Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri Ramírez y Emilio Fernández Moral

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Madre de Dios 53, 26006, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 31 de octubre de 2022.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 433 ⋆. *Propuesto por Pedro A. Pizá, San Juan, Puerto Rico.*

Los números $P(r,c)$, con $1 \leq c \leq r$, están dados por la relación de recurrencia

$$P(r,c) = cP(r-1,c) + (r+1-c)P(r-1,c-1), \qquad r,c \geq 1,$$

con $P(1,1) = 1$ y las condiciones $P(r,0) = P(r,r+1) = 0$ para todo $r \geq 1$. Probar o refutar la siguiente proposición: Si p es primo, se verifica que $P(p,c) \equiv 1 \pmod{p}$ para todo c tal que $1 \leq c \leq p$.

Problema 434. *Propuesto por Dorin Marghidanu, Colegio Nacional "A. I. Cuza", Corabia, Rumanía.*

Sean a, b y c números reales positivos. Probar las desigualdades

$$9 \leq \frac{(2a+b)^2}{b(2a+c)} + \frac{(2b+c)^2}{c(2b+a)} + \frac{(2c+a)^2}{a(2c+b)} \leq 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right).$$

PROBLEMA 435. *Propuesto por Seán M. Stewart, Bomaderry, NSW, Australia.*

Si n es un entero no negativo, probar

$$\int_0^1 \operatorname{sen}^{2n}(\pi x) \log \Gamma(x)\, dx = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n+1}} \left(\log(2\pi) + H_n - H_{2n}\right),$$

donde Γ es la función Gamma de Euler y H_m denota el m-ésimo número armónico.

PROBLEMA 436. *Propuesto por Thanasis Gakopoulos, Grecia, y Juan José Isach Mayo, Valencia.*

Sean O, H y L, respectivamente, el circuncentro, el ortocentro y el punto simediano de un triángulo ABC de circunferencia circunscrita ω; y sean M y N, respectivamente, los puntos medios de los lados AB y AC. Además, sean $OH \cap AL = T$ y $AH \cap OL = S$. Supongamos que las rectas OH y AL son perpendiculares. Demostrar que, en este caso, se cumplen las cuatro afirmaciones siguientes:

a) $a^2(b^2 + c^2) = b^4 + c^4$, donde $a = |BC|$, $b = |CA|$ y $c = |AB|$.

b) La recta OL es perpendicular al lado BC.

c) Los puntos A, M, N, O, T y S son concíclicos.

d) Si denotamos por γ la circunferencia que pasa por los puntos del apartado anterior, probar que ω y γ son tangentes en el punto.

PROBLEMA 437. *Propuesto por Marian Ursărescu, "Roman-Vodă" National College, Roman, Rumanía.*

Se considera un triángulo cualquiera ABC. Sea A' el punto medio del arco BC de la circunferencia circunscrita que no contiene al punto A y sean B' y C' los puntos definidos análogamente por permutación cíclica de las letras. Probar que se cumple la desigualdad

$$\frac{AB \cdot BC \cdot CA}{A'B' \cdot B'C' \cdot C'A'} \le \sqrt{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\cos\left(\frac{C-A}{2}\right)}.$$

PROBLEMA 438. *Propuesto por Manuel Bello Hernández, Universidad de La Rioja, Logroño.*

Sea $\{a_n\}_{n\ge 1}$ una sucesión de números reales positivos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Probar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \infty.$$

Problema 439. *Propuesto por Ovidiu Furdui y Alina Sîntămărian, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Evaluar la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^2-1-\frac{1}{n}\right).$$

Problema 440. *Propuesto por Óscar Ciaurri, Universidad de La Rioja, Logroño.*

Para cada entero no negativo k, evaluar las integrales

$$C_k=\int_0^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 t-P_k(t)}{t^{2k+1}}\right)^2 dt \qquad \text{y} \qquad O_k=\int_0^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 t-P_k(t)}{t^{2k+2}}\right)^2 dt,$$

donde $P_0(t)=0$ y

$$P_k(t)=\sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j-1}2^{2j-1}}{(2j)!}\,t^{2j}.$$

Soluciones

Problema 409. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.*

Dados los radios a y b y la distancia entre los centros, c, de dos circunferencias intersecantes, encontrar el área del cuadrilátero formado por las rectas tangentes en los puntos de intersección de ambas.

Primera solución, enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Sean A y B, respectivamente, los centros de las circunferencias γ_a de radio a y γ_b de radio b. Tomemos un sistema rectangular de coordenadas cartesianas con origen en el punto medio del segmento AB en el cual las coordenadas de dichos centros sean $A=(-\frac{c}{2},0)$ y $B=(\frac{c}{2},0)$. Las ecuaciones de las circunferencias son

$$\gamma_a\colon \left(x+\frac{c}{2}\right)^2+y^2=a^2, \quad \gamma_b\colon \left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2=b^2.$$

Sea $C=\gamma_a\cap\gamma_b\cap\{y>0\}=(x_C,y_C)$. Se tiene

$$x_C=\frac{1}{2c}(a^2-b^2), \quad y_C=\frac{1}{2c}\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}.$$

La recta tangente a la circunferencia γ_a en el punto C es la recta polar de C respecto de γ_a, cuya ecuación es

$$\begin{pmatrix}1 & x_C & y_C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{c^2}{4}-a^2 & \frac{c}{2} & 0\\ \frac{c}{2} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}=0,$$

que corta a la recta AB: $y = 0$ en el punto P de abscisa $x_P = \frac{c(3a^2+b^2-c^2)}{2(a^2-b^2+c^2)}$.

