

Escalas musicales, números irracionales y sistemas dinámicos

por

José Ángel Cid

RESUMEN. En este trabajo se analiza la escala musical basada en los principios pitagóricos de la equivalencia de la octava y la concatenación de quintas. Veremos que esto convierte a la escala pitagórica en la órbita de una rotación irracional de la circunferencia y que, por tanto, no se «cierra» de forma exacta. Cuando aproximamos esta rotación irracional mediante rotaciones racionales aparece de forma natural el concepto de escala temperada, como la usada en la afinación del piano. Sorprendentemente, al analizar cuál es el número «óptimo» de notas para las escalas pitagórica y temperada nos vemos conducidos a los problemas clásicos de aproximación de segunda y de primera especie, respectivamente, de números irracionales mediante racionales. Ambos problemas se resuelven con el uso de fracciones continuas y tienen interesantes aplicaciones a la teoría musical.

1. INTRODUCCIÓN

La estrecha relación entre la música y las matemáticas es bien conocida desde la antigüedad, y ha sido explorada en numerosas y excelentes referencias, como [1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 13, 15, 21, 22, 25, 31], así como en la magnífica sección «Música y matemáticas» del portal *divulgaMAT* de la RSME [14].

En este artículo pretendemos llamar la atención de la comunidad matemática sobre la estrecha relación entre la teoría de las escalas musicales, los sistemas dinámicos y ciertos problemas que se plantean en teoría de números: en concreto, los problemas de aproximación de primera y segunda especie de números irracionales mediante racionales [30]. Estos problemas de aproximación se resuelven con ayuda de la bella teoría de las fracciones continuas [17], y sus implicaciones en la construcción de escalas musicales han sido convenientemente documentadas [11, 28]. Recientemente también parece haberse renovado el interés en las fracciones continuas debido a sus múltiples e interesantes aplicaciones [7, 19].

Sin embargo, la relación de las escalas musicales con los sistemas dinámicos, y en concreto con las rotaciones racionales e irracionales de la circunferencia, parece ser mucho menos conocida. Suele ser más habitual un enfoque algebraico, basado por ejemplo en la teoría de grupos, como el que aparece en el excelente capítulo dedicado a la música en [24]. Consideramos, sin embargo, que la aproximación desde la óptica de los sistemas dinámicos pone más claramente de manifiesto la diferencia esencial entre la escala pitagórica y las escalas temperadas, permitiendo además formular de manera natural, en lenguaje geométrico, los problemas de aproximación de primera y

segunda especie de números irracionales mediante racionales. Resulta cuando menos curioso, para un matemático sin formación musical específica, que conceptos usuales para los estudiantes de Conservatorio como los de *espiral de quintas*, *coma pitagórica*, *quinta del lobo*. . . , encuentren un acomodo preciso en esta formulación, que también abre el camino para explorar nuevas escalas musicales usando otras aplicaciones de la circunferencia que posean órbitas periódicas [29].

En cualquier caso esperamos que el lector disfrute de estas conexiones, aparentemente inesperadas, entre diferentes campos de estudio. La música es, sin duda, un regalo para el espíritu humano y también para las matemáticas.

2. LA ESCALA MUSICAL PITAGÓRICA

De las cuatro propiedades básicas del sonido —*intensidad (volumen)*, *altura (frecuencia)*, *timbre* y *duración*— solo prestaremos atención en este artículo a la frecuencia. Por supuesto, se trata de una simplificación que no refleja la complejidad del mundo real —en el que, por ejemplo, distinguimos perfectamente una nota LA emitida por una trompeta del LA de la misma altura emitido por un violín debido a su distinto timbre—, pero que permite aislar una característica fundamental del sonido y analizarla con precisión.

La afinación en la música occidental se basa en los siguientes principios, o axiomas, que se remontan a la escuela pitagórica:

- (P_1) Dos frecuencias en una razón 2 : 1 (*octava*) representan la misma nota.
- (P_2) Dos frecuencias en una razón 3 : 2 (*quinta*) son consonantes (es decir, resultan armoniosas al oído humano cuando suenan simultáneamente).

De esta forma, (P_1) establece que las *notas* son elementos del espacio cociente X que se obtiene al considerar, en $\mathbb{R}_+ := (0, \infty)$, la relación de equivalencia

$$x \approx y \iff \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } y = 2^n x.$$

Claramente, cualquier clase de equivalencia

$$[[x]] := \{2^n x : n \in \mathbb{Z}\}$$

posee un único representante en $[1, 2)$. Este intervalo se llama *octava*, al igual que cualquier otro intervalo de la forma $[2^n, 2^{n+1})$ con $n \in \mathbb{Z}$.

