Historia

Sección a cargo de

Luis Español González

La escuela de análisis armónico de Chicago

por

Edgar Labarga Varona

Introducción

Un gran número de fenómenos anómalos en el análisis matemático, relacionados con la continuidad, derivabilidad, integrabilidad, procesos de límites y series de funciones, aparecieron en el siglo XIX a raíz de las investigaciones de J.-B. Joseph Fourier (1768–1830) sobre la propagación del calor[1]. Fourier inauguró el análisis armónico planteando el problema de la representabilidad de una función por una suma infinita de senos y cosenos. El transcurso del análisis en el resto del siglo XIX permaneció ligado a la búsqueda de respuestas a este y a otros problemas relacionados, desde un punto de vista mucho más riguroso que el de Fourier. El nuevo concepto de integral que introdujo Henri L. Lebesgue (1875–1941) en su tesis doctoral [40, 1902] y que perfeccionó años después, dio un nuevo enfoque a los estudios anteriores. Y, así como Vito Volterra (1860–1940) denominó al siglo XIX el siglo de la teoría de las funciones, Felix E. Browder (1927–2016) sugirió que sería igual de apropiado llamar al siglo XX el siglo del análisis funcional. En la primera mitad de siglo se comenzó a trabajar con espacios de funciones y operadores definidos sobre estos. La introducción por Stefan Banach (1892–1945) de los espacios que llevarían su nombre impulsó de manera significativa el análisis matemático y, en particular, la teoría de las series de Fourier.

Antoni S. Zygmund (1900–1992) y Alberto P. Calderón (1920–1998) son dos matemáticos importantes que hay que estudiar para entender los avances que hubo en el análisis armónico y en las ecuaciones en derivadas parciales durante la segunda mitad

[1]Tres son las fechas clave en la obra matemática de Fourier: 1807, presentación de *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides* al *Institut de France*; 1811, participación en un concurso del *Institut* con la memoria *Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides*; y 1822, publicación del libro *Théorie analytique de la chaleur* [24].

del siglo XX. Muchos de sus estudiantes de doctorado se convirtieron posteriormente en figuras referentes en análisis de Fourier y, junto con los dos fundadores, constituyeron la que se conoce comúnmente como «escuela de análisis armónico de Chicago», «escuela de Chicago», «escuela de Zygmund» o «escuela de Calderón-Zygmund». En estas notas se incluye una sucinta revisión de la historia de la escuela. A lo largo del texto se va a utilizar principalmente la primera de las denominaciones, abreviada a veces por la segunda. Hay que advertir también de que, en ocasiones, la «escuela de Calderón-Zygmund» representa tan solo una parte de la «escuela de Zygmund» (ver [16, p. 347]).

Se ha optado por presentar el material de la siguiente manera: en las dos siguientes secciones aparecen las semblanzas de los dos fundadores de la escuela hasta el momento de encontrarse. A continuación, se expone el contexto del departamento de matemáticas de la Universidad de Chicago, lugar de creación de la escuela, en los años en que ambos comenzaron a colaborar allí. Después, se analiza la formación de la escuela y se mencionan a algunos de sus escolares más distinguidos para, finalmente, explorar las conexiones que guarda el desarrollo de la investigación en análisis armónico en España con la escuela de Chicago.

1. Antoni Szczepan Zygmund

Antoni Szczepan Zygmund nació en Varsovia, Polonia[2], en las navidades (26 de diciembre) de 1900 en el seno de una familia de origen campesino; su padre se llamaba Wincenty Zygmund, y era funcionario del estado, su madre Antonina Perkowska Zygmund y sus tres hermanas pequeñas serían Jadwiga, Felicja y Maria. Allí completó sus estudios de enseñanza primaria en 1912 y cursó la educación secundaria o *Gymnasium* hasta 1914, cuando el comienzo de la primera guerra mundial hizo que emigrara junto con su familia a la ciudad de Poltava, actual Ucrania[3]. En 1918, una vez terminado el conflicto, Polonia se convirtió en un país independiente y Zygmund regresó aquel otoño a Varsovia, donde superó la secundaria un año más tarde en el *Gymnasium Kazimierz Kulwieć*, un centro de enseñanza para repatriados.

Decidió entonces estudiar matemáticas en la recién refundada Universidad de Varsovia, porque en esta no existía todavía una enseñanza en astronomía, que era su primera opción; allí recibió clases de profesores célebres como Wacław F. Sierpiński (1882–1969) y Stefan Mazurkiewicz (1888–1945). El primero es ampliamente conocido entre la comunidad matemática por sus resultados en teoría de conjuntos, teoría de números y topología, mientras que el segundo fue su estudiante de doctorado. Ambos, junto con Zygmunt Janiszewski (1888–1920), pueden ser considerados como los impulsores de la escuela polaca de análisis que se creó en Varsovia entre las dos guerras mundiales[4]. Sin embargo, fueron dos las personas que ejercieron una influencia

[2] La situación geopolítica de Polonia era compleja; había desaparecido varias veces entre repartos territoriales de otras potencias y no era considerada como un estado independiente en aquella época.

[3] Al igual que Polonia, las fronteras ucranianas sufrieron constantes cambios y el país como tal no logró la independencia hasta el 24 de agosto de 1991.

[4] La otra parte importante de esta escuela se originó simultáneamente en Lwów (actual Ucrania), con Banach y Hugo D. Steinhaus (1887–1972) como máximos representantes.

Retrato de Zygmund y fotografía del Ayuntamiento de Varsovia *c.* 1900.

más profunda sobre Zygmund en la universidad: Aleksander M. Rajchman (1890–1940) y Stanisław Saks (1897–1942). Rajchman era un joven profesor (ayudante y docente privado) que transmitió a Zygmund el interés por las series trigonométricas, y junto con Saks, compañero de estudios tres años mayor que él, llegaría a publicar varios artículos y escribiría el libro *Funkcje Analityczne* (Funciones analíticas)[5] en 1938. Saks es autor, además, de un extenso tratado sobre integración titulado *Teorji Całki* (Teoría de la integral)[6], 1930, una de sus obras más conocidas.

En 1920, durante la guerra polaco-soviética, Zygmund fue incorporado al noveno regimiento ulano en Dębica, pero no estuvo en el frente de batalla. Dos años más tarde se convirtió en ayudante de la cátedra de Matemáticas de Witold Pogorzelski (1895–1963) en la Universidad Politécnica de Varsovia. En esa etapa de docencia[7], que duraría hasta el año 1929, recibió el título de doctor en 1923, en la Universidad de Varsovia, por una tesis titulada *O metodzie Riemanna w teorii szeregów trygonometrycznych* (Sobre el método de Riemann en la teoría de series trigonométricas)[8]. El director fue Rajchman pero, debido a su juventud, Mazurkiewicz tuvo que figurar formalmente como codirector. El 12 de febrero de 1925, Zygmund contrajo matrimonio con Irena Parnowska, a quien conocía desde su etapa como estudiante en la Universidad de Varsovia. En el curso académico 1929–30 disfrutó de una beca Roc-

[5] *Monografie Matematyczne* **10**, Warszawa-Lwów-Wilno. Una segunda edición se publicó en 1948 y una tercera en 1959. Edward J. Scott tradujo por primera vez el texto al inglés en 1952 y esta traducción tuvo una segunda edición en 1965. Marina Lahy tradujo el libro al francés en 1970. Los autores recibieron un premio de la Academia polaca de Artes y Ciencias (*Polska Akademia Umiejętności*), Cracovia, en 1939.

[6] Una segunda edición se publicó en francés (*Théorie de l'Intégrale*) en *Monografie Matematyczne* **2**, Varsovia, 1933. Una tercera edición revisada, traducida al inglés por Laurence C. Young, se publicó (*Theory of the Integral*) en *Monografie Matematyczne* **7** en 1937.

[7] En 1926, recibió la habilitación (*venia legendi*) de docente privado en la Universidad de Varsovia.

[8] Memoria que presentó en las comunicaciones «Sur la théorie riemannienne des séries trigonométriques», *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris)* **177** (1923), pp. 521–523; Errata, *ibid.*, p. 804, y «Sur les séries trigonométriques», *ibid.*, pp. 576–579; Errata, *ibid.*, p. 804.

Zygmund y Marcinkiewicz en la celebración (Vilna, 4 de marzo de 1936) del doctorado *honoris causa* del químico Kazimierz Sławiński (1871–1941).

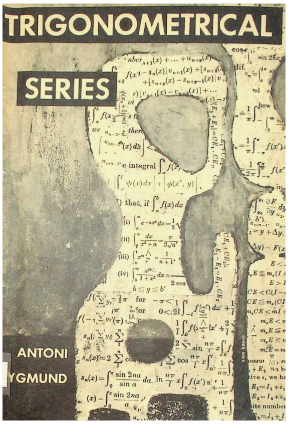
kefeller que le permitió investigar durante un año en Inglaterra, primero con Godfrey H. Hardy (1877–1947) en Oxford y más tarde con John E. Littlewood (1885–1977) en Cambridge. Allí entabló amistad con Raymond E. A. C. Paley (1907–1933), uno de los estudiantes más aventajados de Littlewood, quien se convertiría en un importante colaborador suyo a partir de entonces y hasta su temprana muerte. Esta estancia con matemáticos de tal envergadura influyó considerablemente en el curso posterior de la investigación de Zygmund.