Por un cálculo análogo, la recta tangente a γ_b en el punto C cortará a $y = 0$ en $Q = (x_Q, 0)$, donde

$$\begin{pmatrix} 1 & x_C & y_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{c^2}{4} - b^2 & -\frac{c}{2} & 0 \\ -\frac{c}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_Q \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

y resulta $x_Q = \frac{c(a^2+3b^2-c^2)}{2(a^2-b^2-c^2)}$. Por simetría, el área requerida es igual a

$$\begin{aligned} 2\,\text{Área}(\triangle QPC) &= (x_P - x_Q)y_C \\ &= \frac{4c^3 y_C^3}{(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)} \\ &= \frac{\big(2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) - (a^4+b^4+c^4)\big)^{3/2}}{2(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)} \\ &= \frac{\big((a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\big)^{3/2}}{2(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}. \end{aligned}$$

Segunda solución, composición de otras varias de las soluciones recibidas.

Con la notación para puntos que se muestra en la Figura 1, queremos encontrar el área del cuadrilátero $CPDQ$ o bien, por simetría, el doble del área del triángulo QCP. El punto H es la proyección ortogonal de C sobre la recta AB de centros. Se tiene $\angle BAC = \alpha = \angle PCH$ y $\angle ABC = \beta = \angle QCH$ (ángulos de lados perpendiculares), de manera que $\angle QCP = \alpha + \beta$. Teniendo en cuenta también que $\angle ACP = \angle BCQ = \pi/2$, denotando por s y Δ, respectivamente, el semiperímetro y el área del triángulo ABC, usando las fórmulas

$$\operatorname{tg}\Big(\frac{A}{2}\Big) = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \quad \operatorname{tg}\Big(\frac{B}{2}\Big) = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},$$

$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ y la de la tangente del ángulo doble, tenemos

$$\begin{aligned} 2\,\text{Área}(\triangle QCP) &= QC \cdot PC \cdot \operatorname{sen}(\alpha+\beta) \\ &= b \operatorname{tg}\beta \cdot a \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{sen}(\alpha+\beta) \\ &= 2\Delta \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \\ &= \frac{8\Delta^3}{\big(s(s-a)-(s-b)(s-c)\big)\big(s(s-b)-(s-a)(s-c)\big)} \\ &= \frac{32\Delta^3}{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}. \end{aligned}$$

También resuelto por M. Amengual, F. D. Aranda, R. Barroso, C. Beade, R. S. Eléxpuru, M. Gea, A. M. Oller, C. Sánchez-Rubio, A. Stadler y el proponente.

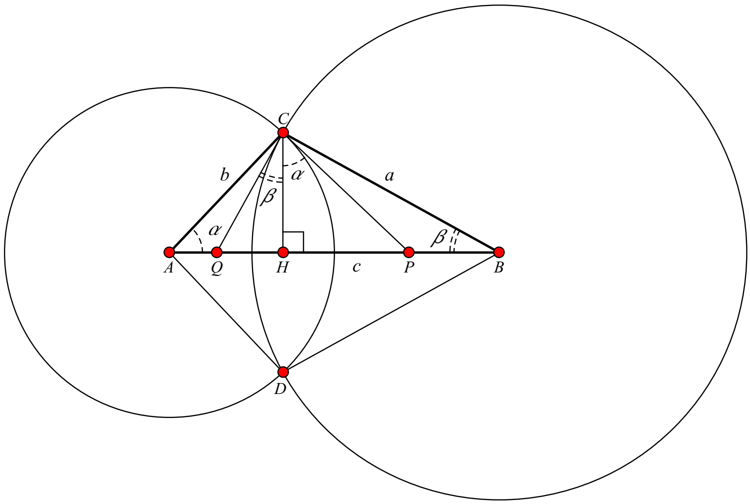

Figura 1: Esquema para la segunda solución del Problema 409.

Problema 410. *Propuesto por Pedro A. Pizá, San Juan, Puerto Rico.*

Para N y k enteros positivos, definimos $\left\{\sum^m [N]^k\right\}_{m\geq 0}$ mediante la relación

$$\sum\nolimits^m [N]^k = \sum_{n=1}^{N} \left(\sum\nolimits^{m-1} [n]^k\right), \qquad m \geq 1,$$

siendo $\sum^0 [N]^k = N^k$. Probar que

$$\sum\nolimits^m [N]^k = \sum_{\ell=1}^{k} \binom{N+k+m-\ell}{k+m} P(k,\ell),$$

donde los números $P(r,s)$, para $r,s \geq 1$, están dados por la relación de recurrencia

$$P(r,s) = sP(r-1,s) + (r+1-s)P(r-1,s-1), \qquad r,s > 1,$$

con $P(1,1) = 1$.

Solución enviada por Alberto Stadler, Herrliberg, Suiza.

Tomaremos, además, que $P(k,1) = P(k,k) = 1$ para todo $k \geq 1$. Entonces todos los números $P(r,s)$, para $r \geq s \geq 1$, están definidos por estas condiciones iniciales y la relación de recurrencia $P(r,s) = sP(r-1,s) + (r+1-s)P(r-1,s-1)$.

