Las Medallas Fields

Sección a cargo de

Leovigildo Alonso Tarrío y Ana Jeremías López

Vladimir Voevodsky, Medalla Fields 2002

por

Alberto Navarro Garmendia

Introducción

En 2017 fallece Vladimir Voevodsky en su residencia de Princeton, víctima de un aneurisma según informa su familia. Su muerte, con tan solo 51 años, coge por sorpresa a la comunidad matemática y deja huérfanos a los dos campos de investigación que fundó: la *teoría de homotopía motívica*, el mayor avance en la teoría de motivos desde que la postulase Alexander Grothendieck y con la que ganaría la Medalla Fields en 2002; y la *fundamentación univalente* y *teoría de tipos de homotopía*, un ambicioso proyecto que pretende codificar toda la matemática moderna en aras de poder comprobar por ordenador la validez de la prueba de todos y cada uno de los teoremas y artículos de investigación. Su estelar carrera investigadora contrasta con una etapa formativa complicada y fuera de lo común: expulsado de la carrera de Matemáticas de la Universidad Estatal de Moscú por bajo rendimiento, nunca se licenciará, casi suspende el examen de acceso al doctorado de Harvard y aparca sus estudios en varios momentos. Repasamos en esta edición de la sección de las Medallas Fields su vida y su obra matemática.[1]

1. Biografía

Voevodsky nace en 1966 en el seno de un matrimonio de científicos rusos. Su madre, catedrática de química de la Universidad de Moscú, y su padre, físico y director de un laboratorio de física experimental de la Academia Rusa de Ciencias, le brindan desde joven una educación esmerada. Sin embargo, desde pequeño Voevodsky

[1]El autor agradece a Leovigildo Alonso Tarrío y a Ana Jeremías López su ayuda en la preparación de este artículo, especialmente en la redacción de la sección sobre la fundamentación univalente y la teoría de tipos de homotopía.

muestra propensión a no aceptar el marco dado y tiene problemas con la sociedad comunista de la Rusia de aquellos tiempos: es expulsado en tres ocasiones del instituto, una de ellas por cuestionar la afirmación de su profesora de que Dostoievski era un autor pro-comunista.

Voevodsky, School of Mathematics, Institute for Advanced Study, Princeton, Nueva Jersey.

Voevodsky inicia sus estudios de Matemáticas en la Universidad Estatal de Moscú en 1983, a los 17 años, una vez aprobado el examen de acceso reservado a los jóvenes que no pertenecían a asociaciones afectas al régimen. En esta época, comienza a sufrir episodios depresivos y otras enfermedades mentales que se agravan al caer en la bebida, dolencias contra las que luchará el resto de su vida. Todo ello, unido a la desmotivación que experimenta en varias de las asignaturas, le lleva a dejar en suspenso sus estudios durante varios semestres. Seis años después de su ingreso, en 1989, es expulsado de la universidad por «bajo rendimiento académico» y la sombra de tener que realizar un servicio militar de hasta tres años le acecha. Sin embargo, estas circunstancias no impiden que Voevodsky se desarrolle durante su etapa universitaria como un prometedor investigador, mucho más de lo que cabría esperar para su corta edad. Mientras desempeña su trabajo como asistente de reprografía en el Liceo de Tecnologías de la Información, conoce a George Shabat, en aquel momento un joven matemático investigador relegado a la periferia por sus ideas políticas. Voevodsky, al ver papeles con fórmulas sobre la mesa de Shabat, se dirige a él y le pide algún reto matemático. Comienza entonces una relación y amistad en la que Voevodsky pedirá a Shabat que le tutele su aprendizaje de manera extraoficial.

En enero de 1984, mientras Voevodsky cursa su primer año de universidad, Grothendieck escribe *Esquisse d'un programme*. El texto, que Grothendieck envió como programa de investigación para una plaza en el CNRS después de 12 años en Montpellier fuera de los circuitos oficiales, no fue escrito con el rigor habitual de las matemáticas. Además, la práctica totalidad de los temas que esbozaba no eran «áreas activas» en el sentido tradicional: Grothendieck proponía temas de trabajo inéditos o enfoques radicalmente novedosos en áreas tan diversas y establecidas como la topología general, las superficies de Riemann, la geometría bidimensional o la teoría de Galois. En aquel momento, *Esquisse d'un programme* no fue tomado en serio por gran parte de la comunidad matemática. Sin embargo, Moscú fue una de las pocas excepciones. Al cabo de unos meses comienzan a circular copias del *Esquisse* de mano en mano por la Universidad Estatal de Moscú en forma de *samizdat.*[2] Shabat entrega un ejemplar a Voevodsky y ambos se lanzan a trabajar en la teoría

[2]Copia para la distribución clandestina de textos no aprobados por el régimen soviético.

de *Dessins d'enfants,* el área que Grothendieck ideó en sus años de Montpellier para sus alumnos que carecían de la potente formación de París. Juntos publicarán un trabajo ([36]) y, cuando Shabat tiene noticia de la organización de *The Grothendieck Festschrift*,[3] ambos escriben otro artículo con una exposición rigurosa de la teoría de *Dessins d'enfants*. Para sortear la censura, envían el manuscrito a través de un matemático francés «de turismo» en Moscú. El artículo finalmente se publicará en las actas del congreso [37]. Voevodsky aún escribirá otros tres artículos en solitario sobre cuestiones aledañas ([40], [41], [42]).

Todavía durante sus años universitarios Voevodsky conocerá a Mikhail Kapranov, en aquel momento estudiante de doctorado en Moscú. Juntos trabajan en otro tema propuesto en *Esquisse d'un programme*: la relación entre los tipos de homotopía y los ∞-grupoides ([56], [23], [24], [25]). Este programa de trabajo tiene sus orígenes en la carta *À la pursuite de champs* que Grothendieck escribió a Daniel Quillen y busca describir el tipo de homotopía de un espacio de una forma más natural y sencilla que con las categorías modelo de Quillen.

Voevodsky, en una de sus frecuentes sesiones de estudio en bibliotecas nocturnas.

Por aquel tiempo, en 1982, un recién doctorado Alexander Beilinson acababa de enunciar unas influyentes conjeturas sobre la teoría de motivos en el seminario organizado por Yuri Manin en Moscú, que más tarde se detallarían en [7]. En ellas, Beilinson proponía un camino factible para un potente desarrollo de la teoría de motivos, a la sazón estancada durante décadas ante las conjeturas estándar de Grothendieck. Más en concreto, Beilinson postula que debe existir una categoría derivada de motivos con propiedades similares a las categorías derivadas más clásicas. Su construcción no debería necesitar de las conjeturas estándar y, sin embargo, sus propiedades deberían poder dar cuenta de una pléyade de resultados geométricos y aritméticos del anillo de Chow, la teoría K y la cohomología *étale*. Voevodsky aprende estas conjeturas de primera mano durante sus años de estudiante. Al hacerlo, se convence de que la clave para realizar el programa de Beilinson son precisamente las ideas de Grothendieck que ha desarrollado con Kapranov y comienza a trabajar sobre ellas.

Cuando Voevodsky es expulsado en 1989 de la Universidad de Moscú, la Unión Soviética está inmersa en la *perestroika* y es posible el intercambio de estudiantes. Beilinson, que acaba de incorporarse a la Universidad de Chicago y es ya una figura internacional, y Kapranov, que también estaba trabajando entonces en los EE. UU.,

[3]Conferencia en honor del 60 cumpleaños Grothendieck, con contribuciones de Deligne, Faltings, Tate. . .

mueven hilos en Harvard para que Voevodsky realice allí el doctorado. Es así como un joven ruso sin ningún título universitario y sin haberlo siquiera solicitado recibe una invitación y comienza sus estudios de doctorado en Harvard, bajo la dirección de David Kazhdan.

Ya en los Estados Unidos, una vez más Voevodsky tiene dificultades para seguir el camino establecido: casi suspende el examen de acceso y no asiste a los cursos ni a los seminarios de doctorado. Como en Moscú, problemas personales agravan su situación y acaba sus primeras Navidades ebrio, atracado y apaleado por sus asaltantes. Deprimido, volverá a Rusia por un tiempo. Al retomar su doctorado y volver a Boston vive, literalmente, en su oficina. Por las mañanas, recién despertado, provoca estupor en otros estudiantes ver a un desaliñado matemático dirigirse a los baños para asearse. Cuando en 1992 llega el momento de defender su tesis doctoral vuelve a poner a prueba los límites de la burocracia y las formalidades. Voevodsky presenta un manuscrito que, dejando de lado su valioso contenido matemático, está inacabado y tiene numerosos fallos de edición y referencia (véanse las figuras 1 y 2).

