u_\circ > 0\}$ será un hiperplano.
- Esto significa que, a medida que reescalamos, nuestra frontera libre $\partial\{u_r > 0\}$ será cada vez más plana.⁶
- Finalmente, el último paso es demostrar que si la frontera libre es suficientemente plana en una bola B_ρ , entonces es necesariamente C^∞ en un entorno del origen.

Esta estrategia, inspirada por la teoría de superficies mínimas, ha sido implementada⁷ para los problemas (1) y (2). Un paso clave es la clasificación de blow-ups, y es allí donde los problemas (1) y (2) son muy distintos.

2.2. CLASIFICACIÓN DE BLOW-UPS Y PUNTOS REGULARES

Veamos a continuación qué resultados de clasificación de blow-ups tenemos en los problemas (1) y (2), y cómo se traduce esto en términos de regularidad de las fronteras libres.

En el problema del obstáculo, se pueden clasificar completamente los blow-ups, y en cualquier dimensión n pasa lo mismo:

$$\begin{array}{l} u_\circ \text{ es un blow-up} \\ \text{para el problema (1) en } \mathbb{R}^n, \text{ y} \\ \boxed{|\{u_\circ = 0\}| > 0} \end{array} \implies u_\circ \text{ es una función 1D}$$

Es importante remarcar que, en toda dimensión $n \geq 2$, existen soluciones con *puntos singulares*, cuyos blow-ups cumplen $|\{u_\circ = 0\}| = 0$. En la siguiente sección veremos en más detalle cómo son dichos puntos singulares.

La clasificación de blow-ups nos lleva al siguiente resultado.

TEOREMA 2.1 ([7]). *Sea u una solución de (1) en \mathbb{R}^n , y sea $x_\circ \in \partial\{u > 0\}$ un punto de la frontera libre. Supongamos además que*

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{|\{u = 0\} \cap B_r(x_\circ)|}{|B_r(x_\circ)|} > 0.$$

Entonces, la frontera libre es C^∞ en un entorno de x_\circ .

⁵Decimos que una función $u_\circ : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función 1D cuando se puede escribir como $u_\circ(x) = U(x \cdot e)$ para algún $e \in \mathbb{S}^{n-1}$, con $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

⁶Aquí, el hecho de que la frontera libre sea plana significa que $\partial\{u_r > 0\} \subset \{|x \cdot e| < \varepsilon\}$ con $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ y $\varepsilon > 0$ pequeño.

⁷Para más detalles, el lector interesado puede consultar los libros [50, 14, 26].

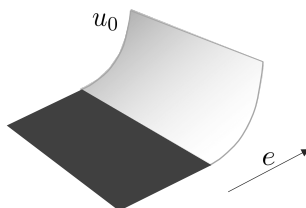


Figura 2: Un blow-up 1D para el problema (1). La parte oscura corresponde a $\{u_\circ = 0\}$.

Este resultado, establecido por Caffarelli en su famoso⁸ artículo [7], nos da una condición que distingue puntos regulares en cualquier dimensión n . Además, dicha condición es necesaria, como veremos en la siguiente sección.

En el problema de Bernoulli, la clasificación de blow-ups es completamente distinta, y depende de la dimensión n :

$$\begin{array}{l}
 u_\circ \text{ es un blow-up minimizante} \\
 \text{para el problema (2) en } \mathbb{R}^n, \text{ y} \\
 \boxed{n \leq 4}
 \end{array}
 \implies
 \begin{array}{l}
 u_\circ \text{ es una función 1D}
 \end{array}$$

En otras palabras, en dimensiones $n \leq 4$ todos los blow-ups son 1D, i.e., no hay puntos singulares. En la siguiente sección veremos que, en dimensiones más altas, sí que existen soluciones con puntos singulares.

Dicha clasificación de blow-ups nos lleva al siguiente resultado.

TEOREMA 2.2 ([3, 10, 40]). *Sea u una solución minimizante de (2) en \mathbb{R}^n , y sea $x_\circ \in \partial\{u > 0\}$ un punto de la frontera libre. Supongamos además que $n \leq 4$.*

Entonces, la frontera libre es C^∞ en un entorno de x_\circ .

Además, en dimensiones $n \geq 5$, el mismo resultado se cumple siempre que el blow-up de u en x_\circ sea una función 1D.

En resumen, estos resultados nos dicen básicamente que

$$\begin{array}{l}
 \text{la frontera libre } \partial\{u > 0\} \text{ es } C^\infty, \\
 \text{posiblemente fuera de un conjunto de puntos singulares.}
 \end{array}$$

A continuación veremos qué podemos decir sobre los puntos singulares.