Para la demostración procedemos por inducción en m. Para $m = 0$ necesitamos probar que

$$\sum\nolimits^0 [N]^k = N^k = \sum_{\ell=1}^{k} \binom{N+k-\ell}{k} P(k,\ell). \tag{1}$$

Comenzaremos, entonces, probando (1) por inducción en k. Para $k = 1$ esta fórmula es cierta, ya que $P(1,1) = 1$. Supongámosla cierta para un $k \geq 1$ particular. Entonces,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell=1}^{k+1} \binom{N+k+1-\ell}{k+1} P(k+1,\ell) \\
&\qquad = \binom{N+k}{k+1} + \binom{N}{k+1} \\
&\qquad\qquad + \sum_{\ell=2}^{k} \binom{N+k+1-\ell}{k+1} \big(\ell P(k,\ell) + (k+2-\ell)P(k,\ell-1)\big) \\
&\qquad = \binom{N+k}{k+1} + \binom{N}{k+1} + \sum_{\ell=2}^{k} \binom{N+k+1-\ell}{k+1} \ell P(k,\ell) \\
&\qquad\qquad + \sum_{\ell=1}^{k-1} \binom{N+k-\ell}{k+1} (k+1-\ell) P(k,\ell) \\
&\qquad = \sum_{\ell=1}^{k} \binom{N+k+1-\ell}{k+1} \ell P(k,\ell) + \sum_{\ell=1}^{k} \binom{N+k-\ell}{k+1} (k+1-\ell) P(k,\ell) \\
&\qquad = \sum_{\ell=1}^{k} \left(\binom{N+k+1-\ell}{k+1} - \binom{N+k-\ell}{k+1} \right) \ell P(k,\ell) \\
&\qquad\qquad + \sum_{\ell=1}^{k} \binom{N+k-\ell}{k+1} (k+1) P(k,\ell) \\
&\qquad = \sum_{\ell=1}^{k} \binom{N+k-\ell}{k} \ell P(k,\ell) + \sum_{\ell=1}^{k} (N-\ell) \binom{N+k-\ell}{k} P(k,\ell) \\
&\qquad = N \sum_{\ell=1}^{k} \binom{N+k-\ell}{k} P(k,\ell) = N^{k+1},
\end{aligned}$$

aplicando la hipótesis de inducción.

Supongamos ahora que, para un $m \geq 0$, se cumple

$$\textstyle\sum^m [N]^k = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{k} \binom{N+k+m-\ell}{k+m} P(k,\ell), \tag{2}$$

y vamos a probar que

$$\textstyle\sum^{m+1} [N]^k = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{k} \binom{N+k+m+1-\ell}{k+m+1} P(k,\ell).$$

t \ c	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
(1)	1									
(2)	1	1								
(3)	1	4	1							
(4)	1	11	11	1						
(5)	1	26	66	26	1					
(6)	1	57	302	302	57	1				
(7)	1	120	1191	2416	1191	120	1			
(8)	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1		
(9)	1	502	14608	88234	156190	88234	14608	502	1	
(10)	1	1013	47840	455192	1310354	1310354	455192	47840	1013	1

TABLE B.

Figura 2: La tabla de los primeros números $P(t, c)$ en [5].

Bien; tenemos

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum^{m+1}[N]^k &= \sum_{n=1}^{N} \left(\textstyle\sum^{m}[n]^k\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{k} \binom{n+k+m-\ell}{k+m} P(k,\ell) \\
&= \sum_{\ell=1}^{k}\sum_{n=1}^{N} \binom{n+k+m-\ell}{k+m} P(k,\ell) \\
&= \sum_{\ell=1}^{k}\sum_{n=1}^{N} \left(\binom{n+k+m+1-\ell}{k+m+1} - \binom{n+k+m-\ell}{k+m+1}\right) P(k,\ell) \\
&= \sum_{\ell=1}^{k} \binom{N+k+m+1-\ell}{k+m+1} P(k,\ell)
\end{aligned}$$

y está hecho.

También resuelto por el proponente.

Nota. El ingeniero puertorriqueño Pedro Antonio Pizá Trías (1896–1956) proponía, el año 1948 [4, p. 25], este problema «a los matemáticos mexicanos e hispanoamericanos», en la revista *Ciencia* (ver [1]), anunciando que su propia demostración de la fórmula (2) «que, aunque completamente elemental, es bastante larga y requiere más espacio que el permisible en un corto artículo como el presente», aparecería

The Pizá family, Carmencita, Pedro and Carmen. This picture was taken on the occassion of a garden party during Carmencita's graduation at Bryn Mawr College in June 1941. Mrs. Pizá (Columbia 1917) has been for many years **Directora** of the "Colegio Puertorriqueño de Niñas" at Santurce, Puerto Rico.

Figura 3: Fotografía tomada de [5].

«junto con otros trabajos originales número-teóricos, en un nuevo libro titulado *Ensayos Aritméticos* que se publicará probablemente a fines de este año 1948, quizás como publicación oficial de la Universidad de Puerto Rico». Nosotros llegamos a esta propuesta de Pizá a través de, y gracias a, la página web [2] de la Residencia de Estudiantes y del CSIC,[1] y no nos pareció que fuese del todo inoportuno volver a proponer el problema aquí, aunque modificamos la notación original de Pizá, tal vez con poco acierto y de ahí la escasa respuesta que ha tenido entre los lectores.