5.Categories $DM(S)$ 40

Proof: It follows from the proposition ??, theorem ?? and a homotopy invariance of etale cohomologies with locally constant coefficients (see [?, p.240]).

Proposition 4.8 *Let S be a scheme of characteristic $p > 0$, then category $DM(S)$ is $\mathbf{Z}[1/p]$-linear.*

Figura 1: Muestra de una de las páginas de la memoria de tesis de Voevodsky.

Theorem 5.10 *Category $DM_{ft}(k)$ is generated as tensor triangle category by the motives of smooth projective varieties.*

Proof: It is a direct corollary of the proposition 5.9 and resolution of singularities.

Proposition 5.11 *Let X be an object of $DM_{ft}(k)$, then for any $n > 0$ an object $X \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ is isomorphic in $DM_{ft}(k)$ to an object which corresponds to a finite complex of locally free (in etale topology) sheaves of finite groups over k.*

Proof:

——————to be continued——————

Figura 2: Final de la memoria de tesis de Voevodsky.

Sin embargo, al igual que en Moscú, Voevodsky desarrolla durante el doctorado una actividad destacada que preludia el seísmo que va a conmocionar la teoría de motivos en los próximos años. Nada más doctorarse se le concede una prestigiosa beca para continuar trabajando otros tres años más en Harvard. En una carta fechada en 1992 afirma que ya puede construir el marco motívico conjeturado por Beilinson y sobre el que versa su tesis. Aparecerá publicado, esta vez sí ya completo, en 1996 en [43]. En [30] aparecerá otra construcción más acabada y perfeccionada que, salvo refinamientos técnicos, sigue hoy vigente. A partir de entonces Voevodsky dedicará sus esfuerzos a desarrollar este nuevo marco motívico.

En los siguientes años Voevodsky dará numerosas contribuciones a la teoría de motivos que le permitirán realizar numerosos cálculos explícitos. De entre todas ellas sobresale, con gran diferencia, el desarrollo de la homotopía en geometría algebraica, que tiene su inicio en [33]. Es bien conocida la fructífera potencia que la teoría de homotopía posee en topología y geometría diferencial. Sin embargo, nadie había anticipado que existía un marco de ideas análogo o, mejor dicho, esencialmente común al topológico, para el desarrollo de la homotopía en geometría algebraica. En unos pocos años Voevodsky regala a los geómetras algebraicos una categoría homotópica. A ella acompañan todos los objetos conocidos en topología: la teoría del cobordismo, los espacios de Thom, de Eilenberg-MacLane, espectros, torres de Postnikov, etc., así como teoremas de entorno tubular, de Freudenthal, de Whitehead, o la dualidad de Spanier-Whitehead. Recomendamos la contribución de Voevodsky al ICM de 1998 en la que anuncia este gran desarrollo que se publicará en años sucesivos ([44]). Todo ello le vale una invitación de larga duración del IAS de Princeton y, a partir de 2002, una plaza de profesor permanente.

Los trabajos de Voevodsky en motivos y la homotopía de variedades algebraicas culminaron con la prueba de la conjetura de Milnor, propuesta en 1970 en [32]. Esta conjetura, que trataremos más adelante, es un importante resultado aritmético ligado a la clasificación de formas cuadráticas con coeficientes en un cuerpo. El nuevo marco motívico, la teoría de homotopía en geometría algebraica y la prueba de la conjetura de Milnor, son los méritos que en 2002 le hicieron merecedor de la Medalla Fields. Cabe destacar que en aquel ICM solo se concedió otra Medalla Fields, hecho inédito desde 1962 y que no ha vuelto a repetirse.

Sin embargo, durante este tiempo Voevodsky vive una experiencia matemática perturbadora: mientras imparte un seminario en Princeton sobre la prueba de la conjetura de Milnor (cuyas notas fueron escritas por Pierre Deligne, [15]), encuentra él mismo un error en uno de los lemas fundamentales de su teoría… que desde 1993 era conocido por la comunidad motívica. También en esos años, Carlos Simpson publica en arXiv [38], un artículo en el que afirma que el resultado principal sobre ∞-grupoides y tipos de homotopía que publicó junto a Kapranov es falso. Voevodsky logra resolver el error del lema de motivos y cree que es Simpson quien se ha equivocado, pues el artículo de Simpson no es capaz de señalar el error del de Kapranov-Voevodsky. Durante años, intimidados por su creciente prestigio y el de Kapranov, nadie menciona a Voevodsky la controversia con el resultado de Simpson. Finalmente, en 2013, el propio Voevodsky encuentra que el artículo de Simpson es correcto y el suyo es el erróneo (para una explicación completa, véase [21]).

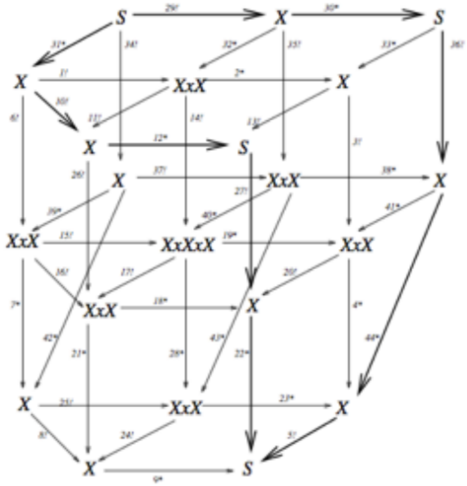
satisfy the adjunction axiom.
Proof: We have to verify that the compositions

$$\Omega_{(X,x)} \to \Omega_{(X,x)}\Sigma_{(X,x)}\Omega_{(X,x)} \to \Omega_{(X,x)}$$

and

$$\Sigma_{(X,x)} \to \Sigma_{(X,x)}\Omega_{(X,x)}\Sigma_{(X,x)} \to \Sigma_{(X,x)}$$

coincide with the corresponding identity 2-morphisms. One can easily see that these two compositions are dual in the sense of 1.2.3 and therefore it is sufficient to show that the first one equals identity. The main marked diagram for the proof looks as follows:



For the convenience of further reference we numbered all the arrows. The right vertical face of the diagram is the diagram (2) defining the 2-morphism $Id \to \Omega\Sigma$ and the upper horizontal face is the diagram (1) defining the 2-morphism $\Sigma\Omega \to Id$. The whole diagram is the union of the front part which

11

Figura 3: Ejemplo de diagrama conmutativo cúbico con los que Voevodsky comenzaba a trabajar antes de dejar el campo de los motivos.

Voevodsky se convence de que el problema de garantizar la veracidad y corrección de los resultados de investigación es grave y escribirá sobre el asunto que « *Un razonamiento técnico de un autor de confianza, que sea difícil de verificar y que se parezca a razonamientos que se sabe que son correctos, casi nunca se comprueba en detalle*». La creciente complejidad y especialización de la investigación matemática no hace sino agravar la situación. Por ejemplo, en la figura 3 puede observarse una demostración de teoría de categorías superiores de la cual Voevodsky dudaba que se comprobase con rigor. Esa es la razón por la cual —unida a una probable sensación de saturación hacia los temas motívicos— Voevodsky comienza a estudiar y trabajar, ya en 2004, sobre cómo poder codificar las demostraciones para que su veracidad sea comprobada por ordenador. De esta forma, paso a paso sus intereses se apartan progresivamente del mundo motívico. Aun así, Voevodsky todavía dedicará un gran esfuerzo y varios años de su vida a completar la prueba de la conjetura de Bloch-Kato (la generalización natural de la conjetura de Milnor). En 2003 publica un esquema de la prueba que se basa en un aserto que se revelará falso. En el año 2006–07 el IAS de Princeton invita a Charles Weibel, a la sazón amigo personal de Voevodsky, a dirigir un seminario sobre el estado de la cuestión de Bloch-Kato. Weibel pasará largas horas hablando con Voevodsky y propondrá un camino alternativo para arreglar la estrategia de la prueba hasta que, en palabras de Weibel, logrará que Voevodsky «vuelva a comprometerse» con la empresa y trabaje en la prueba de la conjetura. En 2010, y tras seis años en los que solo publicó un artículo cuyo borrador databa de 1996, Voevodsky publica una serie de artículos que culminan con la prueba de la conjetura de Bloch-Kato en [53] y que marcan el punto y final de su investigación en geometría algebraica ([47], [48], [49], [50], [51], [52]).