3. SINGULARIDADES

Entender la estructura de las posibles singularidades es un tema de investigación central en varias áreas relacionadas con EDPs no lineales y análisis geométrico. En nuestro contexto, es natural preguntarse:

- ¿Cuán «grande» puede ser el conjunto singular?

⁸Este es uno de los artículos importantes por los que Caffarelli recibió el Premio Wolf en 2012 y el Premio Shaw en 2018.

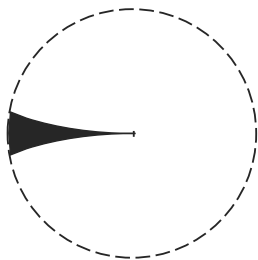


Figura 3: Una cúspide para el problema (1). La parte oscura corresponde a $\{u = 0\}$, mientras que la parte clara es $\{u > 0\}$.

- En caso de que sea un conjunto grande, ¿se podría demostrar que tiene buenas propiedades estructurales o de regularidad?

3.1. ALGUNOS EJEMPLOS

Un primer paso natural es intentar construir ejemplos de soluciones con puntos singulares.

En el problema del obstáculo (1), sabemos que en cualquier punto singular x_o la solución tiene que cumplir

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|\{u = 0\} \cap B_r(x_o)|}{|B_r(x_o)|} = 0. \quad (4)$$

En otras palabras, el conjunto $\{u = 0\}$ tiene densidad cero en ese punto, y por lo tanto parecería que $\{u = 0\}$ tiene que formar algún tipo de cúspide en x_o .

Fue Schaeffer [56] el primero que construyó varias soluciones en \mathbb{R}^2 en las cuales la frontera libre forma una cúspide. Estos ejemplos se pueden construir usando análisis complejo, y las cúspides vienen dadas (localmente) por las curvas $x_2 = \pm x_1^{2k+\frac{1}{2}}$, para $0 \leq x_1 \leq 1$, con k entero positivo; ver la figura 3.

Schaeffer también construyó otros tipos de singularidades (cúspides dobles), e incluso demostró que tomando obstáculos C^∞ se pueden construir ejemplos con un número infinito de cúspides en $B_1 \subset \mathbb{R}^2$.

Por otro lado, en el problema de Bernoulli (2), la construcción de soluciones con puntos singulares es completamente distinta, y más parecida al caso de superficies mínimas. No es difícil demostrar que, en cualquier dimensión $n \geq 3$, existe un cono circular como el de la figura 4 para el cual hay una función armónica, homogénea de grado 1, que cumple (2) y tal que $\{u = 0\}$ coincide con dicho cono. Lo que falta por comprobar es si esa solución homogénea es realmente minimizante del funcional \mathcal{E}_B .

Comprobar si una solución dada es minimizante no es nada fácil, y en este caso el problema fue resuelto por Caffarelli, Jerison y Kenig [10], y De Silva y Jerison [19]. Demostraron que la correspondiente solución homogénea no es minimizante cuando $n \leq 6$, y sí que lo es cuando $n = 7$.

Esto nos da un ejemplo de punto singular para (2) en \mathbb{R}^7 .

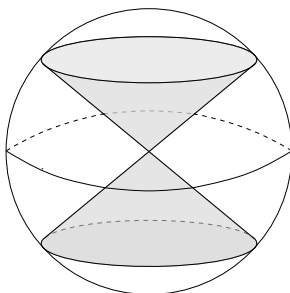


Figura 4: Una singularidad para el problema (2) en \mathbb{R}^n . La parte oscura corresponde a $\{u = 0\}$, mientras que la parte clara es $\{u > 0\}$.

Como hemos visto antes, el mejor resultado conocido de clasificación de blow-ups nos dice que, en dimensiones $n \leq 4$, todos los blow-ups son 1D. Esto nos deja con la siguiente pregunta:

PROBLEMA ABIERTO 1. *En dimensiones $n = 5$ y $n = 6$, ¿es posible clasificar completamente los blow-ups minimizantes para el problema (2) y demostrar que son necesariamente 1D?*

Este es uno de los problemas abiertos más importantes para el problema de Bernoulli.

3.2. ESTIMACIONES PARA EL CONJUNTO SINGULAR

Los primeros resultados para el conjunto singular en el problema del obstáculo (1) fueron obtenidos por Caffarelli y Rivière [12] y Sakai [53, 54] en dimensión 2, usando de forma crucial que en \mathbb{R}^2 las funciones armónicas se pueden estudiar usando herramientas del análisis complejo.