Basándonos ahora en el principio (P_2), la escala musical pitagórica (EMP) se obtiene empezando en una frecuencia principal, que identificamos con $[[1]]$, e iterando la función

$$f : X \rightarrow X, \quad [[x]] \mapsto f([[x]]) := \left[\left[\frac{3x}{2} \right] \right].$$

Por tanto, la escala EMP es la órbita de $[[1]]$ a través de la función f , es decir,

$$\text{EMP} := \{f^n([[1]]) : n \in \mathbb{Z}\} = \left\{ \left[\left[\frac{3^n}{2^n} \right] \right] : n \in \mathbb{Z} \right\} = \{[[3^n]] : n \in \mathbb{Z}\}.$$

EJEMPLO 2.1. Tradicionalmente, las siete notas musicales usadas como base de la música occidental se corresponden con los siguientes elementos de la escala EMP (indicamos también su representante en la octava $[1, 2)$ y su denominación¹):

Elemento	Frecuencia	Nombre	Nombre anglosajón
$f^{-1}([1])$	$[\frac{4}{3}]$	FA	F
$f^0([1])$	$[1]$	DO	C
$f^1([1])$	$[\frac{3}{2}]$	SOL	G
$f^2([1])$	$[\frac{9}{8}]$	RE	D
$f^3([1])$	$[\frac{27}{16}]$	LA	A
$f^4([1])$	$[\frac{81}{64}]$	MI	E
$f^5([1])$	$[\frac{243}{128}]$	SI	B

Ordenadas de menor a mayor frecuencia en la octava $[1, 2)$, estas notas configuran la familiar escala musical:

Frecuencia	$[1]$	$[\frac{9}{8}]$	$[\frac{81}{64}]$	$[\frac{4}{3}]$	$[\frac{3}{2}]$	$[\frac{27}{16}]$	$[\frac{243}{128}]$
Nombre	DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI
Nombre anglosajón	C	D	E	F	G	A	B

Además, esta tabla explica el nombre de «quinta» asociado a la nota que guarda una relación de frecuencia $3 : 2$ con otra dada: SOL ocupa la quinta posición si empezamos a contar en DO, RE la quinta posición (asumiendo un orden cíclico) empezando en SOL, LA es la quinta nota contando desde RE,...

Es habitual representar la sucesión de quintas en el llamado «círculo de quintas» (figura 1) aunque, como veremos, en la escala pitagórica este círculo nunca se cierra, por lo que habría que hablar más bien de una «espiral de quintas» (véase [4, sección 5.3]).

Recordamos que algunos instrumentos de cuerda (violín, viola, cello) se afinan precisamente «por quintas»; por ejemplo, las cuerdas «al aire» (es decir, sin pulsar) del violín producen la secuencia ascendente SOL-RE-LA-MI; las cuerdas al aire del contrabajo de cuatro cuerdas, que se afina «por cuartas», producen la misma secuencia de notas, pero ascendiendo en orden contrario: MI-LA-RE-SOL. Eso sí, están afinados en distintas octavas,² por eso en el contrabajo reconocemos un sonido mucho más grave que en el violín.

¹La notación en alemán, que no se incluye, es similar a la inglesa pero con alguna ligera diferencia: la nota SI se denota como H en lugar de B, reservándose en alemán esa letra para el SI^b. Bach incluía de forma recurrente en sus composiciones un fragmento musical con las notas de su apellido a modo de firma.

²El MI al aire del violín (659.3 Hz) está cuatro octavas por encima del MI al aire del contrabajo (41.2 Hz), mientras que el SOL al aire del violín (196 Hz) está solo una octava por encima del SOL al aire del contrabajo (98 Hz).

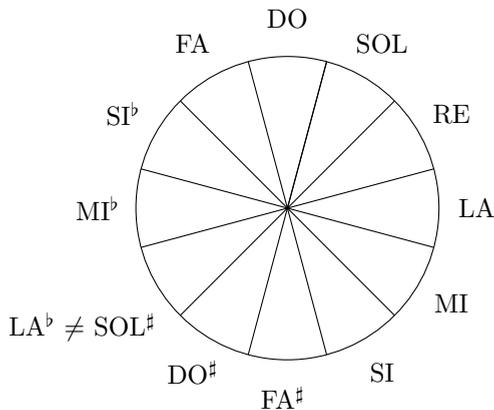


Figura 1: Círculo de quintas

El logaritmo binario, $\log_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \log_2(x)$, permite establecer un homeomorfismo entre X y \mathbb{R}/\mathbb{Z} , el conjunto cociente de \mathbb{R} al considerar la relación de equivalencia

$$x \sim y \iff \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } y = x + n.$$

Es decir, $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{[x] : x \in \mathbb{R}\}$, siendo $[x] := \{x + n : n \in \mathbb{Z}\}$, y dicho homeomorfismo es

$$g : X \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad [[x]] \mapsto g([[x]]) := [\log_2(x)].$$

Obsérvese que cualquier clase de equivalencia en \mathbb{R}/\mathbb{Z} tiene un único representante en el conjunto $[0, 1)$. Dicho conjunto también se llamará octava cuando usemos la notación aditiva correspondiente a \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

Definiendo la *constante de paso de la espiral de quintas*

$$\theta := \log_2\left(\frac{3}{2}\right) = \log_2(3) - 1 \approx 0.584963$$

y teniendo en cuenta la identificación anterior, la función $f([[x]]) = [[\frac{3x}{2}]]$ resulta equivalente a

$$R_\theta : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad [x] \mapsto R_\theta([x]) := [x + \theta]. \tag{2.1}$$