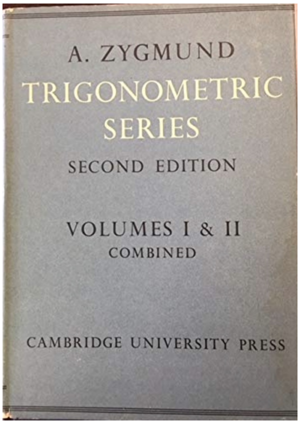
Cuando regresó de Inglaterra obtuvo una plaza de catedrático[9] en la Universidad Stefan Batory de Vilna, que en aquel momento era territorio polaco[10]. La década siguiente sería un periodo de producción científica muy fructífero para Zygmund. En otoño de 1930, conoció a Józef Marcinkiewicz (1910–1940)[11], un joven estudiante de primer curso con quien comenzaría una colaboración que llevaría a Marcinkiewicz a doctorarse en 1935, bajo la supervisión de Zygmund, con una tesis titulada *Wielomiany interpolacyjne funkcyj bezwzględnie ciągłych* (Interpolación trigonométrica de funciones absolutamente continuas). Sus trabajos, en especial los publicados desde 1935 hasta 1940, serían fundamentales para el desarrollo de los métodos de variable real que posteriormente introducirían Zygmund y Calderón en la Universidad de Chicago a mediados del siglo XX en el estudio de integrales singulares. En 1935, Zygmund publicó la primera edición de la que probablemente sea su obra más importante, *Trigonometrical series*. El libro significó una referencia obligada en la teoría de series trigonométricas porque hasta aquel momento no había ninguna

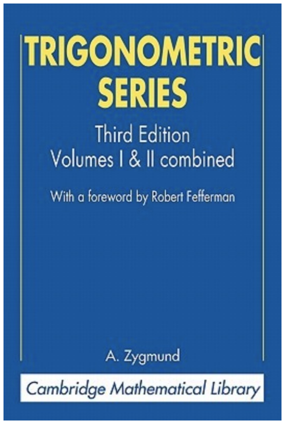
[9] Calderón apunta en [36, p. xiv] que fue como *Professor* y en [16, p. 345], en cambio, se dice que trabajó como *Associate Professor of mathematics*.

[10] En la segunda guerra mundial Vilna volvió a convertirse en la capital de Lituania.

[11] Una referencia completa de la vida y obra de Marcinkiewicz es [43].







Portadas de las tres ediciones del libro *Trigonometric series* (1935, 1959 y 2002). La primera edición se titulaba *Trigonometrical series* y la imagen es de un ejemplar del Fondo Mateo Garnica de la Biblioteca de la Universidad de La Rioja. La segunda edición está dedicada a la memoria de su profesor Rajchman y de su alumno Marcinkiewicz.

obra en la literatura que presentara esa teoría de forma sistemática y que reflejara el estado de la cuestión con una estructura definida (ver [2]). En 1959, Zygmund actualizó significativamente esta obra, que pasó a tener dos volúmenes y a denominarse *Trigonometric series*. Esta segunda edición es considerablemente más completa que la anterior y contiene la mayoría de los resultados más importantes sobre series trigonométricas que se habían obtenido hasta entonces. La siguiente anécdota[12] entre Zygmund y Littlewood refleja la admiración que la comunidad matemática tenía (y tiene) hacia esta obra ([16, p. 347]; ver también [61] y [37]):

> La elaboración de la segunda edición de su libro supuso un tremendo trabajo para Zygmund. Llegó a reconocer a Littlewood que su preparación le había costado alrededor de treinta artículos de investigación. Littlewood le respondió que el libro representaba más del doble de esos artículos y que muchas generaciones de matemáticos le estarían agradecidas. De hecho, Littlewood denominaba al libro de Zygmund «la Biblia».

La última reedición[13] del libro [64] se publicó en 2002 y contiene algunas correcciones y un prólogo del matemático Robert Fefferman.

En Vilna se vivía un ambiente sociopolítico tenso porque la ciudad había sido entregada a Polonia en 1922 sin la aprobación de Lituania. En la universidad se

[12]Todas las traducciones se han llevado a cabo de forma libre. Los textos originales se han omitido por motivos de espacio.

[13]Zygmund siempre tuvo en mente escribir una nueva edición incorporando los nuevos resultados obtenidos en la teoría, pero nunca llegó a hacerlo. En la nota de la reimpresión de 1977 (ver [64, p. xiii]) explica que no se incluyó el teorema de Carleson-Hunt sobre la convergencia en casi todo punto de la serie de Fourier de una función en $L^p(\mathbb{T})$, $p > 1$, y se limita a citar los artículos pertinentes.

respiraba un antisemitismo, favorecido por las autoridades académicas (ver [64, Foreword, p. 2]), al que Zygmund siempre se opuso y que lo llevó a ser separado de su puesto docente en 1931. Algunos de sus compañeros matemáticos como Lebesgue, Hardy o Littlewood protestaron y, entonces, Zygmund fue readmitido. Este tipo de comportamiento refleja la calidad personal de Zygmund.

En 1939 fue llamado a filas como oficial de reserva en el inicio de la segunda guerra mundial, pero la rápida derrota del ejército polaco impidió, afortunadamente, su entrada en combate. Regresó a Vilna, que había sido entregada a Lituania el 28 de octubre de 1939 y, en 1940, decidió irse a los Estados Unidos junto con su mujer y su hijo, vía Suecia y con la ayuda de profesores como Jacob Tamarkin (1888–1945), Norbert Wiener (1894–1964) y Jerzy Neyman (1884–1981), escapando de las atrocidades que se cometían en Europa. La mayoría de sus principales colaboradores y amigos fueron víctimas de la guerra: la Gestapo asesinó a Rajchman y a Saks en 1940 y en 1942, respectivamente; Marcinkiewicz fue capturado como prisionero de guerra por el ejército rojo en Lwów y murió en una prisión de Starobilsk (masacre de Katyn), cerca de Járkov; por otra parte, Paley había muerto en 1933 en un trágico accidente de esquí en Canadá. Con total certeza, la guerra supuso una de las situaciones más difíciles en la vida de Zygmund. Además, emigró a los Estados Unidos en un momento en el que había escasez de ofertas de trabajo. Sin embargo, el prestigio de Zygmund entre la comunidad matemática hizo que pudiera conseguir puestos en diferentes universidades desde 1940 hasta 1947: *Visiting Professorship* en el *Massachusetts Institute of Technology* (MIT) (1939/1940), *Assistant Professor* en el *Mount Holyoke College* (1940–1942 y 1943–1944/1945), *Leave of absence* en la Universidad de Michigan (1942–1943) y *Professor* en la Universidad de Pennsylvania (1945–1947). En 1947 aceptó una oferta de Marshall H. Stone para unirse al Departamento de Matemáticas de la Universidad de Chicago.

2. Alberto Pedro Calderón

Alberto Pedro Calderón nació en Mendoza, Argentina, el 14 de septiembre de 1920. Su padre, médico de ascendencia española, le ejercitaba desde la infancia en el cálculo mental y acostumbraba a escuchar obras de música clásica junto con su hermana; esas prácticas seguramente favorecieron la inclinación de Calderón hacia las matemáticas y la música. Por otro lado, su facilidad para reparar todo tipo de artilugios hizo que su padre se lo imaginase como futuro ingeniero y que por ello, fallecida su madre, le enviase, con doce años de edad, a cursar la secundaria al internado suizo Montana Knabeninstitut con la intención de que recalara más tarde en la Eidgenössische Technische Hochschule (ETH) de Zürich, la escuela de ingeniería más prestigiosa del mundo entonces. Calderón narra cómo su profesor de matemáticas en el internado, el profesor Save Bercovici, le introdujo a la resolución de problemas y cómo las matemáticas desplazaron a la mecánica como su principal interés [8, págs. 7 y 8]:

> Habiendo yo recién ingresado al ciclo secundario, tenía entonces un poco más de doce años de edad, cometí, en cierta oportunidad, una travesura en presencia

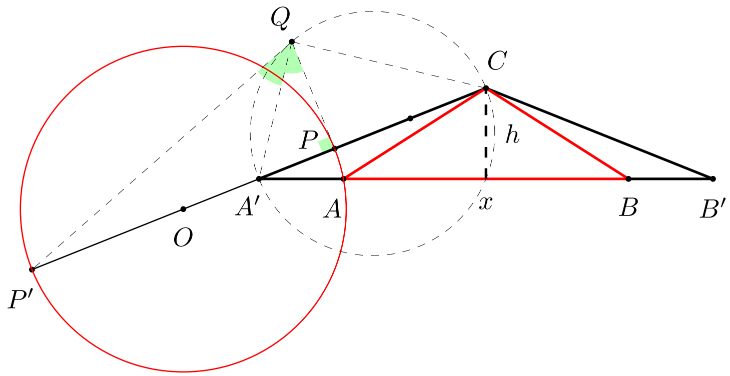
Retrato de Calderón y fotografía de *la Alameda* de Mendoza (Argentina).

> de mi profesor de matemática. Este se acercó y me anunció que sería sometido a una medida disciplinaria por razón de mi conducta. Luego se alejó, pero a poco volvió sobre sus pasos y acercándose nuevamente dijo: «Oye, te voy a dar un problema de geometría. Si eres capaz de resolverlo tu conducta será perdonada.»
>
> El problema era el siguiente: construir con regla y compás un triángulo isósceles del que se conoce la altura y la suma de su base y de uno de los lados restantes. Tras no poco esfuerzo, pude reducir el problema a lo siguiente: Si ABC es el triángulo buscado y AB es su base, prolonguemos la base en ambas direcciones y tomemos sobre su prolongación, y a ambos lados de la misma, los puntos A' y B' respectivamente de modo que $A'A = B'B = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BC$.
>
> Evidentemente el triángulo $A'B'C$ es también isósceles, su altura es conocida y su base es igual a la suma conocida, y por tanto es fácilmente construible. El problema queda entonces resuelto si se determina el punto A del segmento $A'B'$. Una propiedad de este punto es que su distancia a C es el doble a su distancia a A'. Pensé entonces que el lugar geométrico de los puntos con esta propiedad podría ser una circunferencia, y tras experimentar gráficamente llegué a la certidumbre de que lo era, pero no pude demostrarlo. Solo hasta aquí pude llegar, y al mostrarle a mi profesor lo que había hecho, éste confirmó mi certidumbre sobre ese lugar geométrico y perdonó mi travesura.