En dimensiones $n \geq 3$, donde el análisis complejo no nos puede ayudar, los primeros resultados para el conjunto singular fueron demostrados por Caffarelli [8], Weiss [63], y Monneau [48]. El resultado principal es el siguiente:

TEOREMA 3.1 ([8]). *Sea u una solución de (1) en \mathbb{R}^n , y sea Σ el conjunto de puntos singulares⁹ de la frontera libre.*

Entonces, Σ está contenido localmente en una variedad C^1 de dimensión $n - 1$.

Este resultado nos dice que, aunque dicho conjunto singular puede ser bastante grande (de dimensión $n - 1$, igual que el conjunto regular), sí que tiene buenas propiedades de regularidad. Más recientemente ha habido varios avances en la dirección de mejorar la regularidad del conjunto singular; ver [17], [31] y [29].

Por otro lado, los resultados para el conjunto singular en el problema de Bernoulli (2) tienen que ser necesariamente distintos. Recordemos que, mientras que en el problema del obstáculo tenemos ejemplos de conjuntos singulares grandes en \mathbb{R}^2 , en el problema de Bernoulli la situación es distinta, y en dimensiones $n \leq 4$ sabemos

⁹Recordamos que un punto x_0 es singular siempre que se cumpla (4).

que no puede haber puntos singulares. El resultado principal en este contexto es el siguiente:

TEOREMA 3.2 ([40, 64]). *Sea u una solución minimizante de (2) en \mathbb{R}^n , y sea Σ el conjunto de puntos singulares¹⁰ de la frontera libre. Entonces,*

$$\dim_{\mathcal{H}}(\Sigma) \leq n - 5.$$

En otras palabras, el teorema nos dice que el conjunto singular Σ es muy *pequeño*. Aquí, $\dim_{\mathcal{H}}(\Sigma)$ denota la dimensión de Hausdorff¹¹ del conjunto Σ .

En resumen, en el problema del obstáculo (1) hemos visto que el conjunto singular puede ser grande pero tiene buenas propiedades de regularidad, mientras que en el problema de Bernoulli (2) el conjunto singular es siempre pequeño.

3.3. REGULARIDAD GENÉRICA EN EL PROBLEMA DEL OBSTÁCULO

Otra cuestión muy importante en el estudio de singularidades es el desarrollo de métodos para demostrar resultados de *regularidad genérica*.¹² Este es uno de los grandes retos para la teoría de EDPs en el futuro.

En efecto, en problemas de EDPs en los cuales pueden aparecer singularidades, es importante entender si estas singularidades aparecen «a menudo», o si en cambio «la mayoría» de soluciones no tienen singularidades. En el contexto de este artículo, la pregunta clave es entender la regularidad genérica de las fronteras libres.

En el problema del obstáculo esta pregunta es especialmente relevante, ya que los puntos singulares pueden formar un conjunto muy grande, de dimensión $n - 1$ (tan grande como el conjunto regular). La siguiente conjetura fue formulada por Schaeffer en [55]:

CONJETURA (Schaeffer, 1974). *Genéricamente, las fronteras libres en el problema del obstáculo (1) son C^∞ , sin puntos singulares.*

En otras palabras, la conjetura dice que, genéricamente, la frontera libre no debería tener singularidades.

Hasta hace poco, la conjetura solo había sido demostrada en \mathbb{R}^2 [48], y no se sabía nada en \mathbb{R}^3 o en dimensiones más altas. Recordemos que en el problema del obstáculo la cuestión de regularidad genérica es particularmente relevante, ya que el conjunto singular en principio podría ser tan grande como el conjunto regular, mientras que en otros problemas como el de Bernoulli el conjunto singular es de dimensión más pequeña. Además, desde el punto de vista de las motivaciones y aplicaciones, es particularmente relevante entender el problema en \mathbb{R}^3 .

El siguiente resultado fue demostrado recientemente por Figalli, el autor y Serra:

¹⁰Aquí, decimos que un punto x_o es singular siempre que la frontera libre no sea C^∞ en un entorno de x_o .

¹¹La dimensión de Hausdorff nos permite definir, para cualquier conjunto medible, una noción de su dimensión. En cierto sentido, nos da una idea del «tamaño» de un conjunto.

¹²Aquí, con regularidad genérica nos referimos a que exista un conjunto abierto y denso de condiciones de borde para las cuales la solución correspondiente no tiene singularidades.