En otras palabras, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ 2^x \uparrow & & \downarrow \log_2 \\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \xrightarrow{R_\theta} & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \end{array}$$

A su vez, \mathbb{R}/\mathbb{Z} se identifica de forma natural con la circunferencia unidad

$$S^1 := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 = 1\}$$

mediante el homeomorfismo

$$h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1, \quad [x] \mapsto h([x]) := (\cos(2\pi x), \text{sen}(2\pi x)).$$

Por tanto, usando esta última identificación, la aplicación R_θ representa geométricamente una rotación de la circunferencia S^1 de ángulo $2\pi\theta$ radianes en sentido antihorario. Esta identificación de la octava con una circunferencia orientada también permite definir una escala musical, de forma general, como un subconjunto finito cualquiera de puntos de la circunferencia unidad, y analizar sus propiedades algebraicas y geométricas, véanse por ejemplo las interesantes referencias [8, 21, 22].

El siguiente teorema establece, en particular, que θ es un número irracional, resultado que, como veremos, tendrá consecuencias muy importantes en la teoría musical (puede verse una generalización del mismo en [23, comentario posterior al teorema 2.11]).

TEOREMA 2.2. *Si $\frac{p}{q}$, con $p, q \in \mathbb{N}$, es un número racional que no es una potencia de 2 (es decir, $\frac{p}{q} \neq 2^i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$), entonces $\log_2\left(\frac{p}{q}\right)$ es un número irracional.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos, por el contrario, que existe un número racional $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, tal que $\log_2\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{m}{n}$ o, equivalentemente, que $\frac{p}{q} = 2^{m/n}$. Entonces, $\frac{p^n}{q^n} = 2^m$, o $p^n = 2^m \cdot q^n$. Si escribimos $p = 2^l \cdot p'$ y $q = 2^k \cdot q'$, con $\text{mcd}(2, p') = 1$ y $\text{mcd}(2, q') = 1$, se tiene entonces que $(2^l \cdot p')^n = 2^m \cdot (2^k \cdot q')^n$, es decir,

$$2^{l \cdot n} \cdot (p')^n = 2^m \cdot 2^{k \cdot n} \cdot (q')^n = 2^{m+k \cdot n} \cdot (q')^n.$$

Por el teorema fundamental de la aritmética, debe ser $l \cdot n = m + k \cdot n$, de donde $(l - k) \cdot n = m$. Pero, entonces,

$$\frac{p}{q} = 2^{m/n} = 2^{l-k}$$

es una potencia de 2, y llegamos a una contradicción. □

Resulta curioso que la escuela pitagórica encontrara en las sencillas relaciones numéricas entre números naturales expresadas en (P_1) y (P_2) la inspiración para su máxima «todo es número», cimentando así su confianza en el poder de las razones de números naturales para expresar cualquier fenómeno. Sin embargo, la escala musical generada por estas razones racionales esconde en su interior la constante irracional $\theta = \log_2\left(\frac{3}{2}\right)$.

De hecho, cualquier razón simple $m : n$ entre números naturales tal que $1 < \frac{m}{n} < 2$ conduce al número irracional $\log_2\left(\frac{m}{n}\right)$. De esta forma, los números irracionales habitan en el propio corazón del modelo musical pitagórico.

3. SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS

Como acabamos de ver, $\theta = \log_2\left(\frac{3}{2}\right)$ es un número irracional y, por tanto, R_θ representa una *rotación irracional* de la circunferencia [16, capítulo 4].

En el conjunto \mathbb{R}/\mathbb{Z} se considera la distancia

$$d([x], [y]) := \min\{|x - y - n| : n \in \mathbb{Z}\},$$

que geoméricamente mide la longitud, dividida entre 2π , del menor arco que conecta dos puntos sobre la circunferencia unidad S^1 .

Conocemos entonces información precisa sobre el comportamiento de R_θ :

- (i) R_θ es un homeomorfismo, y $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.
- (ii) R_θ es una isometría, es decir,

$$d(R_\theta([x]), R_\theta([y])) = d([x], [y]) \quad \text{para todo } [x], [y] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

- (iii) R_θ es homogénea, es decir,

$$d([x], R_\theta^n([x])) = d([y], R_\theta^n([y])) \quad \text{para todo } [x], [y] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{Z}.$$

- (iv) Todas las órbitas de R_θ son densas³ en \mathbb{R}/\mathbb{Z} y, en particular, ninguna órbita de R_θ es periódica.

La propiedad (iv) tiene consecuencias muy importantes desde el punto de vista de la teoría musical: como todos los elementos en la órbita de $[0]$ son distintos, resulta que la escala pitagórica

$$\{R_\theta^n([0]) : n \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, [-2\theta], [-\theta], [0], [\theta], [2\theta], \dots\}$$

está formada por infinitas notas, esto es, que el círculo de quintas nunca se cierra de forma exacta.

En efecto, en cualquier escala obtenida encadenando q quintas consecutivas estamos considerando solamente una porción finita de la órbita $\{R_\theta^n([0])\}_{n \in \mathbb{Z}}$ que, por homogeneidad, podemos suponer que empieza en $[0]$.