Efectivamente, como ya conocían los matemáticos griegos, el lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a dos puntos están en una proporción fija dada es siempre una circunferencia (ver, por ejemplo, [48, p. 143]). Una forma de terminar el problema es la siguiente (figura adjunta): construyamos el punto P sobre el segmento $A'C$ de modo que $|PC| = 2|PA'|$. Tracemos la circunferencia de diámetro $A'C$ y hallemos el punto Q intersección de esta con la recta perpendicular a $A'C$ por P. La recta tangente a la circunferencia por Q cortará a la recta $A'C$ en P'. Por el teorema de la bisectriz (interior y exterior) aplicado al triángulo PQP' se tiene que

$$\frac{P'C}{P'A'} = -\frac{PC}{PA'},$$

es decir, que los puntos C, P, A' y P' forman una cuaterna armónica. Finalmente, el punto A buscado será la intersección del segmento $A'B'$ con la circunferencia (de



Construcción con regla y compás del problema planteado a Calderón.

Apolonio) de diámetro PP' (coloreada en rojo). Por simetría, como indica Calderón, se obtiene B. La relación $|AC| = 2|A'A|$ se cumple por el teorema de la bisectriz aplicado al triángulo $A'AC$ (AP es la bisectriz del ángulo en A, porque C es conjugado armónico de A' respecto de P y P').

Desafortunadamente el plan de su padre no prosperó porque su familia se quedó sin dinero y Calderón tuvo que regresar a su Mendoza natal en 1934 para finalizar sus estudios secundarios en el Colegio Nacional Agustín Álvarez. En aquel momento quería estudiar matemáticas[14]. Aconsejado por su padre, se matriculó en la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires para cursar ingeniería civil[15]. Allí recibió tres cursos de cálculo infinitesimal, el último impartido por Julio Rey Pastor (1888–1962), y asistió también a las clases para alumnos aventajados que este daba. Rey Pastor le presentó a Luis Santaló (1911–2001), a Manuel Balanzat (1912–1994) y a Alberto González Domínguez (1904–1982); con este último entablaría una amistad de por vida. En 1947, Calderón se graduó como ingeniero civil y comenzó a trabajar en el laboratorio de investigaciones, división geofísica, de YPF (Yacimientos Petrolíferos Fiscales), la empresa pública petrolera de la República Argentina. El trato poco amable recibido lo llevó a abandonar ese trabajo en 1948. Alberto González Domínguez se enteró de lo sucedido y le propuso ser ayudante de su cátedra en la Facultad, lo que Calderón aceptó.

[14] Calderón conocía el Boletín Matemático Argentino desde la secundaria y a su fundador y editor Bernardo Baidaff desde su llegada a Buenos Aires. Este le ofreció acceso libre a su biblioteca.

[15] Este centro era conocido como «Facultad de Ingeniería» porque sus carreras con más alumnos y prestigio social eran las ingenierías y arquitectura; ingeniería civil era la carrera en la que más matemáticas se cursaban. Hacia mediados del siglo, ingeniería y arquitectura formaron centros separados y la facultad continuó con los estudios de ciencias, llamándose Facultad de Ciencias Exactas y Naturales como hoy en día (ver [21]).

3. El Departamento de Matemáticas de la Universidad de Chicago y la Stone Age

La Universidad de Chicago inició su actividad oficialmente el otoño de 1892 en el barrio de *Hyde Park*, junto al Lago Michigan. El primer rector, William R. Harper (1856–1906), había convencido previamente a Eliakim H. Moore (1862–1932)[16] para que abandonara su puesto como *Associate Professor* en la Universidad Northwestern y se convirtiera en *Head Professor* del Departamento de Matemáticas. Como hombres de confianza, Moore contó con los matemáticos alemanes Oskar Bolza (1857–1942) y Heinrich Maschke (1853–1908). Ellos tres se encargaron de crear un ambiente idóneo que convirtió al Departamento de Matemáticas de la Universidad de Chicago en el más importante de América en el periodo comprendido entre 1892 y 1908. Chicago encabezó la lista de universidades estadounidenses por el número de tesis leídas en matemáticas (lejos quedaban sus inmediatas perseguidoras: Cornell, Harvard y John Hopkins) y muchos de sus doctores terminaron siendo investigadores principales en las facultades de matemáticas de las universidades más importantes de Estados Unidos. Citemos, entre los más destacados, a Leonard E. Dickson (PhD 1896), que haría importantes investigaciones en álgebra y teoría de números; Gilbert A. Bliss (PhD 1900), especialista en el cálculo de variaciones; Oswald Veblen (PhD 1903), encargado posteriormente de administrar el Institute for Advanced Study de Princeton; Robert L. Moore (PhD 1905), topólogo en Texas; George D. Birkhoff (PhD 1907), quien resolvería el último problema geométrico de Poincaré en 1913; Theophil H. Hildebrandt (PhD 1910), director del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Michigan.

En 1908 murió Maschke y, dos años más tarde, Bolza decidió regresar a Alemania. La nueva formación del departamento se encarnó en Moore, Dickson, Bliss y el geómetra Ernest J. Wilczynski (PhD 1897, Berlín). En 1927, Bliss sucedió a Moore como director y, de la mano de Dickson, lideró el departamento hasta 1941. Los doctorandos en estas dos etapas no llegaron a alcanzar la brillantez del primer grupo, pero cabe destacar a algunos de ellos, como A. Adrian Albert (PhD 1928), Edward J. McShane (PhD 1930) y Leon Alaoglu (PhD 1938).

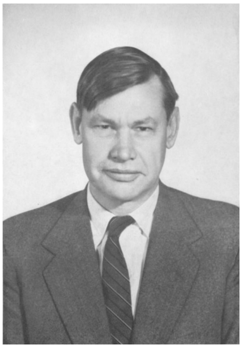
Ernest P. Lane relevó a Bliss como director del departamento durante los primeros años de la segunda guerra mundial (1941). Este fue un periodo gris para el departamento, que se vio desplazado del edificio Eckhart Hall a una de las torres de Harper Library por el proyecto Manhattan[17]. La única contratación nueva que se hizo fue la del profesor Irving Kaplansky (1917–2006) en 1945.

Tras la segunda guerra mundial, el rector Robert M. Hutchins (1899–1977) quiso revitalizar el departamento tomando como modelo al Departamento de Física, que

[16]PhD por la Universidad de Yale bajo la dirección de Hubert A. Newton (1830–1896) con una tesis titulada *Extensions of Certain Theorems of Clifford and Cayley in the Geometry of n Dimensions*, 1985.

[17]Este proyecto, de investigación en física atómica, estaba ligado al Departamento de Física de la Universidad de Chicago y trajo consigo la contratación de los físicos Enrico Fermi (1901–1954) y James Franck (1882–1964) y del químico Harold C. Urey (1893–1981). En 1942 el equipo de Fermi hizo funcionar *Chicago Pile-1*, el primer reactor nuclear de la historia.

Edificio Eckhart Hall, que alberga el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Chicago.



M. H. Stone, conocido por sus aportaciones a la teoría espectral de operadores autoadjuntos no acotados en espacios de Hilbert y por el teorema (de Stone-Weierstrass) que generaliza el clásico teorema de Weierstrass de aproximación uniforme de funciones continuas por polinomios.

tanto éxito había tenido. Tras varias entrevistas en 1945, ofreció la plaza de *Distinguished Service Professorship* al matemático Marshall H. Stone (1903–1989), que a la sazón se encontraba trabajando como catedrático en Harvard. Stone dudó durante un año para finalmente aceptar. Sus dos principales motivaciones fueron, por una parte, la oportunidad de hacer resurgir, prácticamente desde cero, un departamento histórico como era el de matemáticas de Chicago y, por otra, la posibilidad de revisar y modificar los planes de estudios en matemáticas. Pero Stone, desconfiando de las promesas de la administración, pidió ser nombrado también director del departamento, para así poder confrontar al equipo rectoral en caso de que no se cumpliese lo acordado inicialmente. Esta propuesta de Stone suscitó rechazo entre los miembros del departamento, que ya tenía un director (E. P. Lane). Finalmente, todo se resolvió de buenas maneras y Stone pasó a ser nombrado nuevo director del departamento en 1946.

El departamento experimentó un enorme florecimiento en el periodo vivido bajo su dirección y, efectivamente, resurgió como uno de los departamentos de matemáticas más prestigiosos del mundo. Esto se debió, en gran medida, a la incorporación de matemáticos muy importantes como *Professors*. El primero en llegar fue André A. Weil (notable representante del grupo Bourbaki) y, después, L. Saunders Mac Lane (desde Harvard), Antoni S. Zygmund (desde Pennsylvania) y Shiing-Shen Chern (matemático que se convertiría en líder mundial en geometría diferencial); además, como *Assistant Professors* llegaron a figurar Paul R. Halmos, Irving E. Segal y Edwin H. Spanier. El departamento volvió a ubicarse en Eckhart Hall.