TEOREMA 3.3 ([29]). *Genéricamente, en \mathbb{R}^n el conjunto de puntos singulares Σ para soluciones de (1) tiene dimensión de Hausdorff menor o igual a $n - 4$, y*

$$\mathcal{H}^{n-4}(\Sigma) = 0.$$

En particular, la conjetura de Schaeffer es cierta en \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^4 .

Aquí, \mathcal{H}^{n-4} denota la medida de Hausdorff¹³ de dimensión $n - 4$.

Es importante remarcar que hay muy pocos resultados conocidos en esta dirección en EDPs elípticas, y la mayoría tratan solo los casos en que el conjunto singular es muy pequeño [48, 59].

Las siguientes preguntas siguen completamente abiertas.

PROBLEMA ABIERTO 2. *¿Es cierta la conjetura de Schaeffer para $n \geq 5$?*

PROBLEMA ABIERTO 3. *¿Se puede demostrar un resultado de regularidad genérica de fronteras libres para el problema de Bernoulli (2)?*

4. EL PROBLEMA DE STEFAN

Veamos a continuación qué podemos decir para el problema de Stefan (3). Básicamente, la teoría desarrollada por Caffarelli para estudiar los puntos regulares en el problema del obstáculo (1) se aplica también al problema de Stefan [7]. Por lo tanto, falta ver qué se puede decir sobre el conjunto de puntos singulares.

Como hemos explicado anteriormente, una de las preguntas más importantes en problemas de EDPs en los que aparecen singularidades es establecer estimaciones para el *tamaño* del conjunto singular. Algunos resultados famosos en esta dirección incluyen teoremas sobre superficies mínimas [58, 2], las ecuaciones de Navier-Stokes [11], y el flujo por curvatura media [66].

En el problema de Stefan (3), el mejor resultado conocido hasta el momento implica que, para cada tiempo t fijado, el conjunto singular tiene dimensión $n - 1$ [65, 6, 47]. Esto es óptimo en espacio, en el sentido de que se pueden construir ejemplos en los que el conjunto singular contiene una hipersuperficie de dimensión $n - 1$ (por ejemplo, una esfera) para algún tiempo fijado t_0 . En este sentido, parecería que el conjunto de puntos singulares puede ser tan grande como el de puntos regulares. Sin embargo, hay que notar que si miramos la frontera libre conjuntamente en espacio y tiempo, como subconjunto de \mathbb{R}^{n+1} , entonces el conjunto regular tiene dimensión n , y el conjunto singular quizás podría ser más pequeño.

En un futuro artículo con Figalli y Serra [30] demostramos lo siguiente:

TEOREMA 4.1 ([30]). *Sea $u(x, t)$ una solución no estacionaria del problema de Stefan (3) en \mathbb{R}^n , y sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ el conjunto de puntos singulares. Entonces,*

$$\dim_{\mathcal{H}}(\Sigma) \leq n - 1.$$

¹³La medida de Hausdorff \mathcal{H}^β es una generalización del área o volumen, válida para conjuntos que a priori pueden ser muy irregulares.

Nuestro resultado halla por primera vez la estimación óptima sobre la dimensión del conjunto singular en el problema de Stefan.

Por otro lado, es interesante notar que no hay ejemplos en los cuales aparezcan puntos singulares para todo tiempo t , y no está (o estaba) claro si eso podría ocurrir o no. En caso de que esto no pueda ocurrir, la pregunta natural sería entonces establecer estimaciones para el conjunto de *tiempos singulares*. En concreto, si denotamos por $\Sigma_t \subset \mathbb{R}^n$ el conjunto de los puntos singulares a tiempo t , entonces podemos definir

$$\mathcal{S} = \{t : \Sigma_t \neq \emptyset\},$$

i. e., el conjunto de todos los tiempos para los que existe alguna singularidad.

El siguiente resultado fue anunciado en la charla plenaria de Alessio Figalli en el ICM 2018 [28], y aparecerá demostrado en el artículo [30]:

TEOREMA 4.2 ([30]). *Sea $u(x, t)$ una solución no estacionaria del problema de Stefan (3) en \mathbb{R}^3 , y sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ el conjunto de tiempos singulares. Entonces,*

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{S}) \leq \frac{1}{2}. \quad (5)$$

En particular, la frontera libre es C^∞ (sin puntos singulares) para casi todo tiempo t .

Este es el primer resultado sobre el tamaño del conjunto de tiempos singulares para el problema de Stefan. Como hemos dicho antes, previamente no se sabía, ni siquiera, si las soluciones al problema de Stefan (3) en \mathbb{R}^3 podrían tener singularidades para *todo* tiempo t .