El libro [5] de Pizá se publicó (en inglés), efectivamente, aquel año. Extraemos de sus primeras páginas una fotografía contemporánea del profesor Pedro A. Pizá y su familia (Figura 3) y, de la pág. 57, la tabla de los números $P(t,c)$ que hemos mostrado en la Figura 2: estos números, que en [4] se denotaban ${}_tP_c$, en [5] se denotan

[1] En su primer número, de febrero de 1940, la revista *Ciencia* señalaba, como su finalidad primordial, «difundir el conocimiento de las Ciencias físico-naturales y exactas y sus múltiples aplicaciones, por considerarlas como una de las principales bases de la cultura pública, para lo que procurará, por todos los medios a su alcance, aumentar el interés hacia su estudio en los países hispanoamericanos». La revista constituyó el canal formal de difusión científica entre los investigadores españoles exilados por causas de la Guerra Civil Española de 1936. La página [2] agrupa la edición facsímil, en formato pdf, de los 294 números de la revista que aparecieron, en México, entre los años 1940 y 1975.

como $[t|c]_{\mathsf{B}}$ y forman, así, la que el autor llama «Tabla B». En el libro (pp. 56–57), Pizá añadía esta información: «El profesor Oystein Ore, a quien el autor tuvo el grato placer de visitar en New Haven en diciembre de 1947, reconoció que estos coeficientes eran los mismos que aparecen en ciertos polinomios usados por Kummer en sus primeras investigaciones sobre el último teorema de Fermat y me sugirió que los denominase Números de Kummer.».

Por nuestra parte podemos añadir que la relación $P(r,s) = \left\langle {r \atop s-1} \right\rangle$ liga los números que definía Pizá con los llamados *números de Euler* (la notación para éstos es la de [3, pp. 268 y ss.]). La fórmula (1) de la solución publicada (que es también la fórmula (1) de Pizá en [4, pág. 24]) se conoce [3, (6.37)] como *identidad de Worpitzky* [6] para los números de Euler y, por consiguiente, data al menos de 1883.

Tal vez al llegar a conocer que sus números $P(r,s)$ ya eran conocidos en la literatura, Pizá desistió de publicar en [5] su anunciada demostración de la fórmula de sumación del problema.

Referencias

[1] C. Carapeto, A. Pulgarín y J. M. Cobos, Ciencia: Revista hispano-americana de Ciencias puras y aplicadas (1940–1975) [I], *Llull* **25** (2002), 329–368.

[2] Edad de Plata, `http://edaddeplata.org/edaddeplata/Publicaciones/publicaciones/integra.jsp?id=url3`. Al número de la revista *Ciencia* donde aparece el artículo [4] se accede directamente en `http://cedros.residencia.csic.es/imagenes/Portal/ciencia/1948_09_01-03-z2.pdf`

[3] R. Graham, D. Knuth y O. Patashnik, *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, segunda edición, Addison-Wesley, Reading, MA, USA, 1994.

[4] P. A. Pizá, Sumación de potencias numéricas, *Ciencia* **9** (1948), 23–26.

[5] P. A. Pizá, *Arithmetical essays: numerical adventures of a devotee of arithmetic, undertaken in solitude for his own spiritual recreation*, Imprenta Soltero, Santurce, Puerto Rico, 1948.

[6] J. Worpitzky, Studien über die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen, *Kronecker J.* **94** (1883), 203–232.

Problema 411. *Propuesto por Bătineţu-Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucarest, y Neculai Stanciu, "George Emil Palade" Secondary School, Buzău, Rumanía.*

Probar que en todo triángulo ABC, si las longitudes de los lados BC, CA y AB son, respectivamente, a, b y c, las longitudes de las alturas desde los vértices A, B y C son, respectivamente, h_a, h_b y h_c, y el área es F, se cumple la desigualdad

$$a^4(h_b^2 + h_c^2) + b^4(h_c^2 + h_a^2) + c^4(h_a^2 + h_b^2) \geq 32\sqrt{3}\,F^3.$$

Solución enviada por Kee-Wai Lau, Hong Kong, China.

Puesto que $h_a = 2F/a$, $h_b = 2F/b$ y $h_c = 2F/c$, tras reorganizar sus términos, la desigualdad dada se convierte en

$$\begin{aligned} 8\sqrt{3}F &\leq \frac{a^4}{b^2} + \frac{b^4}{a^2} + \frac{b^4}{c^2} + \frac{c^4}{b^2} + \frac{c^4}{a^2} + \frac{a^4}{c^2} \\ &= 2(ab + bc + ca) + \left(\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a}\right)^2 + \left(\frac{b^2}{c} - \frac{c^2}{b}\right)^2 + \left(\frac{c^2}{a} - \frac{a^2}{c}\right)^2, \end{aligned}$$

que resulta ser cierta aplicando la desigualdad de Weitzenböck [1, (4.5)]

$$ab + bc + ca \geq 4\sqrt{3}F.$$

Dado que en la desigualdad de Weitzenböck la igualdad se alcanza si y solo si el triángulo es equilátero, así ocurre para la propuesta en este problema.

REFERENCIAS

[1] O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović y P. M. Vasić, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Pub., Groningen, 1969.

También resuelto por C. Beade, B. Bradie, N. S. Dasireddy, J. Nadal, B. Salgueiro, A. Stadler, D. Văcaru y los proponentes.