En [56], el propio Stone reconoce que las negociaciones con la administración de la universidad con respecto a las contrataciones siempre eran tediosas y que, en ocasiones, incluso no pudieron llevarse a cabo (*stormy period*). Reproducimos su experiencia personal con las dos primeras:

> La primera sugerencia que propuse a la administración fue el nombramiento de Hassler Whitney. El segundo al mando del Sr. Hutchins la rechazó de inmediato, y llevó algo de tiempo persuadir a la administración para que hiciera la oferta de trabajo al profesor Whitney. Cuando se hizo, fue el propio profesor quien la rechazó, y permaneció en Harvard por un corto periodo de tiempo hasta que se trasladó al Institute for Advanced Study.
>
> El siguiente profesor en el que pensé fue André Weil. La organización se mostró en un principio reticente porque conocían su polémica personalidad.
>
> Finalmente decidieron aceptar, pero hicieron una oferta reduciendo considerablemente el sueldo que yo había propuesto. Esto me obligó a avisar al profesor Weil, que en aquel momento se encontraba en Brasil, de que la oferta no era la misma. Cuando la rechazó, llevé el asunto hasta las últimas consecuencias. Tuve que acudir con fiebre alta a una reunión con Mr. Hutchins a las 8 de la mañana para discutir sobre la contratación. Mi esfuerzo obtuvo como recompensa la promesa de volver a hacer la oferta en los términos iniciales. El visto bueno del profesor Weil fue un acontecimiento importante para la Universidad de Chicago y en la historia de las matemáticas en América.

Los años de dirección de Stone forman la denominada comúnmente *Stone Age* (ver [5]), un juego de palabras en el que intervienen el apellido y la personalidad del director.

En 1952, cansado de las constantes trabas administrativas, Stone dejó de ser el director del departamento y fue reemplazado por Mac Lane hasta 1958. A partir de ese año se sucedió una serie de marchas de profesores que definitivamente concluyó la *Stone Age*.

4. La escuela de análisis armónico de Chicago

En los años posteriores a la segunda guerra mundial, el Departamento de Estado de los Estados Unidos auspició un programa para enviar profesores de matemáticas a Latinoamérica y, dentro de él, Stone visitó la Universidad de Buenos Aires, donde conoció personalmente a varios de los matemáticos argentinos que se encontraban allí. Les sugirió que invitaran a Zygmund (dentro del programa de ayudas *Fulbright*) para que impartiera un curso de dos meses sobre la teoría de las series de Fourier. A su llegada a Buenos Aires en 1948, Zygmund ocupó la cátedra de Alberto González Domínguez por meros formalismos de la universidad, y Calderón se convirtió automáticamente en su ayudante. En su discurso de investidura de doctor *honoris causa* por la Universidad Autónoma de Madrid en 1997 [9], Calderón explica cómo entabló relación con Zygmund[18]:

> Durante su visita Zygmund dictó un curso sobre la teoría de las series de Fourier al que concurrí asiduamente. Yo había leído parte de la primera edición de su libro y, entre otros, había estudiado el teorema de Marcel Riesz sobre la clase de las transformadas de Hilbert de funciones en L_p. Yo entendía que este teorema era considerado ser muy importante y por esta razón, como acostumbraba, intenté demostrarlo yo mismo para pulsar su dificultad y entenderlo mejor. Tras varios intentos infructuosos decidí estudiar la demostración del libro. Habiendo comenzado a leerla, me pareció saber cómo continuaría y, efectivamente, pude completarla. Cuando el Profesor Zygmund expuso el teorema de Riesz en su curso, la demostración que dio me pareció ser bastante más complicada que la de su libro. Al terminar la clase me acerqué y le pregunté por qué no había dado la demostración de su libro, que me parecía más sencilla. Esto le sorprendió y tras persuadirme de que efectivamente había dado la demostración del libro, me preguntó, a su vez, cómo era la que yo había creído ser esa demostración. Tras explicársela me instó a que la redactara y enviara a publicar en los *Proceedings de la American Mathematical Society*, prometiéndome apoyar su aceptación[19].

Zygmund distinguió rápidamente el potencial matemático del joven estudiante y su estancia en Argentina originó una colaboración inmediata que produjo dos artículos conjuntos[20]. Cuando finalizó el curso, le sugirió que solicitase una beca de la Fundación Rockefeller para trasladarse con él a la Universidad de Chicago. Conseguida la beca y hecho el traslado, la adaptación de Calderón a esta institución no fue sencilla, tal vez porque se sintió abrumado ante la importante cantidad de eminentes matemáticos allí, hasta el punto de querer volver a Argentina. De nuevo Zygmund intervino y le convenció de permanecer en Chicago.

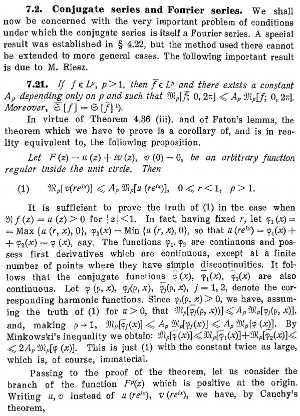
En 1950, Calderón se doctoró bajo la supervisión de Zygmund, con la inestimable ayuda burocrática de Stone[21]. Su tesis estaba formada por un compendio de tres

[18] El desarrollo de los acontecimientos es diferente en el recuerdo del matemático ucranio-argentino Mischa Cotlar (1912–2007): los participantes al curso tenían asignada una parte del libro *Trigonometrical series* de Zygmund que expondrían al resto. Calderón presentó una demostración del teorema de Marcel Riesz sobre la acotación de la transformada de Hilbert en L^p y la mayor parte de la audiencia quedó satisfecha con la exposición, no así Zygmund, quien anunció a todos que esa no era la demostración de su libro. Concluída la charla, Calderón confesó a Zygmund que comenzó a leer la prueba del libro y que creyó ser capaz de continuar por sí mismo, así que nunca pasó de página para leer el resto. Esta era una peculiaridad de Calderón a la hora de estudiar, intentar resolver el problema antes de indagar en los avances que otros habían hecho.

[19] Fue el artículo [6].

[20] A. P. Calderón, A. González Domínguez y A. Zygmund, Nota sobre los valores límites de funciones analíticas, *Rev. Un. Mat. Argentina* **14** (1949/1950), pp. 16–19; A. P. Calderón y A. Zygmund, Note on the boundary values of functions of several complex variables, pp. 145–165, en *Contributions to Fourier analysis* (A. Zygmund, W. Transue, M. Morse, A. P. Calderón y S. Bochner, eds.), Ann. of Math. Stud., 25, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1950.

[21] La beca Rockefeller que obtuvo Calderón era para trabajar con Zygmund, no predoctoral. Sin



7.2. Conjugate series and Fourier series. We shall now be concerned with the very important problem of conditions under which the conjugate series is itself a Fourier series. A special result was established in § 4.22, but the method used there cannot be extended to more general cases. The following important result is due to M. Riesz.

7.21. *If* $f \in L^p$, $p > 1$, *then* $\bar{f} \in L^p$ *and there exists a constant* A_p *depending only on p and such that* $\mathfrak{M}_p[\bar{f}; 0, 2\pi] \leqslant A_p \mathfrak{M}_p[f; 0, 2\pi]$. *Moreover,* $\bar{\mathfrak{S}}[f] = \mathfrak{S}[\bar{f}]$ [1].

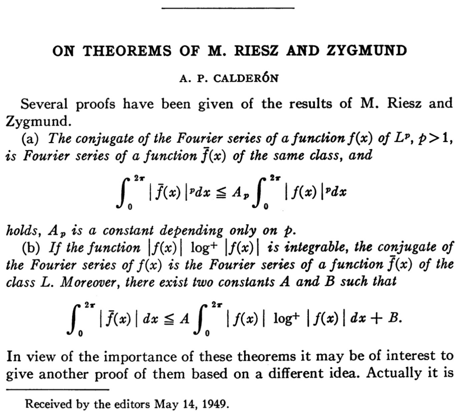
In virtue of Theorem 4.36 (iii), and of Fatou's lemma, the theorem which we have to prove is a corollary of, and is in reality equivalent to, the following proposition.

Let $F(z) = u(z) + iv(z)$, $v(0) = 0$, *be an arbitrary function regular inside the unit circle. Then*

$$(1) \qquad \mathfrak{M}_p[v(re^{ix})] \leqslant A_p \mathfrak{M}_p[u(re^{ix})], \quad 0 \leqslant r < 1, \quad p > 1.$$

It is sufficient to prove the truth of (1) in the case when $\Re f(z) = u(z) > 0$ for $|z| < 1$. In fact, having fixed r, let $\varphi_1(x) = \mathrm{Max}\{u(r,x), 0\}$, $\varphi_2(x) = \mathrm{Min}\{u(r,x), 0\}$, so that $u(re^{ix}) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = \varphi(x)$, say. The functions φ_1, φ_2 are continuous and possess first derivatives which are continuous, except at a finite number of points where they have simple discontinuities. It follows that the conjugate functions $\bar{\varphi}(x)$, $\bar{\varphi}_1(x)$, $\bar{\varphi}_2(x)$ are also continuous. Let $\varphi(\rho, x)$, $\varphi_j(\rho, x)$, $\bar{\varphi}_j(\rho, x)$, $j = 1, 2$, denote the corresponding harmonic functions. Since $\varphi_j(\rho, x) > 0$, we have, assuming the truth of (1) for $u > 0$, that $\mathfrak{M}_p[\bar{\varphi}_j(\rho, x))] \leqslant A_p \mathfrak{M}_p[\varphi_j(\rho, x)]$, and, making $\rho \to 1$, $\mathfrak{M}_p[\bar{\varphi}_j(x)] \leqslant A_p \mathfrak{M}_p[\varphi_j(x)] \leqslant A_p \mathfrak{M}_p[\varphi(x)]$. By Minkowski's inequality we obtain: $\mathfrak{M}_p[\bar{\varphi}(x)] \leqslant \mathfrak{M}_p[\bar{\varphi}_1(x)] + \mathfrak{M}_p[\bar{\varphi}_2(x)] \leqslant 2A_p \mathfrak{M}_p[\varphi(x)]$. This is just (1) with the constant twice as large, which is, of course, immaterial.