DEFINICIÓN 3.1. Se define la *escala musical pitagórica de q notas*, con $q \in \mathbb{N}$ y $q \geq 2$, como el conjunto

$$\text{EMP}(q) := \{R_\theta^n([0]) : n \in \{0, 1, 2, \dots, q-1\}\} = \{[0], [\theta], [2\theta], \dots, [(q-1)\theta]\},$$

y llamamos *coma pitagórica* asociada a la escala pitagórica de q notas al error cometido en el cierre, es decir,

$$\text{CP}(q) := d([q\theta], [0]) = \min\{|q\theta - n| : n \in \mathbb{Z}\}.$$

OBSERVACIÓN 3.2. Como la órbita de R_θ no es periódica tenemos que, para todo $q \geq 1$,

$$R_\theta^q([0]) = [q\theta] \neq [0]$$

y, por tanto,

$$\text{CP}(q) > 0 \quad \text{para todo } q \geq 1.$$

³Más aún, todas las órbitas de R_θ están *uniformemente distribuidas* [23, teorema 6.3].

Por otro lado, como la órbita $\{R_\theta([0])\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es densa, sabemos que

$$\liminf_{q \rightarrow \infty} \text{CP}(q) = d(R_\theta([0]), [0]) = 0.$$

En teoría musical es bien conocida la disonancia producida debido a la existencia de la coma pitagórica. El cierre de una escala pitagórica tradicional de doce notas suele situarse en el intervalo entre SOL[#] y MI^b, conociéndose dicho intervalo como la «quinta del lobo»⁴ de la escala. Según nuestra definición, la coma pitagórica de esta escala, que sería la distancia al entero más próximo del logaritmo en base 2 del cociente entre las frecuencias de SOL[#] y LA^b, es de

$$\text{CP}(12) = \log_2(3^{12}/2^{19}) \approx \log_2(1.0136) \approx 0.01955.$$

4. FRACCIONES CONTINUAS Y EL PROBLEMA DE APROXIMACIÓN ÓPTIMA DE SEGUNDA ESPECIE

Se nos plantea por tanto una cuestión natural: ¿cuáles son las mejores escalas pitagóricas?

DEFINICIÓN 4.1. Diremos que la escala pitagórica EMP(q) es *óptima* cuando su coma pitagórica sea menor que la de todas las escalas pitagóricas con menos de q notas, es decir, cuando

$$\text{CP}(q) = d([q\theta], [0]) < \min_{1 \leq n \leq q-1} d([n\theta], [0]) = \min_{1 \leq n \leq q-1} \text{CP}(n)$$

o, equivalentemente, si existe algún $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$|q\theta - p| < |k\theta - h| \quad \text{para todo } 1 \leq k \leq q - 1 \text{ y } h \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

DEFINICIÓN 4.2. Un número racional $\frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, $q \geq 1$, $\text{mcd}(p, q) = 1$, y que satisface (4.1), se dice que es una *aproximación óptima de segunda especie* del número irracional θ .

Desde el punto de vista de los sistemas dinámicos esto es básico en el estudio de la *recurrencia*. En palabras de John Milnor [20, p. 234]:

«El estudio de la recurrencia es un tema central en muchas partes de la dinámica: ¿con qué frecuencia y con qué proximidad vuelve una órbita a un entorno de su punto inicial? En el caso de las rotaciones irracionales de un círculo podemos dar una descripción bastante precisa de la respuesta. Esta descripción, que hunde sus raíces en la teoría clásica de números, resulta ser importante no solo en dinámica holomorfa, sino también en mecánica celeste y en otras áreas donde ocurre el problema de los *divisores pequeños*».

⁴Se trata de una quinta disminuida cuya disonancia recuerda ligeramente a un aullido.

Cabría añadir que el asunto de la recurrencia es también central en el estudio de la escala musical pitagórica. En la teoría de números, el problema de encontrar las *aproximaciones óptimas de segunda especie* al que da lugar el estudio de la recurrencia fue completamente resuelto por Lagrange, usando fracciones continuas, en un apéndice al libro *Elementos de Álgebra* de Euler [12].

A continuación enunciamos los resultados sobre fracciones continuas que vamos a necesitar; para más detalles, véanse [5, 17, 30]. Una *fracción continua simple* es una expresión infinita del tipo

$$[a_0; a_1, a_2, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

donde a_0, a_1, a_2, \dots son números naturales con $a_0 \geq 0$ y $a_n \geq 1$ para todo $n \geq 1$. Para dar sentido a la expresión anterior, se considera la fracción finita

$$R_n := [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}$$

y se define

$$[a_0; a_1, a_2, \dots] := \lim_{n \rightarrow \infty} R_n.$$

Se puede demostrar que el límite anterior siempre existe y es finito.

Claramente, cada R_n es un número racional y, por tanto, puede escribirse de la forma $R_n = \frac{p_n}{q_n}$ con $p_n, q_n \in \mathbb{N}$ primos entre sí. La fracción $\frac{p_n}{q_n}$ se llama *convergente de orden n* , y puede calcularse recursivamente, de forma eficiente, usando el siguiente resultado.