Una vez abandonado el mundo de los motivos, Voevodsky continúa sus pesquisas sobre las demostraciones por ordenador asistiendo a diversos cursos de carrera en Princeton. Voevodsky describe de forma negativa la reacciones que encontró cada vez que comenta en su entorno la cuestión de las demostraciones por ordenador, hasta el punto de considerarlo un «tema prohibido» entre matemáticos. Mientras estudia los trabajos en el área, ya en 2006 decide que es la llamada *teoría de tipos* del lógico Per Martin-Löf el marco teórico necesario para su proyecto. Sin embargo, afirma que el mayor obstáculo para una eficaz codificación de las demostraciones es que la fundamentación de las matemáticas basada en los axiomas de Zermelo-Fraenkel —e incluso una eventual alternativa basada en la teoría de categorías— no es adecuada para este propósito.

En 2010 anuncia, en una conferencia en Carnegie Mellon, uno de los centros de investigación de informática más prestigiosos del mundo, el llamado *axioma de univalencia* para la teoría de tipos, y afirma que provee del marco apropiado para la codificación de demostraciones matemáticas. Ese mismo año escribe una librería llamada *Foundations* en el programa asistente de pruebas *Coq* en la que codifica diversas demostraciones. Eventualmente afirma que con él es capaz de dar una fundamentación de las matemáticas alternativa a la de Zermelo-Fraenkel.

A pesar de que la reacción de la comunidad informática y lógica al proyecto de Voevodsky es buena, el propio Voevodsky declara que la tarea que tienen delante requerirá la colaboración de matemáticos experimentados. No en vano el programa se ha descrito como inspirado en su bagaje matemático anterior hasta el punto de ser llamado *teoría de tipos de homotopía*. No es difícil intuir la dificultad que puede entrañar para un informático escribir artículos como [1], en los que *«comparan las principales estructuras algebraicas usadas para modelar teorías de tipos dependientes [entre las que se encuentra] la categoría de aplicaciones representables entre prehaces»*. Voevodsky trata de atraer a su proyecto a matemáticos experimentados y para ellos imparte charlas en diferentes centros de investigación y anuncia un año temático en el IAS de Princeton para el curso 2012–13 sobre fundamentación univalente y teoría de tipos. El resultado de ese año es la edición de un libro, apodado *the HoTT book* ([39]), escrito por los participantes del curso en el que se sientan las bases de la teoría de tipos de homotopía.

Durante sus últimos años de vida publicará numerosos artículos en teoría de tipos de homotopía y, junto con una activa comunidad, escribirá diversas librerías para *Coq*. Cuando la muerte le sorprende en 2017 dejará 8 artículos en diversas fases de escritura y un vivo campo de investigación que trabaja en la codificación de las matemáticas. En particular, la librería *UniMath* ([55]), expuesta en [54]; la librería *HoTT* ([12]), explicada en [4]; y la librería *HoTT-Agda* ([11]).

2. Motivos y cohomología motívica

En la *laudatio* de los trabajos de Voevodsky con motivo de su Medalla Fields de 2002 se mencionan tres logros: la definición y el desarrollo de la cohomología motívica, la teoría de $\mathbb{A}^1$-homotopía de variedades algebraicas, y la prueba de la conjetura de Milnor. Estos tres éxitos se enmarcan dentro de la teoría de motivos de Grothendieck, de la cual recordamos los principales hitos previos a los trabajos de Voevodsky. El lector interesado en una exposición más detallada de la teoría de motivos puede consultar [31].

En 1949 André Weil propone, para variedades algebraicas sobre cuerpos finitos, una serie de influyentes conjeturas, entre las que se encuentra el análogo de la hipótesis de Riemann, así como una hermosa estrategia para probarlas. Weil muestra que, si existe una teoría de cohomología con coeficientes racionales análoga a la cohomología singular de Poincaré, sus conjeturas se siguen de argumentos cohomológicos. Las conjeturas de Weil y el programa propuesto para su prueba sugieren una íntima relación entre la topología y el análisis por un lado, y la geometría algebraica y la teoría de números por el otro. Más tarde, Jean-Pierre Serre prueba que tal cohomología postulada por Weil no existe sobre los racionales. Será necesario extender el cuerpo de coeficientes. Las conjeturas de Weil fueron probadas gracias a los trabajos de Grothendieck, de su escuela, y de Deligne, que en gran parte se inspiran en el programa propuesto por Weil al definir y estudiar diferentes cohomologías, como la cohomología l-ádica, la cohomología cristalina o la teoría K.

A pesar de haberse logrado la prueba de las conjeturas de Weil, el estado de la cuestión no satisfacía a Grothendieck. Sin entrar en precisiones técnicas, una teoría cohomológica define un funtor contravariante que sale de la categoría de variedades algebraicas sobre un cuerpo y llega a la categoría K-**vect** de espacios vectoriales sobre un cuerpo K. Grothendieck llamó *categoría de motivos* a la categoría $\mathbf{Mot}_k$ por la que se factorizan este tipo de funtores. Concretamente, a finales de la década de los 60 Grothendieck construyó para el caso *puro*, i.e., para variedades lisas y propias, la categoría $\mathbf{Mot}_k$ y un funtor covariante $M\colon \mathbf{PVar}_k \to \mathbf{Mot}_k$ partiendo de la categoría de variedades lisas y propias sobre un cuerpo tal que cualquier funtor de tipo cohomológico $H\colon \mathbf{PVar}_k \to K\text{-}\mathbf{vect}$, factoriza de forma única como

$$\begin{tikzcd} \mathbf{PVar}_k \arrow[r, "H"] \arrow[d, "M"'] & K\text{-}\mathbf{vect} \\ \mathbf{Mot}_k \arrow[ur, "R_H"'] & \end{tikzcd} \tag{1}$$

Dada una variedad X, llamamos al objeto $M(X)$ el *motivo* de X, y al funtor R_H el funtor de *realización* de la H-cohomología. Las propiedades del funtor M, del objeto $M(X)$ y de la categoría $\mathbf{Mot}_k$ debían dar cuenta de la relación conjeturada por Weil entre la parte analítica o topológica de una variedad y su parte algebraica o aritmética. Por ejemplo, el motivo de X debe poder descomponerse en sus «piezas cohomológicas» básicas usando ciertos ciclos algebraicos,[4] cuya existencia vendría garantizada por las llamadas *conjeturas estándar*, aún abiertas. En otras palabras, gracias a ciertos ciclos algebraicos debemos poder encontrar motivos M_X^i y escribir $M(X) = \oplus_i M_X^i$ de tal forma que $R_H(M_X^i) = H^i(X)$ para cualquier cohomología H. La existencia de estos ciclos también garantizaría, de manera natural, las conjeturas de Weil. Lamentablemente, las conjeturas estándar se han revelado inaccesibles.