Finalmente, queremos remarcar que no está claro en este caso si la dimensión $\frac{1}{2}$ es óptima o no. Lo que sí está claro de la demostración es que este es un exponente *crítico* para dicho problema. Esto es similar (aunque los resultados y demostraciones son muy distintos) a lo que pasa para las ecuaciones de Navier-Stokes [11].

PROBLEMA ABIERTO 4. *¿Se puede mejorar la estimación (5) para el problema de Stefan en \mathbb{R}^3 ?*

Creemos que los métodos actuales están lejos de poder contestar esta pregunta, y por lo tanto aún queda camino por recorrer hasta entender completamente dicho problema.

5. PROBLEMAS CON OPERADORES NO LOCALES

Motivados por problemas de la teoría de probabilidad y matemática financiera [18], así como por modelos con sistemas de partículas en interacción en física o biología [16], durante las últimas dos décadas se han dedicado esfuerzos considerables a entender mejor el problema del obstáculo para el *laplaciano fraccionario*

$$(-\Delta)^s u(x) := c_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(x+y)}{|y|^{n+2s}} dy,$$

con $s \in (0, 1)$.

Cuando $s = \frac{1}{2}$, dicho problema resulta ser equivalente al problema de Signorini [22], ampliamente estudiado desde los años sesenta, pero para el cual aún quedan varias cuestiones abiertas.

5.1. EL PROBLEMA DEL OBSTÁCULO FRACCIONARIO

A continuación intentaremos dar una visión general sobre los principales resultados conocidos (y problemas abiertos) para el problema del obstáculo con el laplaciano fraccionario. Las principales preguntas en este contexto son:

- ¿Cuál es la regularidad óptima de las soluciones?
- ¿Se puede demostrar algún resultado de regularidad de las fronteras libres?

Los primeros resultados en esta dirección los obtuvo Silvestre en [57], donde demostró la regularidad casi-óptima de las soluciones¹⁴, $u \in C^{1,s-\varepsilon}$ para todo $\varepsilon > 0$. La regularidad óptima fue establecida más tarde por Caffarelli, Salsa, y Silvestre [15]:

Las soluciones u son $C^{1,s}$.

Además, también demostraron lo siguiente:

Las fronteras libres son regulares, fuera de un conjunto de puntos degenerados.

Más concretamente, demostraron que si u resuelve el problema del obstáculo para el laplaciano fraccionario $(-\Delta)^s$ en \mathbb{R}^n , entonces $u \in C^{1,s}$, y para cada punto de la frontera libre x_o se tiene la siguiente dicotomía: o bien la solución u es degenerada¹⁵ en x_o , o bien la frontera libre es C^1 en un entorno de x_o .

Después de los resultados de [15], se han establecido muchos más para el problema del obstáculo fraccionario, incluyendo: la regularidad C^∞ del conjunto de puntos regulares [43, 20, 44, 41], el estudio de los puntos degenerados [36, 4, 33, 38, 23, 34], el caso de operadores con *drift* [49, 37, 24, 45], o el estudio de problemas del obstáculo para operadores no locales más generales [13, 1].

A pesar de todos estos resultados, hay varios problemas básicos e importantes que siguen abiertos:

PROBLEMA ABIERTO 5. *Obtener una clasificación completa de los blow-ups para el problema del obstáculo fraccionario, incluso en \mathbb{R}^2 .*

Dicho problema está abierto incluso para el problema de Signorini ($s = \frac{1}{2}$).

PROBLEMA ABIERTO 6. *¿Es posible demostrar regularidad genérica de las fronteras libres en este contexto?*

¹⁴Aquí, denotamos $C^{1,\alpha}$, con $\alpha \in (0, 1]$, el espacio de Hölder de orden $1 + \alpha$. Es el espacio de funciones $w \in C^1$ tales que $|\nabla w(x) - \nabla w(y)| \leq M|x - y|^\alpha$ para alguna constante M independiente de x, y . Notamos que estos espacios cumplen $C^2 \subset C^{1,\alpha} \subset C^1$. Por ejemplo, la función $|x|^{1+\alpha}$ es $C^{1,\alpha}$ pero no C^2 .

¹⁵Para ver las definiciones exactas de solución u y puntos degenerados, el lector puede consultar [15].

El primer resultado en esta dirección ha sido establecido recientemente por Fernández-Real y el autor [25], demostrando que:

*Genéricamente, la parte no regular de la frontera libre
tiene dimensión menor o igual a $n - 2$.*

En el mismo artículo [25] se construyen ejemplos no triviales de soluciones cuyas fronteras libres solo tienen puntos degenerados.