LEMA 4.3. *Los convergentes $\frac{p_n}{q_n}$ de la fracción continua $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ satisfacen las fórmulas recursivas⁵*

$$\begin{aligned} p_0 &:= a_0, & p_1 &:= a_0 a_1 + 1, & p_n &:= a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad (n \geq 2), \\ q_0 &:= 1, & q_1 &:= a_1, & q_n &:= a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad (n \geq 2). \end{aligned}$$

Ahora que sabemos cómo calcular los convergentes de una fracción continua, vamos a establecer de forma precisa la correspondencia entre fracciones continuas infinitas y números irracionales.

TEOREMA 4.4 ([30, sección 5.5]). *Una fracción continua simple infinita $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ siempre converge a un número irracional positivo.*

Recíprocamente, todo número irracional positivo admite una expresión única como fracción continua simple infinita.

⁵A menudo resulta conveniente considerar que $p_{-1} := 1$ y $q_{-1} := 0$ constituyen el convergente de orden -1 .

Dado entonces un número irracional $\alpha > 0$, resulta interesante disponer de un algoritmo para obtener su expresión como fracción continua: se empieza calculando la parte entera de α (es decir, el mayor entre todos los enteros menores o iguales que α), que denotaremos como $\lfloor \alpha \rfloor$, y se definen

$$a_0 := \lfloor \alpha \rfloor \quad \text{y} \quad \alpha_0 = \frac{1}{\alpha - a_0},$$

de tal modo que

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_0}, \quad 0 < \alpha_0 < 1.$$

Claramente, $\alpha_0 > 0$ también es un número irracional y podemos iterar el proceso anterior, definiendo de forma recursiva

$$a_n := \lfloor \alpha_{n-1} \rfloor \quad \text{y} \quad \alpha_n = \frac{1}{\alpha_{n-1} - a_n}, \quad n \geq 1.$$

Se cumple entonces que la expresión de α como fracción continua viene dada por

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots].$$

Pues bien, la solución de Lagrange al problema de encontrar las aproximaciones óptimas de segunda especie es la siguiente.

TEOREMA 4.5 ([17, teoremas 16 y 17]). *Sea $\alpha > 0$ un número irracional y sea $\frac{p_n}{q_n}$ el convergente de orden n de α , con $n \geq 1$.⁶ Si $\frac{h}{k}$ es un número racional que satisface $1 \leq k \leq q_{n+1}$, y tal que $(h, k) \neq (p_n, q_n)$ y $(h, k) \neq (p_{n+1}, q_{n+1})$, entonces*

$$|q_n \alpha - p_n| < |k \alpha - h|.$$

El resultado anterior permite establecer que las aproximaciones óptimas de segunda especie de α son exactamente sus convergentes, con la única posible excepción de R_0 . Obtenemos entonces la siguiente consecuencia en teoría musical.

COROLARIO 4.6. *La escala pitagórica EMP(q) es óptima si y solo si $q = q_n \geq 2$, siendo $\frac{p_n}{q_n}$ el convergente de orden n de θ .*

Como los convergentes de $\theta = [0; 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, \dots]$ son

$$\left\{ 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \frac{24}{41}, \frac{31}{53}, \frac{179}{306}, \dots \right\},$$

concluimos que las escalas pitagóricas óptimas son

$$\text{EMP}(2), \text{EMP}(5), \text{EMP}(12), \text{EMP}(41), \text{EMP}(53), \dots$$

⁶El convergente de orden 0 de α , $R_0 = \lfloor \alpha \rfloor$, es una aproximación óptima de segunda especie si y solo si $\alpha - \lfloor \alpha \rfloor < \frac{1}{2}$.

Número de notas	Coma pitagórica (cents)	Quinta del lobo (cents)
2	203.91	498.045
3	294.135	996.09
4	407.82	294.135
5	90.225	792.18
6	588.27	113.685
7	113.685	588.27
8	384.36	1086.31
9	317.595	384.36
10	180.45	882.405
11	521.505	180.45
12	23.46	678.495
13	474.585	1176.54
14	227.37	474.585
⋮	⋮	⋮
40	478.2	223.755
41	19.845	721.8

Cuadro 1: Coma pitagórica y quinta del lobo (medidas en cents) en distintas escalas pitagóricas. En negrita se destacan las escalas óptimas.

El cuadro 1 muestra la coma pitagórica y la quinta del lobo, medidas en cents, en distintas escalas pitagóricas; los cents son las unidades de una escala logarítmica para medir un intervalo, en la que una octava equivale a 1200 cents. Así, un intervalo de frecuencias $[f_1, f_2]$ mide $1200 \cdot \log_2 \left(\frac{f_2}{f_1} \right)$ cents y, por tanto, el intervalo de quinta $[1, \frac{3}{2}]$ mide $1200 \cdot (\log_2(3) - 1) \approx 701.96$ cents.

Esto muestra que la escala pentatónica EMP(5) produce menos disonancia en su cierre (tiene una menor coma pitagórica) que la escala heptatónica EMP(7). De hecho, necesitamos la escala clásica de 12 notas para mejorar el cierre de la escala pentatónica. Las siguientes escalas óptimas son las de 41 y 53 notas. Por ejemplo, R. Bosanquet construyó, a finales del siglo XIX, un armonio generalizado con 53 divisiones por octava (pueden verse imágenes del mismo en [4, sección 6.3] y [13, p. 76]).