PROBLEMA 412. *Propuesto por Paolo Perfetti, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Roma "Tor Vergata", Roma, Italia.*

Sea

$$\mathrm{Li}_2(z) = -\int_0^z \frac{\log(1-t)}{t}\, dt$$

la función dilogaritmo. Probar que

$$\mathrm{Re}\left(\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2} - \frac{2+\sqrt{3}}{2}i\right) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2} - \frac{2-\sqrt{3}}{2}i\right)\right) = \frac{11}{144}\pi^2 - \frac{\log^2(2+\sqrt{3})}{4}.$$

Solución enviada por Seán M. Stewart, Bomaderry, NSW, Australia.

Sean

$$z_1 = \frac{1}{2} - \frac{2+\sqrt{3}}{2}i \qquad \text{y} \qquad z_2 = \frac{1}{2} - \frac{2-\sqrt{3}}{2}i.$$

Notar que $\overline{z_i} = 1 - z_i$ para $i = 1, 2$. Entonces, puesto que $\overline{\mathrm{Li}_2(z)} = \mathrm{Li}_2(\overline{z})$, aplicando la fórmula de reflexión de Euler para la función dilogaritmo

$$\mathrm{Li}_2(z) + \mathrm{Li}_2(1-z) = \frac{\pi^2}{6} - \log(z)\log(1-z), \tag{1}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(\operatorname{Li}_2(z_1)+\operatorname{Li}_2(z_2)) &= \operatorname{Re}(\operatorname{Li}_2(z_1))+\operatorname{Re}(\operatorname{Li}_2(z_2))\\
&= \frac{1}{2}(\operatorname{Li}_2(z_1)+\operatorname{Li}_2(\overline{z_1})+\operatorname{Li}_2(z_2)+\operatorname{Li}_2(\overline{z_2}))\\
&= \frac{1}{2}(\operatorname{Li}_2(z_1)+\operatorname{Li}_2(1-z_1)+\operatorname{Li}_2(z_2)+\operatorname{Li}_2(1-z_2))\\
&= \frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2}(\log(z_1)\log(1-z_1)+\log(z_2)\log(1-z_2)).
\end{aligned}$$

Considerando la rama principal del logaritmo, obtenemos los valores

$$\log(z_1)=\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})+\frac{5\pi}{12}i, \qquad \log(1-z_1)=\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})-\frac{5\pi}{12}i$$

$$\log(z_2)=-\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})-\frac{\pi}{12}i \qquad \text{y} \qquad \log(1-z_2)=-\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})+\frac{\pi}{12}i,$$

y el resultado se concluye inmediatamente.

También resuelto por B. Bradie, P. Fernández, M. L. Glasser, A. Stadler y el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.

Nota. La fórmula de reflexión de Euler (1) ha sido utilizada en varias de las soluciones recibidas y puede probarse de una forma sencilla. En efecto, por el principio de prolongación analítica, el resultado se obtiene para todo el plano complejo excepto las semirrectas $(-\infty,0]$ y $[1,+\infty)$ probándolo para $z\in(0,1)\subset\mathbb{R}$. Ahora, utilizando sucesivamente el cambio de variable $t=1-s$ e integración por partes en la integral que define $\operatorname{Li}_2(1-z)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Li}_2(z)+\operatorname{Li}_2(1-z) &= -\int_0^z \frac{\log(1-t)}{t}\,dt-\int_z^1\frac{\log s}{1-s}\,ds\\
&= -\int_0^z \frac{\log(1-t)}{t}\,dt-\log(z)\log(1-z)-\int_z^1\frac{\log(1-s)}{s}\,ds\\
&= -\log(z)\log(1-z)-\int_0^1\frac{\log(1-t)}{t}\,dt\\
&= -\log(z)\log(1-z)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\int_0^1 t^{k-1}\,dt\\
&= -\log(z)\log(1-z)+\zeta(2)=-\log(z)\log(1-z)+\frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}$$

Problema 413. *Propuesto por George Stoica, Saint John, New Brunswick, Canada.*

Probar que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\varepsilon\sqrt{n}}^{\infty}e^{-t^2/2}\,dt\right)=\frac{1}{2}$$

y

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\log\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{\varepsilon\sqrt{n}}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = -\sqrt{2\pi}.$$

Solución enviada por Albert Stadler, Herrliberg, Suiza.

De una manera más precisa probaremos que, para $\varepsilon \to 0^+$, se verifica que

$$\frac{1}{\varepsilon^2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\varepsilon\sqrt{n}}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = \frac{1}{2} + O(\varepsilon) \tag{1}$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{\varepsilon\sqrt{n}}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = -\sqrt{2\pi}\log\varepsilon - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\log 2 + O(\varepsilon). \tag{2}$$

Ambas identidades serán consecuencia del siguiente resultado.