5.2. EL CASO PARABÓLICO

A pesar de la gran variedad de resultados para el problema del obstáculo fraccionario, se sabe mucho menos del caso parabólico, en que la solución evoluciona con el tiempo.

El primer resultado en esta dirección fue de Caffarelli y Figalli [9], y demostraron la regularidad óptima de las soluciones.

TEOREMA 5.1 ([9]). *Sea $u(x, t)$ una solución del problema del obstáculo fraccionario parabólico. Entonces, u es $C^{1,s}$ en x .*

La cuestión de regularidad de las fronteras libres siguió abierta durante unos años. La principal dificultad aquí era que, en el contexto estacionario, las demostraciones se basan muy fuertemente en ciertas fórmulas de monotonicidad que parecen no existir en el contexto parabólico. Por lo tanto, hay que desarrollar un argumento completamente distinto.

En el caso $s > \frac{1}{2}$, esto se llevó a cabo en [5], donde Barrios, Figalli y el autor demostraron básicamente lo siguiente:

TEOREMA 5.2 ([5]). *Sea $s > \frac{1}{2}$, y sea $u(x, t)$ una solución del problema del obstáculo fraccionario parabólico. Entonces, la frontera libre es C^1 fuera de un conjunto de puntos degenerados.*

Este teorema extendía por primera vez los resultados de [15] al caso parabólico (cuando $s > \frac{1}{2}$), y con una demostración completamente distinta.

En este contexto, los siguientes problemas siguen abiertos.

PROBLEMA ABIERTO 7. *¿Se puede demostrar un resultado parecido para $s \leq \frac{1}{2}$?*

PROBLEMA ABIERTO 8. *Demostrar que las fronteras libres son de hecho C^∞ en los puntos regulares.*

PROBLEMA ABIERTO 9. *¿Qué podemos decir sobre los puntos degenerados?*

El lector interesado puede encontrar más información sobre estos temas, así como más detalles y demostraciones, en los artículos [52], [27] y [22].

REFERENCIAS

- [1] N. ABATANGELO Y X. ROS-OTON, Obstacle problems for integro-differential operators: higher regularity of free boundaries, *Adv. Math.* **360** (2020), 106931, 61 pp.

- [2] F. J. ALMGREN, *Almgren's big regularity paper. Q -valued functions minimizing Dirichlet's integral and the regularity of area-minimizing rectifiable currents up to codimension 2* (con un prefacio de J. E. Taylor y V. Scheffer), World Scientific Monograph Series in Mathematics, World Scientific, 2000.
- [3] H. W. ALT Y L. CAFFARELLI, Existence and regularity for a minimum problem with free boundary, *J. Reine Angew. Math.* **325** (1981), 105–144.
- [4] B. BARRIOS, A. FIGALLI Y X. ROS-OTON, Global regularity for the free boundary in the obstacle problem for the fractional Laplacian, *Amer. J. Math.* **140** (2018), 415–447.
- [5] B. BARRIOS, A. FIGALLI Y X. ROS-OTON, Free boundary regularity in the parabolic fractional obstacle problem, *Comm. Pure Appl. Math.* **71** (2018), 2129–2159.
- [6] A. BLANCHET, On the singular set of the parabolic obstacle problem, *J. Differential Equations* **231** (2006), 656–672.
- [7] L. CAFFARELLI, The regularity of free boundaries in higher dimensions, *Acta Math.* **139** (1977), 155–184.
- [8] L. CAFFARELLI, The obstacle problem revisited, *J. Fourier Anal. Appl.* **4** (1998), 383–402.
- [9] L. CAFFARELLI Y A. FIGALLI, Regularity of solutions to the parabolic fractional obstacle problem, *J. Reine Angew. Math.* **680** (2013), 191–233.
- [10] L. CAFFARELLI, D. JERISON Y C. KENIG, Global energy minimizers for free boundary problems and full regularity in three dimensions, *Noncompact problems at the intersection of geometry, analysis, and topology*, 83–97, Contemp. Math., 350, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [11] L. CAFFARELLI, R. KOHN Y L. NIRENBERG, Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **35** (1982), 771–831.
- [12] L. CAFFARELLI Y N. M. RIVIÈRE, Asymptotic behavior of free boundaries at their singular points, *Ann. of Math. (2)* **106** (1977), 309–317.
- [13] L. CAFFARELLI, X. ROS-OTON Y J. SERRA, Obstacle problems for integro-differential operators: regularity of solutions and free boundaries, *Invent. Math.* **208** (2017), 1155–1211.
- [14] L. CAFFARELLI Y S. SALSA, *A Geometric Approach to Free Boundary Problems*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 68, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.
- [15] L. CAFFARELLI, S. SALSA Y L. SILVESTRE, Regularity estimates for the solution and the free boundary of the obstacle problem for the fractional Laplacian, *Invent. Math.* **171** (2008), 425–461.
- [16] J. A. CARRILLO, M. G. DELGADINO Y A. MELLET, Regularity of local minimizers of the interaction energy via obstacle problems, *Comm. Math. Phys.* **343** (2016), 747–781.
- [17] M. COLOMBO, L. SPOLAOR Y B. VELICHKOV, A logarithmic epiperimetric inequality for the obstacle problem, *Geom. Funct. Anal.* **28** (2018), 1029–1061.