Passing to the proof of the theorem, let us consider the branch of the function $F^p(z)$ which is positive at the origin. Writing u, v instead of $u(re^{ix})$, $v(re^{ix})$, we have, by Canchy's theorem,



ON THEOREMS OF M. RIESZ AND ZYGMUND

A. P. CALDERÓN

Several proofs have been given of the results of M. Riesz and Zygmund.

(a) *The conjugate of the Fourier series of a function* $f(x)$ *of* L^p, $p > 1$, *is Fourier series of a function* $\bar{f}(x)$ *of the same class, and*

$$\int_0^{2\pi} |\bar{f}(x)|^p dx \leqq A_p \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx$$

holds, A_p *is a constant depending only on* p.

(b) *If the function* $|f(x)| \log^+ |f(x)|$ *is integrable, the conjugate of the Fourier series of* $f(x)$ *is the Fourier series of a function* $\bar{f}(x)$ *of the class L. Moreover, there exist two constants A and B such that*

$$\int_0^{2\pi} |\bar{f}(x)|\, dx \leqq A \int_0^{2\pi} |f(x)| \log^+ |f(x)|\, dx + B.$$

In view of the importance of these theorems it may be of interest to give another proof of them based on a different idea. Actually it is

Received by the editors May 14, 1949.

A la izquierda, la página 147 de la primera edición, *Trigonometrical series*, de [64] donde aparece, (7.21), el teorema de Marcel Riesz (1886–1969) del año 1928 sobre la acotación de la transformada de Hilbert (o función conjugada) en L^p, $p > 1$. A la derecha, la primera página de [6] donde Calderón presenta una prueba más elegante y directa del mismo resultado.

Calderón y Zygmund en el seminario de análisis de Fourier de la Universidad de Chicago (posiblemente a finales de los años 70) que después llevaría su nombre. El seminario se celebraba cada lunes a las 3:45 p.m. en el aula 308 de Eckhart Hall, justo después de la hora del té, que tenía lugar a las 3 de la tarde. Consistía de una hora de exposición y otra, de carácter más informal, dedicada a problemas abiertos y debates relacionados con la charla.

artículos sobre análisis armónico y teoría ergódica: *I. On the Ergodic Theorems, II. On the Behavior of Harmonic Functions at the Boundary, III. On the Theorem of Marcinkiewicz and Zygmund.* Unos años después también se doctoraron Elias

embargo, la flexibilidad burocrática de la Universidad de Chicago permitió a Calderón obtener el título de doctor.

Stein (1931–2018) y Weiss (1928–2021), dos de los estudiantes más destacados de la escuela de análisis armónico de Chicago.

M. Stein (*Linear Operators on L^p Spaces*, 1955) y Guido L. Weiss[22] (*On Certain Classes of Function Spaces and on the Interpolation of Sublinear Operators*, 1956) y, junto con Zygmund y Calderón, formaron la columna vertebral de la escuela de análisis armónico durante los años que permanecieron en Chicago. A su marcha y tras trabajar en el MIT, Stein formó su propia escuela en la Universidad de Princeton en 1963 con espectaculares resultados y Weiss creó el análogo en la Universidad de Washington en St. Louis en 1961/63 después de haber sido *Assistant Professor* (1956) y *Associate Professor* (1959) en la Universidad de DePaul, *Visiting Professor* en la Universidad de Buenos Aires (1960), y *National Science Foundation Postdoctoral Fellow* en el Institut Henri Poincaré (Sorbonne) de París (1960) [38, p. 10].

Estos no fueron los únicos estudiantes de doctorado de Calderón y de Zygmund que pasaron a conformar parte de la escuela. Las listas completas son muy nutridas como para incluirlas aquí (ver [16] y la página web `https://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu/` de *Mathematics Genealogy Project*). Zygmund supervisó un total de cuarenta y una tesis doctorales, treinta y ocho de ellas en América (treinta y siete en Chicago), desde la de Nathan Fine (Universidad de Pennsylvania, 1946) hasta la de Akihito Uchiyama (Universidad de Chicago, 1983), y Calderón veintisiete, desde la de Irwin Bernstein (MIT, 1959) hasta la de Marta Urciuolo (Universidad de Buenos Aires, 1985). La tesis de Cora Sadosky (Universidad de Chicago, 1965) fue coodirigida por ambos.

La primera etapa investigadora de Zygmund se identifica con sus trabajos sobre series de Fourier y series trigonométricas en el círculo unidad y tuvo lugar desde la presentación de su tesis doctoral en 1923 hasta mediados de los años treinta del siglo pasado. En ese momento pasó a interesarse por problemas de diferenciación de integrales en $\mathbb{R}^n$ y progresivamente dedicó su investigación a explorar los problemas más importantes del análisis armónico en dimensiones superiores. Antes incluso de conocer a Calderón, estaba convencido de que el futuro del análisis pasaba por estudiar los problemas fundamentales en varias dimensiones (lo que se conoce como el programa de Zygmund). Uno de los resultados que se deseaba generalizar, y que

[22]Durante el proceso de revisión de estas notas se produjo el fallecimiento del profesor Weiss.

estaba íntimamente ligado a la convergencia en norma de las series de Fourier, era el teorema de Marcel Riesz [50] del que se ha hablado antes sobre la acotación de la función conjugada en los espacios $L^p(\mathbb{T})$, $p > 1$. Riesz también había obtenido la acotación en $L^p(\mathbb{R})$ de su análoga en la recta real, es decir, de la transformada de Hilbert[23]

$$H(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y}\, dy.$$

La demostración original hacía un uso indispensable de técnicas de análisis complejo y este era el principal obstáculo para extenderla a varias dimensiones. Además, la prueba [39, 1925] de A. Kolmogorov (1903–1987) de la acotación débil en el caso $p = 1$ también recurría de un modo u otro al análisis complejo. Así pues, se hacía evidente la necesidad de un cambio de paradigma para poder generalizar el teorema y, con él, la teoría subyacente, a dimensiones superiores. Ese nuevo camino fue iniciado por Calderón y Zygmund en su artículo [10, 1952]. Stein dice lo siguiente [14, p. 6]:

> Probablemente no hay ningún artículo en los últimos cincuenta años que haya tenido semejante influencia en el análisis.

En [10] se consideraban operadores integrales (de convolución) del tipo

$$T(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) K(x-y)\, dy$$

y se estudiaban su existencia y sus propiedades de acotación en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Aquí, al igual que en el caso de la transformada de Hilbert, el núcleo de convolución K presenta una singularidad en $y = x$ y posee ciertas propiedades análogas al núcleo $1/(x-y)$.

La existencia y acotación de estos operadores se siguen de técnicas de variable real. La acotación en L^2 se obtiene de forma sencilla a partir de las propiedades que verifica el núcleo K. El paso crucial es demostrar la acotación débil cuando $p = 1$ pues, a partir de ahí, se aplica interpolación para $1 < p < 2$ y dualidad para $p > 2$. Y es en esa prueba donde se utiliza un lema[24], posteriormente conocido como lema de Calderón-Zygmund, que permite descomponer la función en una parte «buena» y en otra «mala» que se analizan por separado para llegar al resultado.

Stein y Charles Fefferman [4, p. 574] elogian los métodos de variable real en la siguiente cita:

> El método para probar el teorema principal de ese artículo es, como mínimo, tan importante como los propios resultados. Una idea crucial en las demostraciones es el «lema de Calderón-Zygmund».

Efectivamente, [10] no fue un trabajo aislado, sino el origen de una teoría sobre integrales singulares y operadores de Calderón-Zygmund que, además de abrir nuevas líneas de investigación para estudiar otro tipo de operadores en varias dimensiones

[23] La integral debe interpretarse en el sentido de valor principal de Cauchy por la singularidad que presenta en $y = x$.

[24] Que puede entenderse, en cierto sentido, como una generalización a varias dimensiones del *lema del sol naciente* de F. Riesz.

ON THE EXISTENCE OF CERTAIN SINGULAR INTEGRALS.

By

A. P. CALDERON and A. ZYGMUND

Dedicated to Professor MARCEL RIESZ, on the occasion of his 65th birthday

Introduction.

Let $f(x)$ and $K(x)$ be two functions integrable over the interval $(-\infty, +\infty)$. It is very well known that their composition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, K(x-t)\, dt$$

exists, as an absolutely convergent integral, for almost every x. The integral can, however, exist almost everywhere even if K is not absolutely integrable. The most interesting special case is that of $K(x) = 1/x$. Let us set

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{x-t}\, dt.$$

Lemma 1.[1] *Given an $f(P) \geq 0$ of L^p, $p \geq 1$ and any number $y > 0$, there is a sequence of non-overlapping cubes I_k such that*

$$y \leq \frac{1}{|I_k|} \int_{I_k} f(P)\, dP \leq 2^n y; \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

and $f(P) \leq y$ almost everywhere outside $D_y = \bigcup_k I_k$. Moreover $|D_y| \leq \beta^f(y)$ and

$$y \leq \frac{1}{|D_y|} \int_{D_y} f(P)\, dP \leq 2^n y.$$

Parte de la primera página del artículo [10, 1952] y lema que contiene la (denominada) *descomposición de Calderón-Zygmund.*

(funciones g_k, integral de área de Lusin, etc.), resultó tener importantes aplicaciones en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales. Precisamente esta conexión entre las integrales singulares y las ecuaciones en derivadas parciales fue lo que dio fama a la teoría en los años sesenta (ver [55]).

5. Algunos premios

Tanto Zygmund como Calderón obtuvieron numerosos reconocimientos a su actividad matemática. En [36] y [41] puede encontrarse un resumen de la obra científica de Zygmund, y [4, pp. xxi–xxx] y [53, p. 132–140] contienen el *curriculum vitae* de Calderón. Aquí nos limitaremos a mencionar algunos premios importantes recibidos por uno y otro y omitiremos muchos otros no menos significativos.