5. ESCALAS MUSICALES TEMPERADAS Y EL PROBLEMA DE APROXIMACIÓN ÓPTIMA DE PRIMERA ESPECIE

En la sección previa hemos visto que cualquier escala pitagórica finita EMP(q) contiene un error en su cierre: la coma pitagórica. Otra desventaja de la escala pitagórica es que, al transportar una composición a otra tonalidad como, por ejemplo, para ajustarse a las posibilidades de un cantante o de un instrumento, podríamos necesitar añadir notas nuevas, un proceso complejo o incluso imposible con instrumentos de afinación fija como el piano.

La solución adoptada en la música occidental para resolver este problema consis-

tió en sacrificar la propiedad (P_2) de la afinación pitagórica a cambio de la sencillez en el transporte de la tonalidad. Así, en una *escala musical temperada* de temperamento igual con q notas, las frecuencias de cada nota en la octava $[1, 2)$, ordenadas de menor a mayor, siguen una progresión geométrica de razón $2^{1/q}$. Equivalentemente, usando la notación aditiva, las notas de la escala musical temperada de q notas forman una progresión aritmética de paso $\frac{1}{q}$ en la octava $[0, 1)$. Dichas notas, representadas sobre la circunferencia S^1 , forman claramente los vértices de un polígono regular inscrito de q lados.

DEFINICIÓN 5.1. Sea $q > 1$ un número entero. Se define la *escala musical temperada de q notas*, $EMT(q)$, como

$$EMT(q) := \left\{ [0], \left[\frac{1}{q}\right], \left[\frac{2}{q}\right], \left[\frac{3}{q}\right], \dots, \left[\frac{q-1}{q}\right] \right\}. \tag{5.1}$$

De esta forma, mientras que la escala pitagórica se obtiene iterando la rotación irracional de la circunferencia R_θ , la escala temperada se corresponde con una rotación racional de la circunferencia $R_{p/q}$, con $1 \leq p < q$, p y q números naturales coprimos. El diferente comportamiento dinámico entre ambos tipos de rotación se traduce en las distintas características de cada escala.

Para definir las escalas temperadas óptimas usaremos como criterio el de ser las que mejor aproximen la quinta pitagórica entre todas las escalas con menor o igual número de notas.

DEFINICIÓN 5.2. Dado $q > 1$ un número entero, diremos que $EMT(q)$ es una *escala temperada óptima* si existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, con $\text{mcd}(p, q) = 1$, tal que

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| < \left| \theta - \frac{h}{k} \right| \quad \text{para cualquier } \frac{h}{k} \neq \frac{p}{q} \text{ con } h \in \mathbb{N} \text{ y } 1 \leq k \leq q. \tag{5.2}$$

Surge así de forma natural el problema de encontrar las *aproximaciones óptimas de primera especie* de un número irracional.

DEFINICIÓN 5.3. Un número racional $\frac{p}{q}$, con $p, q \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, $q \geq 1$, $\text{mcd}(p, q) = 1$, y que satisface (5.2), se dice que es una *aproximación óptima de primera especie* del número irracional θ .

En otras palabras, una aproximación óptima de primera especie $\frac{p}{q}$ del número irracional θ es la mejor aproximación a θ entre todos los números racionales con denominador menor o igual que q .

Es bien sabido (véase, por ejemplo, [30, nota 4.30]) que cualquier aproximación óptima de segunda especie del número irracional θ obtenida, como se vio en la sección anterior, a través de los convergentes de la fracción continua de θ , también lo será de primera especie. Se tiene, entonces, la siguiente relación entre las escalas óptimas pitagórica y temperada.

TEOREMA 5.4. Si la *escala pitagórica* $EMP(q)$ es óptima, entonces la *escala temperada* $EMT(q)$ también es óptima.

Sin embargo, la implicación recíproca no es cierta, ya que los convergentes de θ no proporcionan todas las aproximaciones óptimas de primera especie, aunque sí proporcionen todas las aproximaciones óptimas de segunda especie. En concreto, se sabe que las aproximaciones óptimas de primera especie son necesariamente convergentes o fracciones intermedias (véase [17, teorema 15]), es decir: si

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots], \quad a_i \in \mathbb{Z}, \quad a_0 \geq 0, \quad a_i \geq 1 \quad \text{para } i \geq 1,$$

es un irracional positivo, entonces sus aproximaciones óptimas de primera especie se encuentran entre los números racionales

$$\begin{aligned} & [a_0], [a_0; 1], [a_0; 2], \dots, [a_0; a_1 - 1], \\ & [a_0; a_1], [a_0; a_1, 1], [a_0; a_1, 2], \dots, [a_0; a_1, a_2 - 1], \\ & [a_0; a_1, a_2], [a_0; a_1, a_2, 1], [a_0; a_1, a_2, 2], \dots, [a_0; a_1, a_2, a_3 - 1], \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

donde el primer elemento de cada fila es un convergente, y los demás son las llamadas *fracciones intermedias* (también llamadas, a veces, *semiconvergentes*).