LEMA. *Para cada $\varepsilon > 0$ se cumplen las identidades*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\varepsilon\sqrt{n}}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, J_1 \qquad y \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{\varepsilon\sqrt{n}}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, J_2,$$

con

$$J_1 = \int_{\varepsilon^2/2}^{\infty} \frac{e^{-w}}{(1-e^{-w})^2} \arccos\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2w}}\right) dw$$

y

$$J_2 = \int_{\varepsilon^2/2}^{\infty} \frac{e^{-w}}{1-e^{-w}} \arccos\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2w}}\right) dw.$$

Pospongamos la prueba de este lema hasta el final de la solución y veamos ahora que, efectivamente, implica (1) y (2). Para ello será necesario tener en cuenta que, para $x \to 0$, se verifica

$$\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} = \frac{1}{x^2} + O(1), \qquad \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{1}{x} + O(1) \quad \text{y} \quad \arccos x = \frac{\pi}{2} + O(x). \tag{3}$$

Para analizar J_1, la descomponemos como $J_1 = J_{1,1} + J_{2,2}$ con

$$J_{1,1} = \int_{\varepsilon^2/2}^{\infty} \frac{1}{w^2} \arccos\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2w}}\right) dw$$

y

$$J_{1,2} = \int_{\varepsilon^2/2}^{\infty} \left(\frac{e^{-w}}{(1-e^{-w})^2} - \frac{1}{w^2}\right) \arccos\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2w}}\right) dw.$$

Para $J_{1,1}$, aplicando, sucesivamente, el cambio de variable $2w = \varepsilon^2/t$ e integración por partes, se tiene

$$J_{1,1} = \frac{2}{\varepsilon^2}\int_0^1 \arccos(\sqrt{t})\,dt = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}}\,dt = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2)} = \frac{\pi}{2\varepsilon^2}.$$

En el caso de $J_{1,2}$, usando (3) obtenemos que

$$\begin{aligned} J_{1,2} &= \int_{\varepsilon^2/2}^{\infty}\left(\frac{e^{-w}}{(1-e^{-w})^2} - \frac{1}{w^2}\right)\left(\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2w}}\right)\right)dw \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-w}}{(1-e^{-w})^2} - \frac{1}{w^2}\right)dw + O(\varepsilon^2) + O(\varepsilon) \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{w} - \frac{1}{1-e^{-w}}\right)\Bigg|_0^{\infty} + O(\varepsilon) = -\frac{\pi}{4} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

De esta forma,

$$\frac{1}{\varepsilon^2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\varepsilon\sqrt{n}}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{2}{\pi}J_1 = \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{2}{\pi}(J_{1,1} + J_{1,2}) = \frac{1}{2} + O(\varepsilon)$$

y (1) queda probada.

Para tratar J_2, la escribimos como $J_2 = J_{2,1} + J_{2,2} + J_{2,3}$ con

$$J_{2,1} = \int_{\varepsilon^2/2}^{1}\frac{1}{w}\arccos\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2w}}\right)dw,$$

$$J_{2,2} = \int_{\varepsilon^2/2}^{1}\left(\frac{e^{-w}}{1-e^{-w}} - \frac{1}{w}\right)\arccos\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2w}}\right)dw$$

y

$$J_{2,3} = \int_1^{\infty}\frac{e^{-w}}{1-e^{-w}}\arccos\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2w}}\right)dw.$$

En primer lugar tenemos que

$$\begin{aligned} J_{2,1} &= \frac{\pi}{2}\int_{\varepsilon^2/2}^{1}\frac{1}{w}\,dw + \int_{\varepsilon^2/2}^{1}\frac{1}{w}\left(\arccos\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2w}}\right) - \frac{\pi}{2}\right)dw \\ &= \frac{\pi}{2}\log\frac{2}{\varepsilon^2} + \int_0^1\frac{1}{w}\left(\arccos\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2w}}\right) - \frac{\pi}{2}\right)dw + O(\varepsilon) \\ &= \frac{\pi}{2}\log\frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{1}{2}\int_0^1\frac{\log w}{\sqrt{w(1-w)}}\,dw + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha utilizado integración por partes. Ahora, el cambio de variable $w = \operatorname{sen}^2 s$ y la identidad $\int_0^{\pi/2}\log\operatorname{sen} s\,ds = -\frac{\pi}{2}\log 2$ nos dan que

$$\int_0^1\frac{\log w}{\sqrt{w(1-w)}}\,dw = 4\int_0^{\pi/2}\log\operatorname{sen} s\,ds = -2\pi\log 2$$

y
$$J_{2,1} = -\pi \log \varepsilon - \frac{\pi}{2} \log 2 + O(\varepsilon).$$
Para la integral $J_{2,2}$ podemos deducir que
$$\begin{aligned} J_{2,2} &= \int_{\varepsilon^2/2}^{1} \left(\frac{e^{-w}}{1-e^{-w}} - \frac{1}{w} \right) \left(\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2w}} \right) \right) dw \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \left(\frac{e^{-w}}{1-e^{-w}} - \frac{1}{w} \right) dw + O(\varepsilon) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\log(1-e^{-w}) - \log w \right) \Big|_0^1 + O(\varepsilon) \\ &= \frac{\pi}{2} \log \left(1 - \frac{1}{e} \right) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$
Finalmente, la integral $J_{2,3}$ admite la estimación
$$\begin{aligned} J_{2,3} &= \int_1^{\infty} \frac{e^{-w}}{1-e^{-w}} \left(\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2w}} \right) \right) dw = \frac{\pi}{2} \int_1^{\infty} \frac{e^{-w}}{1-e^{-w}} \, dw + O(\varepsilon) \\ &= \frac{\pi}{2} \log(1-e^{-w}) \Big|_1^{\infty} + O(\varepsilon) = -\frac{\pi}{2} \log \left(1 - \frac{1}{e} \right) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$
Y, por tanto,
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{\varepsilon\sqrt{n}}^{\infty} e^{-t^2/2} \, dt &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} J_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (J_{2,1} + J_{2,2} + J_{2,3}) \\ &= -\sqrt{2\pi} \log \varepsilon - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \log 2 + O(\varepsilon), \end{aligned}$$
lo que demuestra (2).