En 1972, Zygmund recibió el Steele Prize (AMS), y en 1986 la National Medal of Science en la disciplina de matemáticas y ciencias de la computación. Este último galardón es considerado como la máxima distinción científica en Estados Unidos. La ceremonia de entrega tuvo lugar en la Casa Blanca el 12 de marzo de 1986 y estuvo presidida por el presidente R. W. Reagan. Parece de interés señalar que la distinción se otorgó:

> Por destacadas contribuciones al análisis de Fourier y sus aplicaciones a las ecuaciones en derivadas parciales y otras ramas del análisis, y por la creación y liderazgo de la escuela de investigación en análisis más potente del mundo matemático actual [45].

Calderón recibió el Bôcher Prize (AMS) en 1979, el Premio Konex (Argentina) en 1983 y 1993, el Steele Prize en 1989, el Wolf Prize (Israel) en 1989 y la National Medal of Science en 1991. Esta última:

> Por su trabajo pionero en operadores integrales singulares y su aplicación a importantes problemas en ecuaciones en derivadas parciales, incluidas la prueba de unicidad para el problema de Cauchy, el teorema del índice de Atiyah-Singer y la propagación de singularidades de ecuaciones no lineales [46].

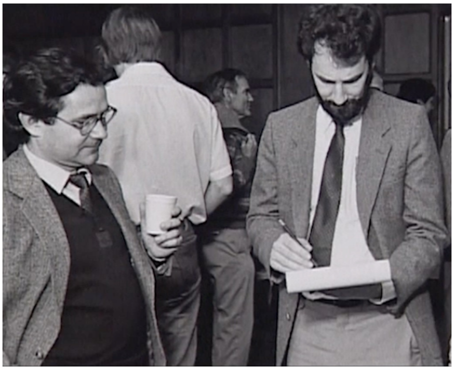
La ceremonia de entrega, en este caso, se llevó a cabo en la rosaleda de la Casa Blanca el 16 de septiembre de 1991 y estuvo presidida por el presidente G. W. Bush.

6. Análisis armónico en España

La investigación en análisis en España a comienzos del siglo XX, y más en general, en matemáticas, se hallaba en un estado de franco retraso y no poseía un estatus consolidado en el panorama internacional. Posteriormente, las circunstancias de la guerra civil y la instauración de la dictadura franquista impidieron cualquier iniciativa de cambio en este sentido hasta el último cuarto de siglo. En los años setenta la transición democrática reanimó todo el progreso que un siglo antes habían propuesto organizaciones como la Institución Libre de Enseñanza o la Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas, y la personalidad de Miguel de Guzmán Ozámiz (1936–2004) fue decisiva para promover el análisis armónico en España y acercar nuevas tendencias en esta área a los estudiantes más jóvenes, que ansiaban aprender una matemática más dinámica y contemporánea.

Miguel de Guzmán se doctoró en la Universidad de Chicago bajo la dirección de Calderón, en 1968, con una tesis titulada *Singular Integral Operators with Generalized Homogeneity*, donde se extendían resultados previos de Eugene B. Fabes (1937–1997) y Nestor M. Rivière (1940–1978). Regresó a España un año más tarde, con 33 años y tras una breve estancia en la Universidad de Washington en St. Louis[25], con el firme propósito de compartir los nuevos conocimientos que había aprendido en Chicago y de importar aquel modelo universitario a la Universidad Complutense de Madrid, donde había terminado las licenciaturas de matemáticas y filosofía en

[25]Estuvo contratado en la figura de *Assistant Professor* y trabajó en temas relacionados con su tesis junto a Weiss y Ronald R. Coifman. Los espacios de tipo homogéneo que introdujeron estos dos matemáticos en 1971 (ver [17]) tienen su origen en estas investigaciones. Con G. Welland colaboró en problemas de diferenciación de integrales. Anteriormente, de Guzmán había sido *Assistant Professor* en la Universidad DePaul en Chicago.

Fotografías de Miguel de Guzmán junto con su director de tesis Calderón (izquierda) y de Antonio Córdoba con su director de tesis Ch. Fefferman (derecha).

1965 y ahora era profesor[26]. En los siguientes años iba a encarnar una figura de progreso en la matemática española. Su papel fue decisivo para crear una conexión entre la matemática de aquí y la escuela de análisis armónico de Chicago de la que muchos estudiantes se han beneficiado. Uno de los primeros y más destacados fue Antonio Córdoba Barba, doctor por la Universidad de Chicago en 1974 bajo la supervisión de Ch. Fefferman, alumno de Stein en Princeton. En septiembre, justo después de defender la tesis de doctorado *The Kakeya Maximal Function and the Spherical Summation Multipliers*, A. Córdoba se trasladó como *Assistant Professor* a la Universidad de Princeton, que comenzaba a heredar la fama en análisis armónico de la Universidad de Chicago de la mano de Stein y del propio Fefferman[27]. Otro excelente investigador español fue José Luis Rubio de Francia (1949–1988), quien obtuvo una beca posdoctoral para estudiar dos años en Princeton (en los cursos[28] 1974–75 y 1975–76). Allí se acercó al análisis armónico de la escuela de Chicago a través del seminario que impartía Stein.

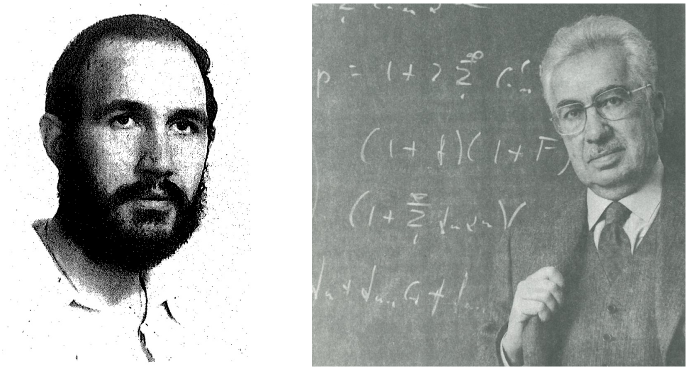
Muchos otros estudiantes se formaron en aquel entorno creado por Miguel de Guzmán y sus inmediatos colaboradores. Sin pretender dar una lista exhaustiva, véanse, por ejemplo, los nombres citados en los agradecimientos de las dos obras de análisis más destacadas de Miguel de Guzmán, los libros [30] y [31], que se mencionarán enseguida. Esos estudiantes, en su retorno a España, impulsaron la investigación matemática del país y colocaron al análisis armónico español en un lugar muy digno en el panorama internacional. Recogemos esta cita que puede encontrarse en [14, págs. xiii y xiv]:

> Calderón y Zygmund también se interesaron de forma activa en el desarrollo de las matemáticas en España. Las alegres circunstancias de la transición democrática tras la desaparición de Franco permitieron el florecimiento de una

[26] Ese año se trasladó a Chicago gracias a Alberto Dou y Pedro Abellanas (ver la nota 7 al pie de la página 134 de [20]).

[27] Fefferman empieza a ser profesor en otoño de 1974.

[28] En diciembre de 1975 consiguió una plaza de Agregado de análisis matemático en la Universidad Complutense de Madrid [19, p. 3].

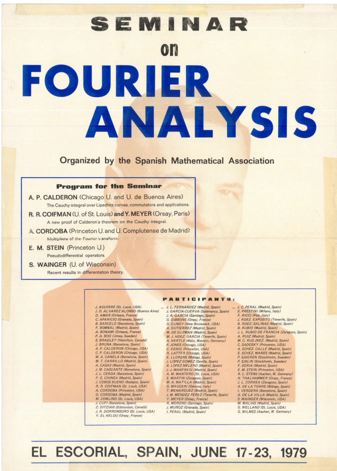


José Luis Rubio de Francia y su director de tesis Luis Vigil (1914–2003).

Algunas fotografías de estudiantes españoles con Calderón y Zygmund en la entrada de Eckhart Hall en un congreso en honor del primero en 1981 (izquierda) y con Stein y Weiss en Fine Hall, edificio donde se ubica el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Princeton (derecha). Ambas son cortesía de Eugenio Hernández, profesor titular de Análisis Matemático de la Universidad Autónoma de Madrid.

> escuela de análisis real en España que emergió de las actividades del único estudiante de Calderón y Zygmund de Madrid, Miguel de Guzmán, buen amigo de ambos. Miguel tuvo la fortuna —que eludió a sus compañeros argentinos— de volver a su país en un momento de florecimiento, y su energía e intuición abrieron las puertas a España para adquirir un gran papel en la escena internacional del análisis matemático.

Señalamos a continuación unas pocas, aunque ciertamente pioneras y destacadas, contribuciones matemáticas de Miguel de Guzmán, Antonio Córdoba y José Luis Rubio de Francia como ejemplo de las aportaciones que hizo el grupo español al análisis armónico. Miguel de Guzmán, entonces presidente de la recién fundada Asociación Matemática Española, e Ireneo Peral (1946–2021) organizaron un seminario sobre análisis de Fourier que se celebró en San Lorenzo de El Escorial entre los días 17 y 23 de junio de 1979. El evento contó con la participación de expertos mundiales en análisis armónico, en particular, los afamados fundadores de la escuela de Chicago



To the members of the Organizing Committee
of the Seminar on Fourier Analysis
El Escorial, 1979.

We would like to congratulate you for the remarkable success of the meeting on Fourier Analysis organized by you which took place at El Escorial this month.

In our opinion this and the one at Williamstown, Mass., U.S.A., in 1978 are the highest level conferences in the field to have taken place in a number of years. Participants were given an opportunity to learn about the latest developments in the field and to become keenly aware of the remarkable flourishing it is undergoing in Spain.