Dentro de un marco de conjeturas más amplio, Beilinson y Deligne proponen a lo largo de la década de los 80 un camino alternativo para la teoría de motivos ([5], [13], [14]). Se busca definir y estudiar los motivos en el caso *mixto*, i.e., para variedades no necesariamente propias y lisas. Además, los funtores de realización R_H deben poder ser expresados de forma análoga a la construcción de la cohomología de haces, donde es natural hacer uso de la categoría derivada complejos de haces. Beilinson y Deligne conjeturan que, a pesar de no tener una definición de la categoría de motivos mixtos, es factible y más accesible construir una categoría triangulada $\mathbf{DM}$ que juega el papel de su categoría derivada. Además, la construcción de $\mathbf{DM}$ lleva aparejada la definición de una nueva cohomología. Concretamente, para cada k-esquema S debe existir una categoría $\mathbf{DM}(S)$ junto con un funtor $\mathcal{M}\colon \mathbf{Sm}_S \to \mathbf{DM}(S)$ que factorice las cohomologías de forma análoga a (1). Las categorías $\mathbf{DM}(S)$ serán monoidales,[5] tendrán un objeto unidad $\mathbb{1}$ y operaciones de desplazamiento $[p]$ y de torsión (q), con $p, q \in \mathbb{Z}$. Dada una teoría cohomológica H, debe existir un motivo (de coeficientes) $\mathcal{H}$ en $\mathbf{DM}(S)$ que define la cohomología como

$$H^{p,q}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}(S)}(\mathcal{M}(X), \mathcal{H}(q)[p])$$

para todo X en $\mathbf{Sm}_S$. En particular, definimos su *cohomología motívica* como

$$H^p_{\mathrm{Mot}}(X, \mathbb{Z}(q)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}(S)}(\mathcal{M}(X), \mathbb{1}(q)[p]),$$

que estará detrás de cualquier teoría cohomológica. Voevodsky logra probar que buena parte de esta cohomología viene dada por el anillo de Chow. Concretamente,

$$H^p_{\mathrm{Mot}}(X, \mathbb{Z}(q)) = CH^q(X, 2q-p), \quad q \geq 0 \ \text{ y } \ 2q-p \geq 0,$$

donde $CH^*(X, *)$ denota los grupos de Chow (superiores) definidos por Spencer Bloch ([8]).[6] En particular se tiene que $H^{2n}_{\mathrm{Mot}}(X, \mathbb{Z}(n)) = CH^n(X)$.

[4]Un ciclo algebraico es una combinación lineal formal de subvariedades algebraicas.

[5]Existe un producto tensorial de objetos con propiedades análogas al producto tensorial de módulos.

[6]Estos grupos son la extensión bigraduada de los grupos de Chow usuales de las variedades algebraicas. Los grupos de Chow constituyen una teoría de cohomología definida de modo puramente algebraico y están estrechamente emparentados con el grupo de Grothendieck K_0. Tras la definición por Quillen de los grupos K_i superiores, la teoría de Bloch completaba la pintura.

La construcción de $\mathbf{DM}(S)$ y de la cohomología motívica es el primer gran logro de Voevodsky.[7] Este es el tema de su tesis doctoral de 1992, cuyo manuscrito tardará aún cuatro años en pulirse y publicarse en [43]. Voevodsky seguirá perfeccionando detalles técnicos de la construcción de **DM**, que serán publicados como las notas a un curso impartido en el IAS de Princeton durante el curso 1999–2000 ([30]). Conviene destacar que la idea de Beilinson y Deligne de construir **DM** sin pasar por la categoría de motivos mixtos es esencial. Hoy día se considera abierta la cuestión de la definición «correcta» de la categoría de motivos mixtos y, de hecho, Beilinson ha probado en [6] que, en característica cero, las conjeturas estándar son equivalentes a recuperar la categoría de motivos mixtos a partir de **DM**.[8]

La construcción de Voevodsky de **DM** contiene dos ideas revolucionarias para la teoría de motivos. La primera es que, a diferencia de la construcción de Grothendieck, Voevodsky introduce nuevas topologías en la categoría de esquemas y construye **DM** a partir de los haces en esas topologías. Concretamente, Voevodsky observó que las topologías habituales en geometría algebraica (la de Zariski y la *étale*) no son adecuadas para la teoría de motivos, y se preguntó por la topología natural en ese contexto. En su tesis doctoral definió la h-topología —en la que los recubrimientos están dados por morfismos que son universalmente epimorfismos topológicos— y construyó **DM** a partir de sus haces. Más tarde, en [30] usará la topología de Nisnevich, una variante de la topología *étale*.

La segunda de las ideas de Voevodsky para la construcción de **DM**, que se revelará extremadamente fructífera y que tomó por sorpresa a la comunidad motívica, es que es preciso reproducir las técnicas de homotopía sustituyendo el intervalo unidad por la recta $\mathbb{A}^1$. Apoyado en las técnicas de Quillen de categorías modelo, Voevodsky obtiene **DM** invirtiendo la clase de morfismos generada por los morfismos de esquemas $\mathbb{A}^1 \times X \to X$. Esta idea será explotada en plenitud en su siguiente logro.

3. Teoría de $\mathbb{A}^1$-homotopía

Como hemos visto, durante la década de los 60 Grothendieck y su escuela desarrollaron en geometría algebraica importantes técnicas y resultados inspirados en la topología algebraica. Sin embargo, y a pesar de los éxitos logrados y de los ambiciosos programas de Weil y de la teoría de motivos, la comunidad de geómetras algebraicos no había anticipado que la homotopía clásica de Poincaré y las técnicas de deformación podrían ser transportadas al dominio de la geometría algebraica y de la aritmética. Este logro, que tiene su punto de partida en el artículo fundacional

[7]Hanamura y Levine proponen durante la década de los 90 sendas construcciones alternativas de $\mathbf{DM}(S)$ ([18], [19], [20], [27]). Aunque ambas construcciones son equivalentes a la de Voevodsky, por razones de simplicidad y potencial la de Voevodsky es la utilizada hoy día y se considera un logro sustancialmente mayor.

[8]La única definición de los motivos mixtos que se conoce, propuesta por Nori, produce una categoría con buenas propiedades funtoriales ([28]). Sin embargo, a diferencia de la definición de los motivos puros de Grothendieck, la construcción de Nori requiere datos trascendentales, por lo que no se considera la definición «correcta». No obstante se sabe que, de ser probadas las conjeturas estándar, la categoría de motivos obtenida a partir de **DM** sería equivalente a la de Nori.

[33] escrito junto a F. Morel, es sin duda la contribución más fructífera de Voevodsky y su potencial está lejos de ser agotado.

En [33] Morel y Voevodsky construyen la categoría homotópica de esquemas $\mathbf{H}(k)$, que asumimos sobre un cuerpo por simplicidad. El proceso de construcción es conceptualmente sencillo: $\mathbf{H}(k)$ es el resultado de invertir en la categoría $\Delta^{\mathrm{op}}\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{Sm}_k)$ de haces Nisnevich de conjuntos simpliciales la clase de morfismos generados por los morfismos de esquemas $\mathbb{A}^1_k \times X \to X$ y las equivalencias homotópicas de conjuntos simpliciales. Como cabría esperar, vía la inmersión de Yoneda tenemos un funtor $\mathbf{Sm}_k \to \Delta^{\mathrm{op}}\mathrm{Sh}_{\mathrm{Nis}}(\mathbf{Sm}_k)$, por lo que todo k-esquema liso puede verse dentro de la categoría homotópica.

Una vez Voevodsky ha especificado el contexto de los haces en la topología Nisnevich, la construcción de $\mathbf{H}(k)$ es natural. Basta observar que, contrariamente a lo que ocurre en el caso clásico, en el contexto propuesto por Voevodsky el 1-símplice estándar no se identifica con el intervalo unidad o la recta afín, por lo que es preciso invertir las equivalencias dadas por uno y otro tipo de homotopías. El resultado es una categoría homotópica $\mathbf{H}(k)$… ¡en la que hay dos «circunferencias»! La primera, llamada simplicial, dada por el cociente $S^1 = \Delta^1/\delta\Delta^1$ del 1-símplice estándar por sus dos puntos; la segunda, llamada de Tate, dada por el grupo multiplicativo $\mathbb{G}_m = \mathbb{A}^1 - \{0\}$. La circunferencia simplicial se comportará como la circunferencia en la categoría homotópica clásica, la circunferencia de Tate dará cuenta de la operación de *twist*, que no tiene análogo en topología. Ambas están ligadas por el isomorfismo

$$\mathbb{P}^1_k \simeq \mathbb{G}_m \wedge S^1 \quad \text{en} \quad \mathbf{H}(k),$$

donde $\wedge$ es el producto *smash* de conjuntos simpliciales punteados, $\mathbb{G}_m$ se considera punteado por el 1 y $\mathbb{P}^1_k$ por el infinito.[9]