La sucesión anterior proporciona los únicos candidatos posibles a aproximaciones óptimas de primera especie, y se puede obtener mediante una fórmula de recurrencia similar a la del lema 4.3. De hecho, no es difícil probar lo siguiente:

TEOREMA 5.5. *Sea $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots] > 0$ un número irracional. Entonces:*

- (i) $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$ es una aproximación óptima de primera especie si y solo si $\alpha - a_0 < \frac{1}{2}$.
- (ii) Las demás aproximaciones óptimas de primera especie de α son, exactamente, los elementos de la sucesión de convergentes y fracciones intermedias cuya distancia a α sea estrictamente menor que la distancia a α de los elementos anteriores.

COROLARIO 5.6. *La escala pitagórica $\text{EMT}(q)$ es óptima si y solo si $q \geq 2$ y $\frac{p}{q}$ es una aproximación óptima de primera especie de θ dada por el teorema 5.5.*

Obtenemos así que la sucesión de aproximaciones óptimas de primera especie de θ es

$$\left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{7}{12}, \frac{17}{29}, \frac{24}{41}, \frac{31}{53}, \dots \right\}.$$

Luego el corolario 5.6 nos indica que entre las escalas temperadas aparecen nuevas escalas óptimas, como las $\text{EMT}(7)$ y $\text{EMT}(29)$, que no aparecían entre las escalas pitagóricas óptimas.

6. COMENTARIOS FINALES

En este artículo hemos considerado que las escalas pitagóricas óptimas son aquellas que satisfacen la condición (4.1). Por supuesto, es posible el uso de otros criterios de optimalidad que conducen a distintas consideraciones.

Por ejemplo, una interesante propiedad de las escalas pitagóricas es el teorema de los tres pasos de Steinhaus [8]:

Si, en una escala pitagórica de q notas, elegimos el único representante x_j de cada nota en el intervalo $[0, 1)$, ordenamos estos representantes, $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{q-1} < 1 = x_q$, y consideramos los distintos pasos entre ellos, $x_{k+1} - x_k$ con $k = 0, 1, \dots, q - 1$, se cumple que solo hay uno, dos o tres pasos distintos.

Así, en la escala pitagórica EMP(7) hay solo dos pasos distintos, que se conocen como *tono* y *semitono*⁷, lo que explica la disposición de las teclas negras entre las blancas del piano.

En [21] se utiliza precisamente, como criterio para definir las escalas pitagóricas, el poseer exactamente dos pasos, y las escalas que cumplen esta propiedad resultan ser aquellas cuyo número de notas q es el denominador de un convergente o de una fracción intermedia de θ , véase [8, proposición 5].

Otro concepto interesante es el de *escala bien formada* [6], cuya relación con la geometría de la circunferencia y la combinatoria de palabras —es decir, el estudio de las propiedades aritméticas y combinatorias de ciertas cadenas de caracteres que aparecen en teoría de grupos, gramáticas formales, etc.— se explica en [8, 10].

Por otro lado, la aproximación a las escalas musicales siguiendo el punto de vista de los sistemas dinámicos abre nuevos caminos de experimentación sonora. Por ejemplo, en [29] se analizan otras aplicaciones de la circunferencia cuya iteración genera nuevas escalas musicales. Si, en lugar de la rotación (2.1), se utiliza la aplicación no lineal

$$T_{\alpha,k} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad [x] \mapsto T_{\alpha,k}([x]) := \left[x + \alpha - \frac{k}{2\pi} \operatorname{sen}(2\pi x) \right],$$

que para $k = 0$ coincide con una rotación, puede sacarse partido del fenómeno de resonancia conocido como las *lenguas de Arnold* [18]: las órbitas periódicas de la rotación $T_{p/q,0}$, correspondientes a los parámetros racionales $(p/q, 0)$, *persisten* para ciertos valores del espacio de parámetros (α, k) con $k > 0$; es decir, para dichos valores la aplicación no lineal $T_{\alpha,k}$ sigue presentando órbitas con el mismo periodo, aunque ahora ya no estén uniformemente distribuidas sobre la circunferencia. Dichas órbitas periódicas pueden ser usadas para construir escalas musicales distribuidas irregularmente en la octava que, lejos de ser una mera curiosidad matemática, han sido usadas e interpretadas en composiciones musicales de vanguardia por Eleri Pound [26, 27].

AGRADECIMIENTOS. La investigación del autor ha sido parcialmente financiada por el Proyecto MTM2017-85054-C2-1-P del Ministerio de Economía, Industria y Competitividad, España, y FEDER. El autor está agradecido a Pablo Amster, Rafael Cachafeiro y Rafael Ortega por una lectura crítica de una versión preliminar de este trabajo. Así mismo, agradece a un informante anónimo su detallada revisión y sus numerosas sugerencias y precisiones, que han contribuido a mejorar notablemente la redacción del artículo.

⁷En EMP(7) el tono mide 203.91 cents y el semitono 90.225 cents por lo que, contrariamente a lo que sugiere su nombre, en la escala pitagórica un semitono no es exactamente la mitad de un tono.