We hope you will be able to repeat this accomplishment in the near future

(Signed)

Antoni Zygmund, Univ. of Chicago and National Academy of Sciences of the U.S.A.

Alberto P. Calderón, Univ. of Chicago and Univ. of Buenos Aires, National Academy of Sciences of the U.S.A.

Elias M. Stein, Princeton University, National Academy of Sciences of the U.S.A.

Stephen Wainger, University of Wisconsin

Ronald R. Coifman, Washington U., St. Louis, Missouri

Yves Meyer, University of Paris at Orsay

A la izquierda, el cartel del Seminario sobre análisis de Fourier que tuvo lugar en San Lorenzo de El Escorial en 1979. Esta primera edición se dedicó a Zygmund, algo que le agradó tanto que una copia del cartel del congreso lucía colgada en el estudio de su casa. La iniciativa ha cambiado el nombre a *International Conference on Harmonic Analysis and Partial Differential Equations*, manteniendo el lugar de celebración. A la derecha, carta al Comité organizador incluida en el prefacio de [34].

que conocían bien a Miguel de Guzmán. La organización fue un éxito absoluto y el seminario se ha venido repitiendo cada cuatro años hasta el día de hoy[29]. Algunos de los invitados enviaron una carta de felicitación a los organizadores que se incluyó en las actas del congreso [34] y que en español se lee como:

> A los miembros del Comité Organizador del Seminario sobre Análisis de Fourier, El Escorial, 1979:
>
> Nos gustaría felicitarles por el extraordinario éxito del encuentro sobre Análisis de Fourier organizado por ustedes y que tuvo lugar en El Escorial este mes.
>
> En nuestra opinión, este y el que se celebró en Williamstown, Mass., U.S.A., en 1978 son las conferencias de mayor nivel en el área que han tenido lugar en varios años. Los participantes han tenido la oportunidad de aprender los últimos avances en el área y, con entusiasmo, ser conscientes del notable florecimiento que se está experimentando en España.
>
> Esperamos que puedan repetir este logro en un futuro próximo.

En 1989 se celebró un congreso extraordinario en honor de la memoria de José Luis Rubio de Francia, que había fallecido el año anterior. La quinta edición de 1996 estuvo dedicada a Miguel de Guzmán.

Este último publicó dos libros orientados propiamente a la investigación, *Differentiation of Integrals in* $\mathbb{R}^n$ [30, 1975] («el libro amarillo») y *Real Variable Methods in Fourier Analysis* [31, 1981] («el libro azul»). Ambos representan dos referencias

[29] La edición de 2020 se suspendió por la crisis sanitaria.

Portadas de las obras [30] y [31] de Miguel de Guzmán y de [27] de J. García-Cuerva y J. L. Rubio de Francia.

muy recomendadas en las áreas de las que se ocupan y surgieron del seminario que comenzó el propio de Guzmán en la Universidad Complutense.

Precisamente dentro de la teoría de diferenciación de integrales, Antonio Córdoba demostró en 1978 una conjetura que Zygmund había formulado antes, incluso, de instalarse en América. En sus propias palabras, es uno de sus «trabajos más redondos». La demostración, que presentó en el ya mencionado congreso de Williamstown, se basa en un lema de recubrimiento que él mismo compuso [62, p. 29–50] (ver también [18]).

Uno de los resultados más conocidos de José Luis Rubio de Francia es el teorema de extrapolación para pesos, que anunció en [51, 1982] y publicó, más tarde, en [52, 1984]. En colaboración con José García-Cuerva publicó también *Weighted Norm Inequalities and Related Topics* [27, 1985], un libro sobre análisis armónico de más de 600 páginas. Weiss alaba este trabajo en una reseña publicada en el *Bulletin (New series) of the American Mathematical Society* **20** (1989), con la siguiente descripción:

> Este libro representa el esfuerzo considerable de dos investigadores que tienen un completo control de su materia. Debería servir como ejemplo a seguir para quienes vayan a escribir un texto avanzado sobre cualquier tema de matemáticas.

7. Epílogo

El análisis armónico experimentó importantes avances a comienzos del siglo XX gracias a los trabajos de excelentes matemáticos. Antoni Zygmund y Alberto Pedro Calderón lideraron el desarrollo posterior que comenzó a mediados de siglo y que dio paso a los métodos de variable real, que permitían estudiar los problemas de la teoría en varias dimensiones y resaltaban las interconexiones de diferentes disciplinas matemáticas. Muchos de los progresos y resultados más recientes se identifican con los nombres de algunos de sus estudiantes. La escuela de análisis armónico de Chicago (o la escuela de Calderón-Zygmund) supone un legado al análisis armónico, y en general a las matemáticas, de un valor incalculable. Con suerte, estas notas no solo habrán ilustrado el papel fundamental de los dos protagonistas en su creación, sino también cómo su éxito fue posible gracias al buen hacer de otros personajes que, aunque quizás en menor medida, merecen ser reconocidos en esa historia.

Antoni Zygmund y Alberto Calderón fallecieron en Chicago el 30 de mayo de 1992 y el 16 de abril de 1998, respectivamente.

8. Agradecimientos

Este artículo es una adaptación de la charla que el autor impartió en el Seminario Permanente de Actualización en Matemáticas de la Universidad de La Rioja[30] en la sesión del 5 de noviembre de 2021. Agradece a su coordinadora Judit Mínguez (Universidad de La Rioja) la invitación; a Emilio Fernández (Universidad de La Rioja) la inestimable ayuda en la preparación del material, sus ánimos y los múltiples consejos para mejorar de forma notable las transparencias de la charla y estas notas; a Mercedes Sánchez (Universidad Complutense de Madrid) y a Eugenio Hernández (Universidad Autónoma de Madrid) su disposición para colaborar muy amablemente con numerosa documentación y fotografías (Eugenio también revisó el borrador de estas notas señalando varias mejoras); y a la Biblioteca de la Universidad de La Rioja el escaneo de la portada de la primera edición del libro *Trigonometrical series* de Zygmund, 1935, parte del Fondo Mateo Garnica, y el acceso a diversos documentos (actas de congresos, artículos, libros, etc.).

La elección particular del punto Q en el problema geométrico de Bercovici y Calderón se debe a una observación del profesor Luis Español (Universidad de La Rioja) en el turno de preguntas de la charla.

9. Notas bibliográficas

La primera sección dedicada a la biografía de Zygmund hasta su llegada a Chicago se basa en [57, 3, 16, 36, 2, 61, 54, 55], [64, Foreword], [60, 41] y [37].

Más información sobre la segunda sección acerca de Calderón se encuentra en [9, 8, 33, 4, 14, 15] y [32].

En [47] se describen detalles de la vida de E. H. Moore y de su periodo de dirección al frente del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Chicago. Mac Lane [42] da una panorámica bastante completa de la historia de este departamento desde su creación hasta finales de los años cincuenta. La referencia principal sobre la *Stone Age* es [56], donde el propio Stone narra en primera persona su experiencia como director del departamento. Otras referencias que pueden completar esta parte son [58] y [23].

[30] José Luis Rubio de Francia fundó este seminario en el curso 1979–80 con la ayuda de los profesores de la sección de matemáticas del Colegio Universitario de Logroño.

Estas notas se han dedicado esencialmente a la historia de la escuela de análisis armónico de Chicago. La parte matemática se expone en artículos como por ejemplo [63, 7, 55], [15, Chapter 1], [26] y [11].

Los anuncios de la entrega de las National Medal of Science aparecen en los enlaces [45] y [46].

Un repaso histórico del análisis matemático en España durante el siglo XX es [13]. La biografía y obra de Miguel de Guzmán han sido ampliamente reproducidas en varias publicaciones. Aquí se han consultado principalmente [28] y [44]. Además, [49, 35, 12] contienen obituarios de este matemático.

Dos semblanzas que se publicaron tras el fallecimiento de José Luis Rubio de Francia son [19] y [25], y en [59] se analiza su obra. En [22] se incluyen detalles de su biografía y se explican el algoritmo y el teorema de extrapolación de Rubio de Francia.

Para más información sobre la historia del Seminario de Rubio de Francia de la Universidad de Zaragoza y del Seminario Permanente de Actualización en Matemáticas de la Universidad de La Rioja ver, respectivamente, [1] y [29]. La dirección de la página web oficial de los seminarios sobre análisis de Fourier de El Escorial es `https://www.icmat.es/congresos/2020/Escorial/`.

Referencias

[1] M. Alfaro, El Seminario Rubio de Francia de la Universidad de Zaragoza, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **17** (2014), 39–48.

[2] R. Askey, In Memoriam: Antoni Zygmund (December 26, 1900–May 30, 1992), *J. Approx. Theory* **71** (1992), 1–2.

[3] W. Beckner, A. P. Calderón, R. Fefferman y P. W. Jones (eds.), *Conference on Harmonic Analysis in honor of Antoni Zygmund*, 2 vols., Wadsworth International Group, Belmont, California, 1983.

[4] A. Bellow, C. E. Kenig y P. Malliavin (eds.), *Selected Papers of Alberto P. Calderón with Commentary*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[5] F. E. Browder, Stone Age of Mathematics at the Midway, *Math. Intell.* **11** (1989), 22–24.

[6] A. P. Calderón, On theorems of M. Riesz and Zygmund, *Proc. Amer. Math. Soc.* **1** (1950), 533–535.

[7] A. P. Calderón, Singular Integrals, *Bull. Amer. Math. Soc.* **72** (1966), 427–465.

[8] A. P. Calderón, Reflexiones sobre el aprendizaje y la enseñanza de la matemática, *Conferencia Rey Pastor en la XXXVI Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina y IX reunión de Educación Matemática*, Santa Fe y Paraná, 8, 9, 10 y 11 de octubre de 1986. Publicado en *NÚMEROS. Revista de didáctica de las matemáticas* **33** (1998), 3–12.