A pesar del sorprendente fenómeno de la existencia de dos tipos de circunferencias, la categoría $\mathbf{H}(k)$ se comporta de forma muy similar a su análoga clásica. Ello permite definir conceptos hasta entonces inexistentes en geometría algebraica: homotopía de las esferas, homotopía estable, espacios de Eilenberg-MacLane, espacios de Thom, torres de Postnikov, entornos tubulares, teoría del cobordismo… Parece que todo concepto topológico tiene un análogo algebraico bien definido que se comporta de forma similar. Por ejemplo, Morel y Voevodsky prueban que $\mathbb{P}^\infty$ es el espacio clasificante de los fibrados de línea y logran describir la teoría K algebraica de un k-esquema liso de forma análoga al caso diferenciable:

$$K_i(X) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}(k)}(S^i \wedge X, \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}), \quad i \in \mathbb{N},$$

donde Gr es la grassmaniana infinita. También logran describir la cohomología motívica como el análogo algebraico de la cohomología singular y definen ciertos espacios

[9] Obsérvese que la cohomología de un esquema punteado es su cohomología reducida, aquella en la que hacemos cociente por la cohomología de un punto. Por tanto, el isomorfismo mencionado implica que, en cualquier cohomología que pueda describirse gracias a las técnicas homotópicas de Voevodsky, se tendrá que la parte de la cohomología de $\mathbb{P}^1_k$ que no viene de la cohomología de un punto es igual a la cohomología (reducida) de $\mathbb{G}_m$ desplazada en 1.

$K(2n,n)$, $n \in \mathbb{Z}$, de Eilenberg-MacLane de tal forma que para todo k-esquema liso X se tiene que

$$H^{2n-i}_{\mathrm{Mot}}(X,\mathbb{Z}(n)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{H}(k)}(S^i \wedge X, K(2n,n)).$$

Recomendamos el artículo de Voevodsky [44] escrito a propósito de su charla plenaria en el ICM de 1998, en el que expone la teoría de $\mathbb{A}^1$-homotopía.

4. Las conjeturas de Milnor y de Bloch-Kato

Las versátiles construcciones de **DM** y de la cohomología motívica, así como el descubrimiento en geometría algebraica de la teoría de $\mathbb{A}^1$-homotopía, permiten a Voevodsky llevar a cabo un intenso trabajo describiendo propiedades de estas categorías y realizando cálculos explícitos de la cohomología motívica. El hito destacado en su *laudatio* es la prueba de la conjetura de Milnor propuesta en [32]. Este logro fue precedido de numerosos resultados técnicos de gran importancia —más difíciles de comunicar a una audiencia matemática no especializada—, y fue continuado por otro logro igual de notable: la prueba de la conjetura de Bloch-Kato, culminada en [53].

Para enunciar estos resultados de Voevodsky, introduzcamos algo de notación. Dado F un cuerpo y n un entero positivo, llamamos *grupo K de Milnor* al grupo abeliano $K_n^M(F)$ definido por los siguientes generadores y relaciones. Los generadores son las sucesiones $\{a_1,\dots,a_n\}$, $a_i \in F^*$, y las relaciones son

$$\begin{gathered}\{a_1,\dots,a_{k-1},xy,a_{k+1},\dots,a_n\}\\ = \{a_1,\dots,a_{k-1},x,a_{k+1},\dots,a_n\} + \{a_1,\dots,a_{k-1},y,a_{k+1},\dots,a_n\}\end{gathered}$$

para todo $a_i, x, y \in F^*$, $1 \le k \le n$, y

$$\{a_1,\dots,a_{k-1},1-x,a_{k+1},\dots,a_n\} = 0$$

para todo $a_i \in F^*$ y $x \in F - \{1,0\}$.

Ahora, sea $\bar{F}$ la clausura algebraica de F y $G = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ el grupo de Galois absoluto de F con su topología profinita. La *cohomología de Galois* de F con coeficientes en $\mathbb{Z}/2$ se define como

$$H^n(F,\mathbb{Z}/2) = H^n_{\mathrm{continuo}}(G,\mathbb{Z}/2).$$

La teoría K de Milnor y la cohomología de Galois están relacionados vía el *símbolo de Galois*

$$h_n\colon K_n^M(F)/2K_n^M(F) \to H^n(F,\mathbb{Z}/2).$$

En efecto, para $n = 1$ se tiene que $K_1^M(F) = F^*$ y $H^1(F,\mathbb{Z}/2)) = \mathrm{Hom}(G,\mathbb{Z}/2)$, por lo que la aplicación h_1 se define asignando a un elemento $a \in F^*$ al carácter cuadrático χ_a, definido por

$$\chi_a(g) = g(\sqrt{a})/\sqrt{a} = \pm 1.$$

Se comprueba que la teoría K de Milnor está dotada de un producto cup y que, para todo generador $\{a_1, \ldots, a_n\}$ de $K_n^M(F)$, la asignación $\chi_{a_1} \cup \ldots \cup \chi_{a_n}$ define una aplicación h_n en $K_n^M(F)/2K_n^M(F)$ tal que $\oplus h_i \colon K^M(F)/2K^M(F) \to H(F, \mathbb{Z}/2)$ es compatible con este producto. Voevodsky probó en [46] el siguiente resultado que Milnor conjeturó en [32]:

Teorema. *Dado F un cuerpo de característica distinta de 2 y $n \geq 1$, el símbolo de Galois*

$$h_n \colon K_n^M(F)/2K_n^M(F) \to H^n(F, \mathbb{Z}/2)$$

es un isomorfismo.

En particular, el teorema implica que el álgebra $\bigoplus_{i\geq 0} H^i(F, \mathbb{Z}/2)$ está generada por elementos de grado uno, una propiedad poco frecuente en cohomología de grupos y que impone una llamativa restricción a $G = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$.

Existen otras razones de peso para interesarse por esta conjetura. El caso $n = 1$ puede probarse gracias al teorema 90 de Hilbert y los otros dos casos conocidos antes de la prueba de Voevodsky ($n = 2, 3$) requerían análogos superiores al teorema 90 de Hilbert. Se sospechaba, como así fue, que la prueba general requeriría todos los análogos superiores al teorema 90 de Hilbert. Además, Milnor llegó a esta conjetura por su relación con la clasificación de formas cuadráticas con coeficientes en un cuerpo F. Veamos esta cuestión con más detalle.

El llamado teorema de cancelación de Witt afirma que, si $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ son tres formas cuadráticas no degeneradas con coeficientes en F tales que las sumas ortogonales $\varphi_1 + \varphi_3$ y $\varphi_2 + \varphi_3$ son isométricas, entonces φ_1 y φ_2 son isométricas. Por tanto, clasificar formas cuadráticas se reduce a describir el grupo de Grothendieck asociado de las formas cuadráticas no degeneradas con coeficientes en F, que define un anillo $GW(F)$ llamado *anillo de Grothendieck-Witt*.

Dada φ una forma cuadrática no degenerada, se puede probar que existe una única forma cuadrática anisótropa φ_{an} y un entero i tal que $\varphi \simeq i\mathbb{H} + \varphi_{\mathrm{an}}$, donde $\mathbb{H}$ denota la forma cuadrática hiperbólica que diagonaliza como $\langle 1, -1\rangle$. El entero i se llama índice de Witt y es sencillo de calcular. Por tanto, las formas cuadráticas sobre F están esencialmente clasificadas por el cociente $W(F) = GW(F)/\langle\mathbb{H}\rangle$, llamado *anillo de Witt*.

El anillo de Witt admite una aplicación de aumentación $W(F) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, inducida por la aplicación rango $GW(F) \to \mathbb{Z}$, y cuyo núcleo define un ideal $I \subset W(F)$ llamado *fundamental*. El ideal fundamental y sus potencias están generados por unas formas cuadráticas, llamadas de *Pfister*, que poseen buenas propiedades. Por tanto, es natural desear describir el graduado del anillo de Witt por el ideal fundamental $\mathrm{gr}(W(F))$ que, esencialmente, clasifica las formas cuadráticas con coeficientes en F. En [32] Milnor investigó los cocientes sucesivos I^n/I^{n+1} y encontró que, gracias a las propiedades de las formas de Pfister, existe un morfismo de anillos natural

$$K_*^M(F) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{gr}_*(W(F)).$$

En ese mismo artículo, Milnor propuso una conjetura previa a la anterior cuya prueba, desarrollada por Orlov, Vishik y Voevodsky en [34], se basa en las técnicas desarrolladas para el anterior resultado:

TEOREMA. *Sea F un cuerpo de característica distinta de 2. El homomorfismo natural de anillos graduados*

$$K_*^M(F) \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{gr}_*(W(F))$$

es un isomorfismo.