REFERENCIAS

- [1] P. AMSTER, *¡Matemática maestro! Un concierto para números y orquesta*, Siglo XXI Editores, Buenos Aires, 2010.
- [2] J. ARBONÉS Y P. MILRUD, *La armonía es numérica. Música y matemáticas*, El mundo es matemático, RBA, 2012.
- [3] G. ASSAYAG, H. G. FEICHTINGER Y J. F. RODRIGUES (EDITORES), *Mathematics and Music. A Diderot Mathematical Forum*, Springer, 2002.
- [4] D. J. BENSON, *Music: a mathematical offering*, Cambridge Univ. Press, 2007.
- [5] E. B. BURGUER, *Exploring the number jungle. A journey into diophantine analysis*, American Mathematical Society, 2000.
- [6] N. CAREY Y D. CLAMPITT, Aspects of well-formed scales, *Music Theory Spectrum* **11** (1989), 187–206.
- [7] C. CASARES ANTÓN, Arquitectura de inflorescencias y fracciones continuas, *La Gaceta de la RSME* **23** (2020), 65–76.
- [8] M. CASTRILLÓN Y M. DOMÍNGUEZ, Un encuentro entre las matemáticas y la teoría de escalas musicales: Escalas bien formadas, *La Gaceta de la RSME* **16** (2013), 87–106.
- [9] E. CLADER, Why twelve tones? The mathematics of musical tuning, *Math. Intelligencer* **40** (2018), no. 3, 32–36.
- [10] M. DOMÍNGUEZ, *Well-formed scales, non-well-formed words and the Christoffel duality*, Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid, 2015. Disponible en <https://eprints.ucm.es/38773/1/T37590.pdf>
- [11] E. DUNNE Y M. MCCONNELL, Pianos and continued fractions, *Mathematics Magazine* **72** (1999), 104–115.
- [12] L. EULER, *Elements of Algebra*, traducción del francés por John Hewlett, con las notas de M. Bernoulli y un apéndice de M. de Lagrange, reimpresión de la tercera edición de 1822, Cambridge University Press, 2009.
- [13] J. FAUVEL, R. FLOOD Y R. WILSON (EDITORES), *Music and Mathematics. From Pythagoras to Fractals*, Oxford University Press, 2006.
- [14] F. GÓMEZ MARTÍN (EDITOR), Música y matemáticas, divulgamat, http://divulgamat.net/divulgamat15/index.php?option=com_alphacontent§ion=11&category=67&Itemid=67
- [15] R. W. HALL Y K. JOSIĆ, The mathematics of musical instruments, *Amer. Math. Monthly* **108** (2001), 347–357
- [16] B. HASSELBLATT Y A. KATOK, *A first course in Dynamics*, Cambridge University Press, 2003.
- [17] A. YA. KHINCHIN, *Continued Fractions*, The University of Chicago Press, 1964.
- [18] R. DE LA LLAVE Y A. LUQUE, Differentiability at the tip of Arnold tongues for Diophantine rotations: numerical studies and renormalization group explanations, *J. Stat. Phys.* **143** (2011), 1154–1188.

- [19] A. LÓPEZ VILLACAMPA, Aplicaciones de las fracciones continuas, *MATerials MATemàtics*, 2019, art. no. 1, 35 pp., http://mat.uab.cat/matmat_antiga/PDFv2019/v2019n01.pdf
- [20] J. W. MILNOR, *Dynamics in one complex variable*, 3.^a ed., Princeton University Press, 2006.
- [21] J. A. NAVARRO Y M. J. GARMENDIA, Musical scales, *Irish Math. Soc. Bull.* **35** (1995), 24–41.
- [22] J. A. NAVARRO Y M. J. GARMENDIA, Mathematical theory of musical scales, *Extracta Math.* **1** (1996), 369–374.
- [23] I. NIVEN, *Irrational Numbers*, 5.^a ed., Mathematical Association of America, 2005.
- [24] R. ORTEGA RÍOS, *Modelos Matemáticos*, Universidad de Granada, 2013.
- [25] P. PESIC, *Music and the Making of Modern Science*, The MIT Press, 2014.
- [26] E. A. POUND, Non-linear circles and the triple harp: Creating a microtonal harp, *Mathematics and Computation in Music, First International Conference*, 198–203, Springer, 2009.
- [27] E. A. POUND, Chaos as compositional order, *Chaos Theory: Modeling, Simulation And Applications – Selected Papers from the 3rd Chaotic Modeling and Simulation International Conference (Crete, 2010)*, 325–332, World Scientific, 2011.
- [28] M. SCHECHTER, Tempered scales and continued fractions, *Amer. Math. Monthly* **87** (1980), 40–42.
- [29] R. STURMAN, A dynamical systems approach to musical tuning, *Dyn. Syst.* **27** (2012), 1–13.
- [30] J. L. VARONA, *Recorridos por la Teoría de Números*, 2.^a ed., Electolibris, 2019.
- [31] D. WRIGHT, *Mathematics and Music*, American Mathematical Society, 2009.

JOSÉ ÁNGEL CID, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDADE DE VIGO, CAMPUS DE OURENSE, 32004, SPAIN

Correo electrónico: angelcid@uvigo.es