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. Con el cambio de variable $t = \sqrt{2nu}$ tenemos
$$\int_{\varepsilon\sqrt{n}}^{\infty} e^{-t^2/2} \, dt = \sqrt{\frac{n}{2}} \int_{\varepsilon^2/2}^{\infty} \frac{e^{-nu}}{\sqrt{u}} \, du.$$
Así, usando la identidad
$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-nv}}{\sqrt{v}} \, dv = \sqrt{\frac{\pi}{n}},$$
deducimos que
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\varepsilon\sqrt{n}}^{\infty} e^{-t^2/2} \, dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon^2/2}^{\infty} \frac{e^{-n(u+v)}}{\sqrt{uv}} \, du \, dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \int_{\varepsilon^2/2}^{\infty} \frac{e^{-(u+v)}}{1-e^{-(u+v)}} \frac{1}{\sqrt{uv}} \, du \, dv, \end{aligned}$$

donde en el último paso hemos intercambiado la suma y la integral (lo que es posible por tratarse de términos positivos) y hemos aplicado que

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \qquad |x| < 1. \tag{4}$$

El cambio de variables $w = u + v$ y $u = s$ y la expresión

$$\int_a^w \frac{ds}{\sqrt{s(w-s)}} = 2 \arccos \sqrt{\frac{a}{w}}$$

nos permiten obtener que

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\int_{\varepsilon^2/2}^{\infty} \frac{e^{-(u+v)}}{1-e^{-(u+v)}} \frac{1}{\sqrt{uv}}\, du\, dv &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-w}}{(1-e^{-w})^2} \int_{\varepsilon^2/2}^{w} \frac{ds}{\sqrt{s(w-s)}}\, dw \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-w}}{(1-e^{-w})^2} \arccos\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2w}}\right) dw = J_1,\end{aligned}$$

y la primera identidad del lema queda probada.

Para probar la segunda parte del lema basta proceder del mismo modo pero usando la suma de la serie geométrica de razón x en lugar de (4), y por ello omitimos los detalles. □

También resuelto por el proponente.

Problema 414. *Propuesto por Lawrence Glasser, Clarkson University, Postdam, Nueva York, EE. UU.*

Probar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tgh}(x/2))}{\operatorname{senh} x}\, dx = G,$$

donde $G = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$ es la constante de Catalan.

Solución enviada por Jaime Vinuesa Tejedor, Universidad de Cantabria, Santander.

Mediante el cambio de variable $t = \operatorname{tgh}(x/2)$ la integral se transforma en

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} t}{t}\, dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2k+1}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \int_0^1 t^{2k}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = G.$$

La integración término a término realizada es posible ya que la serie numérica $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ es convergente y por tanto (teorema de Abel) la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2k+1}$ es uniformemente convergente en $[0,1]$.

También resuelto por B. Bradie, P. Fernández, G. C. Greubel, J. Mozo, J. Nadal, C. Sacristán, B. Salgueiro, A. Stadler, S. M. Stewart y el proponente.

PROBLEMA 415. *Propuesto por Vasile Cirtoaje y Leonard Giugiuc, Rumanía.*
Consideramos el conjunto

$$S = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a+b+c=3,\ ab+bc+ca \geq 0,\ a,b,c \neq -1\}.$$

Determinar las soluciones en el conjunto S de la ecuación

$$\frac{a-1}{b+1} + \frac{b-1}{c+1} + \frac{c-1}{a+1} = 0.$$

Solución elaborada por los editores basada en la enviada por los proponentes.

A partir de las condiciones $a+b+c=3$ y $ab+bc+ca \geq 0$ obtenemos que $ab \geq c(c-3)$ y, como $(a+b)^2 \geq 4ab$, llegamos a la desigualdad $3(3-a)(a+1) \geq 0$ que equivale a $-1 \leq a \leq 3$. Como $a \neq -1$, concluimos que $-1 < a \leq 3$. Por simetría, lo mismo ocurre con b y c, de modo que $-1 < a,b,c \leq 3$.

Además, como $ab+bc+ca \geq 0$, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz resulta

$$ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 9 - 2(ab+bc+ca),$$

luego $ab+bc+ca \leq 3$. Sea $q \in [0,1]$ tal que $ab+bc+ca = 3(1-q^2)$.

Tomemos las nuevas variables $x=a-1$, $y=b-1$ y $z=c-1$. Tenemos que $-2 < x,y,z \leq 2$, $x+y+z=0$ y $xy+yz+zx=-3q^2$. La ecuación dada se convierte en

$$\frac{x}{y+2} + \frac{y}{z+2} + \frac{z}{x+2} = 0,$$

equivalente a

$$xy^2+yz^2+zx^2 = -6q^2. \tag{1}$$

Para x,y,z cualesquiera, vamos a emplear la notación $S=x+y+z$, $C=xy+yz+zx$ y $P=xyz$. Es un ejercicio algebraico sencillo comprobar la identidad

$$(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2 = S^2C^2 - 4S^3P + 18SCP - 4C^3 - 27P^2.$$

En nuestro caso, $S=0$ y $C=-3q^2$, y queda

$$(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2 = 27(4q^6-P^2),$$

de donde se sigue que $|P| \leq 2q^3$ y $|(x-y)(y-z)(z-x)| = 3\sqrt{3}\sqrt{4q^6-P^2}$.