Una generalización de la conjetura de Milnor, conocida como conjetura de Bloch-Kato ([10]), fue probada por Voevodsky en [53]:

TEOREMA. *Dado F un cuerpo de característica distinta de l, para todo $n \geq 0$ el homomorfismo de norma residual*

$$K_n^M(k)/l \to H_{\mathrm{et}}^n(F, \mu_l^{\otimes n})$$

es un isomorfismo.

Aparte de ser una generalización natural de la conjetura de Milnor, la comunidad motívica ha estado particularmente interesada en este resultado desde que se sabe que implica la llamada conjetura de Beilinson-Lichtenbaum, propuesta independientemente en [5] y [29]. Esta conjetura, que no explicitaremos en detalle, describe el motivo $\mathcal{M}(X) \otimes \mathbb{Z}/l$ en $\mathbf{DM}(k)$, donde X es un k-esquema, en términos del haz *étale* $\mu_l^{\otimes r}$. Es decir, describe la parte de l-torsión de $\mathcal{M}(X)$ (de naturaleza algebraica o aritmética) en términos de un objeto más sencillo (de naturaleza más cercana a la topológica o analítica). Como curiosidad, Bloch dedujo de estas conjeturas que, para una variedad algebraica compleja X y $\alpha \in H^n(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ una clase de torsión en su cohomología singular, existe un abierto de Zariski no vacío $U \subset X$ tal que la restricción de α a U se anula.

La prueba de todos estos resultados enlaza con los trabajos previos de Voevodsky puesto que los grupos $K_n^M(F)$ de Milnor coinciden con ciertos grupos de Chow superiores y, por tanto, con la cohomología motívica. Concretamente se tiene que

$$H_{\mathrm{Mot}}^n(\operatorname{Spec} F, \mathbb{Z}(n)) = K_n^M(F), \quad n > 0.$$

Para probar todos estos resultados, Voevodsky dota a la cohomología motívica de multitud de propiedades análogas a las de la cohomología *étale* o singular: sucesión de Mayer-Vietoris, fórmula del fibrado proyectivo, morfismo de Gysin, teoría de la dualidad, sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch... Más concretamente, Voevodsky comienza a probar una versión motívica del formalismo de las seis operaciones de Grothendieck (que, tras su retirada del mundo motívico, culminaría Ayoub en [2] y [3]), del cual se siguen la mayoría de las propiedades esperadas en una cohomología. Armado con buena parte del formalismo de las seis operaciones, Voevodsky realiza un estudio pormenorizado de los espacios de Eilenberg-MacLane motívicos y calcula las operaciones de Steenrod de la cohomología motívica ([45], [48]). La prueba de muchos de estos resultados sigue la misma línea que sus análogos en topología algebraica clásica. Sin embargo, el contexto algebraico y la mayor sofisticación de las categorías empleadas añaden una dificultad técnica que Voevodsky solventa.

Los puntos más notables de la demostración de Voevodsky de las conjeturas mencionadas suelen ser aquellos en los que prueba que una definición inspirada en la topología algebraica o una clase de cohomología motívica se corresponden con objetos algebraicos concretos con propiedades bien determinadas. Por ejemplo, como vimos en la sección 2, el símbolo de Galois o el homomorfismo de norma residual tienen una definición de tipo topológico similar a la definición en homotopía clásica del morfismo natural de la cohomología singular sobre cualquier cohomología con clases de Chern aditivas (por ejemplo, la cohomología de De Rham). En el contexto motívico, Voevodsky debe probar que ambas definiciones coinciden: la topológica y la explícita dada como símbolo de Galois o norma residual. En última instancia, y tras multitud de reducciones de tipo cohomológico, la prueba de ambas conjeturas requiere que Voevodsky construya formas cuadráticas con coeficientes en F y propiedades fijadas. Además, debe calcular la cohomología motívica y la teoría K de la hipersuperficie que definen estas formas cuadráticas, concretamente debe calcular sus clases de Chern. El lector interesado puede leer detalles sobre la prueba de la conjetura de Milnor en [22] y en [35] sobre la prueba de la conjetura de Bloch-Kato.

5. Fundamentos univalentes

Es bien sabido que en ocasiones se publican resultados con un razonamiento insuficiente, e incluso incorrectos. El nivel de profundidad que alcanzan las matemáticas de hoy en día hace temer que una falla en algún punto haga derrumbar grandes teorías como castillos de naipes. Ya hemos comentado que el propio Voevodsky había sufrido el problema en carne propia en dos ocasiones. Aparte de los ya mencionados, es particularmente conocido en el mundo de los motivos el caso de Bloch y los anillos de Chow superiores. Como se mencionó en la sección 2, la teoría de Bloch es prácticamente sinónima de la cohomología motívica, puesto que ambos grupos coinciden en multitud de ocasiones. Pues bien, el artículo original [8] contenía un lema de desplazamiento cuya prueba ocupaba unas pocas líneas y que desgraciadamente era incompleta. Después de 10 años Bloch publica una demostración completa del lema que ocupa un artículo de más de 30 páginas [9].

La propuesta de Voevodsky para evitar estas situaciones es desarrollar un sistema que permita la verificación asistida por ordenador de las demostraciones matemáticas. Esto exige una extensa biblioteca de matemáticas formalizadas, pero, sobre todo, un método de formalización eficiente y que se relacione de forma apropiada con el uso habitual de las matemáticas. La principal aportación de Voevodsky en este aspecto es el *axioma de univalencia* en la teoría de tipos del lógico Per Martin-Löf que, según los expertos, ha permitido un desarrollo sin precedentes, que hace factible la codificación de toda la matemática moderna en una librería informática. Concretamente, los trabajos de Voevodsky han dado lugar a la *fundamentación univalente* y a la *teoría de tipos de homotopía* (comúnmente abreviada $HoTT$, por sus siglas en inglés). Veamos con más detalle algunas de las ideas involucradas en este trabajo.

Los *tipos* en la teoría de Martín-Löf no tienen definición, de la misma forma que los conjuntos no tienen definición en la axiomática de Zermelo-Fraenkel, sino que es a partir de ellos como se define el resto de objetos matemáticos. De hecho, en la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel hay dos clases de objetos matemáticos básicos: los conjuntos y las proposiciones. Esto se debe a que la axiomática de Zermelo-Fraenkel presupone la lógica de primer orden, que es independiente de esta axiomática. Aunque los conjuntos no tengan definición, este nombre nos aporta una intuición que nos permite distinguir fácilmente qué tipo de operadores lógicos podemos usar y cómo hacerlo, aunque nunca hayamos leído o estudiado lógica de primer orden o la lista de los axiomas de Zermelo-Fraenkel. Por ejemplo, si a y X son conjuntos, sabemos que la fórmula $a \in X$ tiene sentido y está bien escrita, ya sea cierta o falsa, y si P es una proposición entonces $\neg P$ también es un enunciado bien escrito. Por el contrario, tanto $a \in P$ como $\neg X$ sabemos que son fórmulas mal escritas y no tienen sentido. De la misma forma, la palabra *tipo* hace referencia a una intuición que debe facilitarnos saber cómo usar el lenguaje y la axiomática de la teoría de tipos.

Entonces, ¿cuál es la intuición detrás de los *tipos*? Esta viene de la informática, en la cual hay lenguajes en los que, al definir una variable, se debe especificar su *tipo*. Por ejemplo, un informático está acostumbrado a especificar si su variable es *bool*, *string*, *int* o *real* y, al hacerlo, define que esa variable tomará valores 0-1, una sucesión de caracteres, un entero de 32 bits o un número de coma flotante de 64 bits, respectivamente. Informalmente, los matemáticos llevamos usando los tipos toda nuestra vida; cuando decimos «*sea G un grupo*» o «*sea α un número real*» estamos usando un lenguaje propio de tipos. En realidad, la expresión precisa en el marco de Zermelo-Fraenkel sería el incómodo circunloquio «*sea G un conjunto, si G es un grupo...*».