[9] A. P. Calderón, Reminiscencias de mi Vida Matemática, *Discurso de investidura doctor* honoris causa *por la Universidad Autónoma de Madrid*, 6 de junio de 1997.

[10] A. P. CALDERÓN Y A. ZYGMUND, On the existence of certain singular integrals, *Acta Math.* **88** (1952), 85–139.

[11] A. CARBERY, Harmonic analysis of the Calderón-Zygmund school, 1970–1993, *Bull. London Math. Soc.* **30** (1998), 11–23.

[12] M. CASTRILLÓN Y M. GASPAR, On Miguel's project ESTALMAT, *ICMI Bulletin* **54** (2004), 79.

[13] J. CERDÀ, La evolución del análisis matemático en España, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **12** (2009), 457–482.

[14] M. CHRIST, C. E. KENIG Y C. SADOSKY (EDS.), *Harmonic Analysis and Partial Differential Equations. Essays in Honor of Alberto P. Calderón*, Chicago Lectures in Math., Univ. Chicago Press, Chicago, IL, 1999.

[15] M. CHRIST, C. E. KENIG, C. SADOSKY Y G. WEISS, Alberto Pedro Calderón, *Notices Amer. Math. Soc.* **45** (1998), 1148–1153.

[16] R. R. COIFMAN Y R. S. STRICHARTZ (CON LA AYUDA DE G. GRAZIOSI Y J. HALLQUIST), The School of Antoni Zygmund, *A Century of Mathematics in America, Part III* (P. Duren, R. A. Askey y U. C. Merzbach, eds.), 343–368, Hist. Math. **3**, Amer. Math. Soc. (Providence, RI), 1989.

[17] R. R. COIFMAN Y G. WEISS, *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes, étude de certaines intégrales singulières*, Lecture Notes in Mathematics, 242, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[18] A. CÓRDOBA, Maximal Functions: A proof of a conjecture of A. Zygmund, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **1** (1979), 255–257.

[19] A. CÓRDOBA, José Luis Rubio de Francia (1949–1988). Semblanza de su vida y obra, *Rev. Mat. Iberoamericana* **4** (1988), 1–10.

[20] J. I. DÍAZ, Miguel de Guzmán en la Real Academia de Ciencias, *Miguel de Guzmán Ozámiz matemático y humanista* (M. Gaspar y B. Rubio, eds.), *Gac. R. Soc. Mat. Esp.*, Suplemento al Vol. **7.3** (2004), 131–143.

[21] E. DÍAZ DE GUIJARRO, B. BAÑA, C. BORCHES Y R. CARNOTA, *Historia de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires*, Eudeba, Buenos Aires, 2015.

[22] J. DUOANDIKOETXEA, En recuerdo de José Luis Rubio de Francia (1949–1988): una mirada al teorema de extrapolación, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **16** (2013), 227–240.

[23] R. FEFFERMAN, The History of the University of Chicago, `https://www.youtube.com/watch?v=Eprb1n_8D-M`

[24] J.-B. J. FOURIER, *Théorie analytique de la chaleur*, edición facsímil, Éditions Jacques Gabay, Paris, 1988.

[25] J. GARCÍA-CUERVA, José Luis Rubio de Francia (1949-1988), *Collect. Math.* **38** (1987), 3–15.

[26] J. GARCÍA-CUERVA, La evolución de las integrales singulares, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **13** (2010), 245–263.

[27] J. García-Cuerva y J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland Mathematics Studies, 116, Notas de Matemática (104), North-Holland, Amsterdam, 1985.

[28] M. Gaspar y B. Rubio (eds.), Miguel de Guzmán Ozámiz, matemático y humanista, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.*, Suplemento al Vol. **7.3**, 2004.

[29] J. M. Gutiérrez y J. L. Varona, El Seminario Permanente de Actualización en Matemáticas de la Universidad de La Rioja, *Matematicalia – Revista digital de divulgación científica* **4**, no. 5 (2008), `http://www.matematicalia.net/index.php?option=com_wrapper&Itemid=407`

[30] M. de Guzmán, *Differentiation of integrals in* $\mathbb{R}^n$, Lectures Notes in Mathematics, 481, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.

[31] M. de Guzmán, *Real variable methods in Fourier analysis*, North-Holland Mathematics Studies, 46, Notas de Matemática (75), North-Holland, Amsterdam-New York, 1981.

[32] M. de Guzmán, Alberto P. Calderón: El genio que solo leía los títulos, *El País*, miércoles 27 de mayo de 1998.

[33] M. de Guzmán y J. García-Cuerva, In Memoriam prof. Alberto Calderón, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **1** (1998), 209–222.

[34] M. de Guzmán y I. Peral (eds.), *Fourier analyisis: proceedings of the seminar held at El Escorial, June 17–23, 1979*, Asociación Matemática Española, 1980.

[35] E. Hernández y F. Soria, Miguel de Guzmán Ozámiz (January 12, 1936–April 14, 2004), *ICMI Bulletin* **54** (2004), 72–79.

[36] A. Hulanicki, P. Wojtaszczyk y W. Żelazko (eds.), *Selected Papers of Antoni Zygmund*, 3 vols., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989.

[37] J.-P. Kahane, Revisión del libro *Trigonometric series, Vols. I, II* por A. Zygmund, 3.ª ed., *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **41** (2004), 377–390.

[38] S. E. Kelly and R. H. Torres, Guido Weiss: from immigrant boy to internationally renowned mathematician, *J. Geom. Anal.* **31** (2021), 9146–9179 y 9180–9181.

[39] A. Kolmogoroff, Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier, *Fund. Math.* **7** (1925), 24–29.

[40] H. L. Lebesgue, *Intégrale, Longueur, Aire*, Tesis doctoral presentada a la Facultad de Ciencias de París, 1902.

[41] G. G. Lorentz, Antoni Zygmund and his work, *J. Approx. Theory* **75** (1993), 1–7.

[42] S. Mac Lane, Mathematics at the University of Chicago: a brief history, *A century of mathematics in America, Part II* (P. Duren, R. A. Askey y U. C. Merzbach, eds.), 127–154, Hist. Math. **2**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.

[43] L. Maligranda, Józef Marcinkiewicz (1910–1940) – On the centenary of his birth, *Marcinkiewicz centenary volume*, 133–234, *Banach Center Publ.* **95**, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2011.

[44] J. M. Martínez Ansemil (ed.), *Matemáticas: Investigación y educación. Un homenaje a Miguel de Guzmán*, Universidad Complutense de Madrid, Grupo Anaya, Madrid, 2005.

[45] National Science Foundations, The President's National Medal of Science: Recipient Details, `https://www.nsf.gov/od/nms/recip_details.jsp?recip_id=411`

[46] National Science Foundations, The President's National Medal of Science: Recipient Details, `https://www.nsf.gov/od/nms/recip_details.jsp?recip_id=67`

[47] K. H. Parshall, Eliakim Hastings Moore and the founding of a mathematical community in America, 1892–1902, *Ann. of Sci.* **41** (1984), 313–333.

[48] P. Puig Adam, *Curso de Geometría Métrica*, 2 tomos, Euler Editorial, 1986.

[49] T. Recio, In Memoriam – Miguel de Guzmán Ozámiz (ICMI president 1991–1998), *ICMI Bulletin* **54** (2004), 70–72.

[50] M. Riesz, Sur les fonctions conjuguées, *Math. Z.* **27** (1928), 218–244.

[51] J. L. Rubio de Francia, Factorization and extrapolation of weights, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **7** (1982), 393–395.

[52] J. L. Rubio de Francia, Factorization theory and A_p weights, *Amer. J. Math.* **106** (1984), 533–547.

[53] C. Segovia, Alberto Pedro Calderón, matemático, *Rev. Un. Mat. Argentina* **41** (1999), 129–140.

[54] E. M. Stein, The development of square functions in the work of A. Zygmund, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **7** (1982), 359–376. En [3] I, 2–30.

[55] E. M. Stein, Singular integrals: the roles of Calderón and Zygmund, *Notices Amer. Math. Soc.* **45** (1998), 1130–1140.

[56] M. H. Stone, Reminiscences of mathematics at Chicago, *Math. Intelligencer* **11** (1989), no. 3, 20–25.

[57] The Editorial Committee of Studia Mathematica, Antoni Szczepan Zygmund. December 26, 1900–May 30, 1992, *Studia Math.* **103** (1992), 119–121.

[58] The University of Chicago, History of the Department of Mathematics of the University of Chicago, `https://mathematics.uchicago.edu/about/our-history/`

[59] J. L. Torrea, J. García-Cuerva, J. Duoandikoetxea y A. Carbery, The work of José Luis Rubio de Francia. I, II, III, IV, Conference on Mathematical Analysis (El Escorial, 1989), *Publ. Mat.* **35** (1991), 9–25, 27–63, 65–80 y 81–93.

[60] D. Waterman, The contributions of Antoni Zygmund to real analysis, *Real Anal. Exchange* **19** (1993/94), 11–12.

[61] G. Weiss, Antoni Zygmund: 1900–1992, *J. Geom. Anal.* **3** (1993), 529–531.

[62] G. Weiss y S. Wainger (eds.), *Proceedings of the Symposium in Pure Mathematics of the American Mathematical Society held at Williamstown College,*

Williamstown, Massachusetts, July 10–28, 1978, American Mathematical Society, 1978.

[63] A. Zygmund, On singular integrals, *Rend. Mat. e Appl.* **16** (1957), 468–505.

[64] A. Zygmund, *Trigonometric series*, 3.ª ed., 2 vols., con prólogo de R. Fefferman, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

Edgar Labarga Varona, Dpto. de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja
Correo electrónico: `edgar.labarga@unirioja.es`