Para completar la solución serán necesarias dos identidades más. En primer lugar,

$$(xy^2+yz^2+zx^2) - (x^2y+y^2z+z^2x) = (x-y)(y-z)(z-x). \tag{2}$$

Por otra parte, como en nuestro caso $S=0$, de $x^3+y^3+z^3 = S^3 - 3CS + 3P$ se obtiene $x^3+y^3+z^3 = 3P$. Y con esto, de

$$S^3 = x^3+y^3+z^3 + 3(xy^2+yz^2+zx^2+x^2y+y^2z+z^2x) + 6P,$$

se obtiene

$$(xy^2 + yz^2 + zx^2) + (x^2y + y^2z + z^2x) = -3P. \tag{3}$$

Supongamos ahora, sin pérdida de generalidad, que $z = \max\{x, y, z\}$. Analizaremos dos casos.

Caso 1: $y \geq x$. Puesto que $(x-y)(y-z)(z-x) \geq 0$, la ecuación (2) se transforma en

$$(xy^2 + yz^2 + zx^2) - (x^2y + y^2z + z^2x) = 3\sqrt{3}\sqrt{4q^6 - P^2}.$$

Usando (3), deducimos que

$$xy^2 + yz^2 + zx^2 = \frac{3}{2}(-P + \sqrt{3}\sqrt{4q^6 - P^2})$$

y (1) se convierte en

$$4q^2 - P + \sqrt{3}\sqrt{4q^6 - P^2} = 0.$$

Como $4q^2 - P \geq 0$ (recordemos que $P \leq 2q^3$ y que $q \in [0, 1]$), esta última ecuación admite como única solución con $q \in [0, 1]$ el par $(P, q) = (0, 0)$. De esta manera llegamos a que en este caso se tiene, necesariamente, $x = y = z = 0$ y, por tanto, $a = b = c = 1$.

Caso 2: $y \leq x$. Ahora se tiene que $(x - y)(y - z)(z - x) \leq 0$ y (2) se reescribe como

$$(xy^2 + yz^2 + zx^2) - (x^2y + y^2z + z^2x) = -3\sqrt{3}\sqrt{4q^6 - P^2}.$$

Con (3), llegamos a que

$$xy^2 + yz^2 + zx^2 = \frac{3}{2}(-P - \sqrt{3}\sqrt{4q^6 - P^2}).$$

De este modo, la ecuación (1) se transforma en

$$4q^2 - P = \sqrt{3}\sqrt{4q^6 - P^2},$$

equivalente a $(P - q^2)^2 + 3q^4(1 - q^2) = 0$. Como $q \in [0, 1]$, esta última ecuación tiene solo dos soluciones: $(P, q) = (0, 0)$ que, como en el caso anterior, da $x = y = z = 0$, y $(P, q) = (1, 1)$ que implica que x, y, z son las tres soluciones de la ecuación $t^3 - 3t - 1 = 0$; y así, como $z \geq x \geq y$, se obtiene

$$x = 2\cos\frac{5\pi}{9}, \qquad y = 2\cos\frac{7\pi}{9} \qquad \text{y} \qquad z = 2\cos\frac{\pi}{9}.$$

En conclusión, todas las soluciones de la ecuación dada en el conjunto S son $(a, b, c) = (1, 1, 1)$,

$$(a, b, c) = \left(1 + 2\cos\frac{5\pi}{9}, 1 + 2\cos\frac{7\pi}{9}, 1 + 2\cos\frac{\pi}{9}\right)$$

y sus permutaciones cíclicas.

También resuelto por R. Phuc y A. Stadler.

PROBLEMA 416. *Propuesto por Mihály Bencze, Braşov, Rumanía.*

Sean $c > a > 0$ y $b \in (0, \infty) \setminus \{1\}$. Determinar todas las funciones continuas $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ tales que

$$\log(ax+b) \int_0^{cx} f(t)\,dt = \log(cx+b) \int_0^{ax} f(t)\,dt.$$

Solución enviada por el proponente.

Supongamos inicialmente que $b > 1$ y consideremos la función

$$g(x) = \frac{1}{\log(x+b)} \int_0^{x} f(t)\,dt, \qquad x \geq 0.$$

Observemos que la función es continua en $[0, \infty)$ y que la identidad propuesta es igual a $g(cx) = g(ax)$. Sustituyendo ahora x por x/c tenemos que $g(x) = g(ax/c)$ y, mediante un porceso de inducción, es sencillo probar que

$$g(x) = g\left(\left(\frac{a}{c}\right)^n x\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Así, la continuidad de g, usando que $a/c < 1$, implica que

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g\left(\left(\frac{a}{c}\right)^n x\right) = g\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{c}\right)^n x\right) = g(0) = 0.$$

Por tanto, $\int_0^x f(t)\,dt = 0$ y, por la continuidad y la no negatividad de f, podemos concluir que $f(x) = 0$ para $x \geq 0$.

En el caso $0 < b < 1$, debemos excluir del argumento anterior el valor $x = 1 - b$ puesto que g no es continua en dicho punto. Con esa exclusión (notemos que si $x \neq 1 - b$, entonces $x \neq (a/c)^n(1-b)$), podemos probar que $f(x) = 0$ para $x \in [0, \infty) \setminus \{1 - b\}$, pero la continuidad de f implica que $f(1-b) = 0$ y, por tanto, $f(x) = 0$ para $x \geq 0$.

Se ha recibido una solución incompleta.