El lenguaje de Zermelo-Fraenkel también lleva aparejados problemas sin ningún interés real que los matemáticos solventamos de forma intuitiva. Por ejemplo, la fórmula $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \colon x > 0\}$ es falsa en Zermelo-Fraenkel puesto que, con la definición habitual de $\mathbb{Z}$ como cociente de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, los números naturales no son un subconjunto de $\mathbb{Z}$. En rigor, deberíamos escribir $\mathbb{N} \simeq \{x \in \mathbb{Z} \colon x > 0\}$. De manera análoga, si denotamos $2_{\mathbb{Z}}$ y $2_{\mathbb{Q}}$ al número dos como elemento de los enteros y de los racionales, la afirmación $2_{\mathbb{Z}} \simeq 2_{\mathbb{Q}}$ es cierta, irrelevante pero, en principio, posiblemente necesaria si formalizamos un cálculo con la axiomática de Zermelo-Fraenkel. De hecho, es precisamente la noción de «igualdad» o «equivalencia» la que motiva el salto de Voevodsky de Zermelo-Fraenkel a la teoría de tipos.

En la teoría de Martin-Löf, además de tipos hay *elementos*, que deben ser de algún tipo. La fórmula $x \colon X$ se lee «*x es de tipo X*», y podemos pensar de ella tanto que «*x pertenece a X*», si el tipo X tiene las propiedades que esperamos de un conjunto, como que «*x es una prueba de X*», si el tipo X tiene las propiedades de una proposición. Voevodsky también entendía lo siguiente: «*x es un punto de X*», si el tipo X tiene las propiedades de un espacio, y «*x tiene el tipo de homotopía de X*», ya que fue capaz de identificar dentro de la teoría de Martin-Löf tipos con las propiedades de los espacios contractibles y con otras propiedades homotópicas. En la imagen de la figura 4 puede verse una tabla (no exhaustiva) de analogías que permite el lenguaje de teoría de tipos. Si bien algunas parecen naturales o intuitivas otras, especialmente la identidad, son sorprendentes.

Existen un lenguaje y unas reglas para construir tipos a partir de otros tipos más básicos. Con este lenguaje se puede dar una axiomatización del tipo $\mathbb{N}$, cuyos elementos se llaman números naturales, similar a la de Peano. A partir del tipo $\mathbb{N}$ se

Types	Logic	Sets	Homotopy
A	proposition	set	space
$a : A$	proof	element	point
$B(x)$	predicate	family of sets	fibration
$b(x) : B(x)$	conditional proof	family of elements	section
$\mathbf{0}, \mathbf{1}$	$\bot, \top$	$\emptyset, \{\emptyset\}$	$\emptyset, *$
$A + B$	$A \vee B$	disjoint union	coproduct
$A \times B$	$A \wedge B$	set of pairs	product space
$A \to B$	$A \Rightarrow B$	set of functions	function space
$\sum_{(x:A)} B(x)$	$\exists_{x:A} B(x)$	disjoint sum	total space
$\prod_{(x:A)} B(x)$	$\forall_{x:A} B(x)$	product	space of sections
Id_A	equality $=$	$\{ (x,x) \mid x \in A \}$	path space A^I

Figura 4: Tabla con analogías de varias operaciones en teoría de tipos (del *HoTT book*).

construyen los tipos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$,... También se puede definir el tipo $Y \to X$ de *funciones* entre dos tipos X e Y, o el tipo *fibra*, que escribimos $f^{-1}(y)$ para $y\colon Y$ y $f\colon X \to Y$. De entre esta multitud existe una clase de tipo, llamado de *identidad*, que recoge nuestra noción intuitiva de «igualdad entre dos elementos» y que —como cabría esperar— los expertos afirman es la noción de tipo más importante. Sea X un tipo y sean $a, b\colon X$; entonces existe el tipo $a = b$ de identidad entre a y b. Si existe un elemento $\alpha\colon a = b$, entonces a es igual o idéntico a b (y α es una prueba de su igualdad).

Existe también una noción de *equivalencia* en teoría de tipos que, según el consenso en la materia, recoge la noción clásica de isomorfismo. Sean X e Y dos tipos y $f\colon X \to Y$ una función; se dice que f es una *equivalencia* si para todo elemento $y\colon Y$ el tipo $f^{-1}(y)$ tiene exactamente un elemento. Voevodsky probó que las equivalencias son elementos de un tipo que denotó $X \simeq Y$. Los tipos también pueden ser elementos de otro tipo.[10] Dados dos tipos $A, B\colon U$ hay una función canónica $\Phi\colon (A = B) \to (A \simeq B)$. El axioma de univalencia de Voevodsky afirma que:

Axioma. *La función canónica* $\Phi\colon (A = B) \to (A \simeq B)$ *es una equivalencia.*

Este axioma, según Voevodsky, es el que permitirá a la teoría de tipos una codificación de la matemática moderna y, siempre según Voevodsky, su motivación encuentra su origen en las especulaciones de Grothendieck sobre los tipos de homotopía y los ∞-grupoides.[11] El propio Voevodsky probó que este axioma es consistente exhibiendo un modelo de teoría de tipos con univalencia mediante conjuntos simpliciales. Los últimos trabajos de Voevodsky trataban de encontrar la buena expresión

[10] Se dice que un tipo es *pequeño* si es elemento de un cierto tipo U_0 llamado *universo*. Existe en teoría de tipos un análogo a la teoría de universos de teoría de conjuntos.

[11] Incluso sin conocer los pormenores de la teoría de tipos se puede apreciar que el axioma de univalencia trata sobre el obstáculo señalado por Grothendieck en [17, Section 9]. El lector interesado puede comparar la objeción de Grothendieck con la motivación al axioma de univalencia escrita en [16, Section 5].

del concepto de categoría en el contexto de teoría homotópica de tipos. Estas ideas se han plasmado en el trabajo póstumo [26].

La teoría de tipos y la fundamentación univalente de Voevodsky tienen una componente de aridez a primera vista de un matemático como el que escribe, y quizás también para el lector (véase [16] para una introducción especialmente accesible). Cambiar el lenguaje y la sintaxis a los que estamos acostumbrados y la mezcla de conceptos tan diferentes en la noción de tipo puede provocar estupor y desconcierto, pero también asombro y esperanza. ¿Cuántas horas no se han perdido buscando y depurando errores en trabajos propios y ajenos? ¿Realmente nos encontramos ante el advenimiento de una etapa en la que estos sinsabores serán desterrados? ¿Nos espera un futuro en el que no dudaremos de la veracidad de un resultado publicado? De ser así, la fundamentación univalente de las matemáticas bien podría sobrepasar con creces todos los logros previos de Voevodsky.

Referencias

[1] B. Ahrens, P. L. Lumsdaine y V. Voevodsky, Categorical structures for type theory in univalent foundations, *Computer science logic 2017*, Art. No. 8, *LIPIcs. Leibniz Int. Proc. Inform.* **82**, Schloss Dagstuhl. Leibniz-Zent. Inform., Wadern, 2017.

[2] J. Ayoub, Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique. I, *Astérisque* **314** (2007).

[3] J. Ayoub, Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique. II, *Astérisque* **315** (2007).

[4] A. Bauer, J. Gross, P. L. Lumsdaine, M. Shulman, M. Sozeau y B. Spitters, The HoTT Library: A formalization of homotopy type theory in *Coq*, *Proceedings of the 6th ACM SIGPLAN Conference on Certified Programs and Proofs*, 164–172, 2017.

[5] A. Beilinson, Height pairing between algebraic cycles, *K-theory, arithmetic and geometry (Moscow, 1984-1986)*, 1–25, Lecture Notes in Math. **1289**, Springer, Berlin, 1987.

[6] A. Beilinson, Remarks on Grothendieck's standard conjectures, *Regulators*, 25–32, Contemp. Math., **571**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.

[7] A. Beilinson, R. MacPherson y V. Schechtman, Notes on motivic cohomology, *Duke Math. J.* **54** (1987), no. 2, 679–710.

[8] S. Bloch, Algebraic cycles and higher K-theory, *Adv. in Math.* **61** (1986), no. 3, 267–304.

[9] S. Bloch, The moving lemma for higher Chow groups, *J. Algebraic Geom.* **3** (1994), 537–568.