- [18] R. CONT Y P. TANKOV, *Financial Modelling with Jump Processes*, Financial Mathematics Series, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.
- [19] D. DE SILVA Y D. JERISON, A singular energy minimizing free boundary, *J. Reine Angew. Math.* **635** (2009), 1–21.
- [20] D. DE SILVA Y O. SAVIN, Boundary Harnack estimates in slit domains and applications to thin free boundary problems, *Rev. Mat. Iberoam.* **32** (2016), 891–912.
- [21] G. DUVAUT Y J. L. LIONS, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.
- [22] X. FERNÁNDEZ-REAL, The thin obstacle problem: a survey, *Publ. Mat.*, en prensa, 2021.
- [23] X. FERNÁNDEZ-REAL Y Y. JHAVERI, On the singular set in the thin obstacle problem: higher order blow-ups and the very thin obstacle problem, *Anal. PDE*, en prensa, 2020.
- [24] X. FERNÁNDEZ-REAL Y X. ROS-OTON, The obstacle problem for the fractional Laplacian with critical drift, *Math. Ann.* **371** (2018), 1683–1735.
- [25] X. FERNÁNDEZ-REAL Y X. ROS-OTON, Free boundary regularity for almost every solution to the Signorini problem, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **240** (2021), 419–466.
- [26] X. FERNÁNDEZ-REAL Y X. ROS-OTON, *Regularity Theory for Elliptic PDE*, 2021, versión preliminar del libro, disponible en la página web de los autores.
- [27] A. FIGALLI, Free boundary regularity in obstacle problems, *Journées EDP*, 1–24, CNRS groupement de recherche “Analyse des équations aux dérivées partielles”, Obernai, 2018.
- [28] A. FIGALLI, Regularity of interfaces in phase transitions via obstacle problems, 225–247, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Rio de Janeiro, 2018.
- [29] A. FIGALLI, X. ROS-OTON Y J. SERRA, Generic regularity of free boundaries for the obstacle problem, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **132** (2020), 181–292.
- [30] A. FIGALLI, X. ROS-OTON Y J. SERRA, The singular set in the Stefan problem, prepublicación, arXiv, 2021.
- [31] A. FIGALLI Y J. SERRA, On the fine structure of the free boundary for the classical obstacle problem, *Invent. Math.* **215** (2019), 311–366.
- [32] M. FLUCHER, Bernoulli’s Free-boundary Problem. *Variational Problems with Concentration*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, vol. 36, Birkhäuser, Basel, 1999.
- [33] M. FOCARDI Y E. SPADARO, On the measure and the structure of the free boundary of the lower dimensional obstacle problem, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **230** (2018), 125–184.
- [34] M. FOCARDI Y E. SPADARO, The local structure of the free boundary in the fractional obstacle problem, *Adv. Calc. Var.*, en prensa, 2021.

- [35] A. FRIEDMAN, *Variational Principles and Free Boundary Problems*, Wiley, New York, 1982.
- [36] N. GAROFALO Y A. PETROSYAN, Some new monotonicity formulas and the singular set in the lower dimensional obstacle problem, *Invent. Math.* **177** (2009), 415–461.
- [37] N. GAROFALO, A. PETROSYAN, C. A. POP Y M. SMIT VEGA GARCIA, Regularity of the free boundary for the obstacle problem for the fractional Laplacian with drift, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **34** (2017), 533–570.
- [38] N. GAROFALO Y X. ROS-OTON, Structure and regularity of the singular set in the obstacle problem for the fractional Laplacian, *Rev. Mat. Iberoam.* **35** (2019), 1309–1365.
- [39] E. GIUSTI, *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*, Monographs in Mathematics, 80, Birkhäuser, 1984.
- [40] D. JERISON Y O. SAVIN, Some remarks on stability of cones for the one phase free boundary problem, *Geom. Funct. Anal.* **25** (2015), 1240–1257.
- [41] Y. JHAVERI Y R. NEUMAYER, Higher regularity of the free boundary in the obstacle problem for the fractional Laplacian, *Adv. Math.* **311** (2017), 748–795.
- [42] D. KINDERLEHRER Y G. STAMPACCHIA, *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*, Pure and Applied Mathematics, 88, Academic Press, 1980.
- [43] H. KOCH, A. PETROSYAN Y W. SHI, Higher regularity of the free boundary in the elliptic Signorini problem, *Nonlinear Anal.* **126** (2015), 3–44.
- [44] H. KOCH, A. RÜLAND Y W. SHI, Higher regularity for the fractional thin obstacle problem, *New York J. Math.* **25** (2019), 745–838.
- [45] T. KUKULJAN, The fractional obstacle problem with drift: higher regularity of free boundaries, *J. Funct. Anal.*, en prensa, 2021.
- [46] G. LAMÉ Y B. P. CLAPEYRON, Mémoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide, *Ann. Chim. Phys.* **47** (1831), 250–256.
- [47] E. LINDGREN Y R. MONNEAU, Pointwise regularity of the free boundary for the parabolic obstacle problem, *Calc. Var. Partial Differential Equations* **54** (2015), 299–347.
- [48] R. MONNEAU, On the number of singularities for the obstacle problem in two dimensions, *J. Geom. Anal.* **13** (2003), 359–389.
- [49] A. PETROSYAN Y C. A. POP, Optimal regularity of solutions to the obstacle problem for the fractional Laplacian with drift, *J. Funct. Anal.* **268** (2015), 417–472.
- [50] A. PETROSYAN, H. SHAHGOLIAN Y N. URALTSEVA, *Regularity of Free Boundaries in Obstacle-type Problems*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 136, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.
- [51] J. F. RODRIGUES, *Obstacle Problems in Mathematical Physics*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 134, North-Holland, Amsterdam, 1987.
- [52] X. ROS-OTON, Obstacle problems and free boundaries: an overview, *SeMA J.* **75** (2018), 399–419.

- [53] M. SAKAI, Regularity of a boundary having a Schwarz function, *Acta Math.* **166** (1991), 263–297.
- [54] M. SAKAI, Regularity of free boundaries in two dimensions, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **20** (1993), no. 3, 323–339.
- [55] D. G. SCHAEFFER, An example of generic regularity for a nonlinear elliptic equation, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **57** (1974), 134–141.
- [56] D. G. SCHAEFFER, Some examples of singularities in a free boundary, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **4** (1977), 133–144.
- [57] L. SILVESTRE, Regularity of the obstacle problem for a fractional power of the Laplace operator, *Comm. Pure Appl. Math.* **60** (2007), 67–112.
- [58] J. SIMONS, Minimal varieties in riemannian manifolds, *Ann. of Math. (2)* **88** (1968), 62–105.
- [59] N. SMALE, Generic regularity of homologically area minimizing hypersurfaces in eight dimensional manifolds, *Comm. Anal. Geom.* **1** (1993), 217–228.
- [60] J. STEFAN, Ueber einige Probleme der Theorie der Wärmeleitung, *Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin Math. Kl.* **98** (1889), 473–484.
- [61] J. STEFAN, Ueber die Theorie der Eisbildung, insbesondere ueber die Eisbildung im Polarmeere, *Ann. Physik Chemie* **42** (1891), 269–286.
- [62] T. TAO, Perelman’s proof of the Poincaré conjecture: a nonlinear PDE perspective, prepublicación, arXiv, 2006.
- [63] G. S. WEISS, A homogeneity improvement approach to the obstacle problem, *Invent. Math.* **138** (1999), 23–50.
- [64] G. S. WEISS, Partial regularity for a minimum problem with free boundary, *J. Geom. Anal.* **9** (1999), 317–326.
- [65] G. S. WEISS, Self-similar blow-up and Hausdorff dimension estimates for a class of parabolic free boundary problems, *SIAM J. Math. Anal.* **30** (1999), 623–644.
- [66] B. WHITE, The size of the singular set in mean curvature flow of mean-convex sets, *J. Amer. Math. Soc.* **13** (2000), 665–695.

XAVIER ROS-OTON, ICREA & UNIVERSITAT DE BARCELONA

Correo electrónico: xros@ub.edu

Página web: <http://www.ub.edu/pde/xros>