[10] S. Bloch y K. Kato, p-adic étale cohomology, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, No. 63 (1986), 107–152.

[11] G. Brunerie et al. Homotopy Type Theory in Agda, an Agda library of formalized proofs, *disponible en* `https://github.com/HoTT/HoTT-Agda`

[12] Coq Platform, The HoTT Library, a Coq library of formalized proofs, *disponible en* `https://github.com/HoTT/HoTT`

[13] P. Deligne, Carta a C. Soulé, 1985.

[14] P. Deligne, Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points, *Galois groups over* $\mathbb{Q}$ *(Berkeley, CA, 1987)*, 79–297, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.* **16**, Springer, New York-Berlin, 1989.

[15] P. Deligne, Voevodsky's Lectures on Motivic Cohomology 2000/2001, *Algebraic topology*, 355–409, *Abel Symp.* **4**, Springer, Berlin, 2009.

[16] D. Grayson, An introduction to univalent foundations for mathematicians, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **55** (2018), no. 4, 427–450.

[17] A. Grothendieck, Pursuing stacks, *manuscrito* (1983), por aparecer en *Doc. Math.*.

[18] M. Hanamura, Mixed motives and algebraic cycles I, *Math. Res. Lett.* **2** (1995), no. 6, 811–821.

[19] M. Hanamura, Mixed motives and algebraic cycles III, *Math. Res. Lett.* **6** (1999), no. 1, 61–82.

[20] M. Hanamura, Mixed motives and algebraic cycles II, *Invent. Math.* **158** (2004), no. 1, 105–179.

[21] S. Henry, What is the mistake in the proof of the Homotopy hypothesis by Kapranov and Voevodsky?, *MathOverflow*, `https://mathoverflow.net/q/234492` (versión: 2017-11-29).

[22] B. Kahn, La conjecture de Milnor (d'après V. Voevodsky), *Handbook of K-theory* **1,2**, 1105–1149, Springer, Berlin, 2005.

[23] M. Kapranov y V. Voevodsky, The free n-category generated by a cube, oriented matroids and higher Bruhat orders, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **25** (1991), 62–65. Versión en inglés: *Funct. Anal. Appl.* **25** (1991), no. 1, 50–52.

[24] M. Kapranov y V. Voevodsky, ∞-groupoids and homotopy types, *International Category Theory Meeting (Bangor, 1989 and Cambridge, 1990). Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catég.* **32** (1991), 29–46.

[25] M. Kapranov y V. Voevodsky, Combinatorial geometric aspects of polycategory theory: pasting schemes and higher Bruhat orders (list of results), *International Category Theory Meeting (Bangor, 1989 and Cambridge, 1990). Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catég.* **32** (1991), 11–27.

[26] K. Kapulkin y P. L. Lumsdaine, The simplicial model of univalent foundations (after Voevodsky), *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **23** (2021), no. 6, 2071–2126.

[27] M. Levine, *Mixed motives*, Mathematical Surveys and Monographs **57**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[28] M. Levine, Mixed motives, *Handbook of K-theory, vol. I*, 429–521, Springer, Berlin, 2005.

[29] S. Lichtenbaum, Values of zeta functions at non-negative integers, *Number theory (Noordwijkerhout, 1983)*, 127–138, Lecture Notes in Math. **1068**, Springer, Berlin, 1984.

[30] C. MAZZA, V. VOEVODSKY Y C. WEIBEL, *Lecture notes on motivic cohomology*, Clay Mathematics Monographs, **2**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

[31] J. S. MILNE, Motives—Grothendieck's dream, *Open problems and surveys of contemporary mathematics*, Int. Press, Somerville, MA, **6** (2013), 325–342.

[32] J. MILNOR, Algebraic K-theory and quadratic forms, *Invent. Math.* **9** (1970), 318–344.

[33] F. MOREL Y V. VOEVODSKY, $\mathbb{A}^1$-homotopy theory of schemes, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **90** (1999), 45–143 (2001).

[34] D. ORLOV, A. VISHIK Y V. VOEVODSKY, An exact sequence for $K_*^M/2$ with applications to quadratic forms, *Ann. of Math. (2)* **165** (2007), no. 1, 1–13.

[35] J. RIOU, La conjecture de Bloch-Kato (d'après M. Rost et V. Voevodsky), *Astérisque* **361** (2014), 421–463.

[36] G. SHABAT Y V. VOEVODSKY, Equilateral triangulations of Riemann surfaces, and curves over algebraic number fields, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **304** (1989), 265–268. Versión en inglés: *Soviet Math. Dokl.* **39** (1989), no. 1, 38–41.

[37] G. SHABAT Y V. VOEVODSKY, Drawing Curves over Number Fields, *The Grothendieck Festschrift, Vol. III*, 199–227, *Progr. Math.* **88**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[38] C. SIMPSON, Homotopy types of strict 3-groupoids, *disponible en* `https://arxiv.org/abs/math/9810059`

[39] THE UNIVALENT FOUNDATIONS PROGRAM, Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics, 2013, *disponible en* `https://homotopytypetheory.org/book/`

[40] V. VOEVODSKY, Étale topologies of schemes over fields of finite type over $\mathbb{Q}$, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **54** (1990), no. 6, 1155–1167. Versión en inglés: *Math. USSR-Izv.* **37** (1991), no. 3, 511–523.

[41] V. VOEVODSKY, Galois groups of function fields over fields of finite type over $\mathbb{Q}$, *Uspekhi Mat. Nauk* **46** (1991), no. 5(281), 163–164. Versión en inglés: *Russian Math. Surveys* **46** (1991), no. 5, 202–203.

[42] V. VOEVODSKY, Galois representations connected with hyperbolic curves, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **55** (1991), no. 6, 1331–1342. Versión en inglés: *Math. USSR-Izv.* **39** (1992), no. 3, 1281–1291.

[43] V. VOEVODSKY, Homology of schemes, *Selecta Math. (N.S.)* **2** (1996), no. 1, 111–153.

[44] V. VOEVODSKY, $\mathbb{A}^1$-homotopy theory, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Berlin, 1998)*, *Doc. Math.* 1998, Extra Vol. I, 579–604.

[45] V. VOEVODSKYY, Reduced power operations in motivic cohomology, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **98** (2003), 1–57.

[46] V. VOEVODSKY, Motivic cohomology with $\mathbb{Z}/2$-coefficients, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **98** (2003), 59–104.

[47] V. Voevodsky, Cancellation theorem, *Doc. Math.* 2010 (Extra volume: A. Suslin sixtieth birthday), 671–685.

[48] V. Voevodsky, Motivic Eilenberg-Maclane spaces, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **112** (2010), 1–99.

[49] V. Voevodsky, Motives over simplicial schemes, *J. K-theory* **5** (2010), 1–38.

[50] V. Voevodsky, Simplicial radditive functors, *J. K-theory* **5** (2010), 201–244.

[51] V. Voevodsky, Unstable motivic homotopy categories in Nisnevich and *cdh*-topologies, *J. Pure Appl. Algebra* **214** (2010), 1399–1406.

[52] V. Voevodsky, Homotopy theory of simplicial sheaves in completely decomposable topologies, *J. Pure Appl. Algebra* **214** (2010), 1384–1398.

[53] V. Voevodsky, On motivic cohomology with $\mathbb{Z}/l$-coefficients, *Ann. of Math. (2)* **174** (2011), no. 1, 401–438.

[54] V. Voevodsky, An experimental library of formalized mathematics based on the univalent foundations, *Math. Structures Comput. Sci.* **25** (2015), no. 5, 1278–1294.

[55] V. Voevodsky, B. Ahrens, D. Grayson et al., *UniMath — a computer-checked library of univalent mathematics*, disponible en `http://UniMath.org`

[56] V. Voevodsky y M. Kapranov, ∞-groupoids as a model for a homotopy category, *Uspekhi Mat. Nauk* **45** (1990), no. 5(275), 183–184. Versión en inglés: *Russian Math. Surveys* **45** (1990), no. 5, 239–240.

Alberto Navarro Garmendia, Instituto de Ciencias Matemáticas, Madrid
Correo electrónico: `a.navarro.garmendia@icmat.es`
Página web: `https://www.icmat.es/alberto.navarro`