La función exponencial de Dunkl definida como un límite

Existe una función $E_\alpha(t)$, dependiente de un parámetro $\alpha > -1$, que generaliza la función exponencial e^t, a la cual se reduce cuando se toma $\alpha = -1/2$. La función $E_\alpha(t)$ —denominada exponencial de Dunkl— se define por medio de la serie

$$E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\gamma_{k,\alpha}}, \qquad \gamma_{k,\alpha} = \frac{2^k \Gamma\big(\alpha + 1 + \lfloor (k+1)/2 \rfloor\big) \lfloor k/2 \rfloor!}{\Gamma(\alpha+1)};$$

por supuesto, $\gamma_{k,-1/2} = k!$. Hay muchos conceptos matemáticos involucrados que se generalizan con este mismo parámetro α, por ejemplo la derivada de Dunkl

$$\Lambda_\alpha f(x) = f'(x) + \frac{2\alpha+1}{2} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$$

(obviamente, $\Lambda_{-1/2} = \frac{d}{dx}$); existe también una transformada de Dunkl que generaliza la de Fourier, un sistema ortogonal que generaliza a $\{e^{k\pi i}\}_{k\in\mathbb{Z}}$, etc. ¿Pero cómo generalizar la conocida expresión

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = e^t$$

a este contexto? Hay que recurrir a la denominada traslación de Dunkl, que es un operador $\tau_{\alpha,y}$ (con $y \in \mathbb{R}$) que se define sobre una amplia clase de funciones y está específicamente adaptado. Por ejemplo, con E_α ya no es verdad $E_\alpha(x+y) = E_\alpha(x)E_\alpha(y)$, sino $\tau_{\alpha,y}(E_\alpha)(x) = E_\alpha(x)E_\alpha(y)$. Para $f(x) = x^n$, lo que hace $\tau_{\alpha,y}$ es

$$\tau_{\alpha,y}((\cdot)^n)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_\alpha x^k y^{n-k}, \qquad \binom{n}{k}_\alpha = \frac{\gamma_{n,\alpha}}{\gamma_{k,\alpha}\gamma_{n-k,\alpha}},$$

que en el caso $\alpha = -1/2$ se reduce al binomio de Newton $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

Proposición. *Se cumple*

$$\lim_{n\to\infty} \tau_{\alpha,1}\big((\cdot)^n\big)(t/n) = E_\alpha(t).$$

Demostración. Usando las estimaciones asintóticas de la función Gamma (fórmula de Stirling), es una simple comprobación ver que, en

$$\tau_{\alpha,1}\big((\cdot)^n\big)(t/n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma_{n,\alpha}}{\gamma_{k,\alpha}\gamma_{n-k,\alpha}} \left(\frac{t}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma_{n,\alpha}}{\gamma_{k,\alpha}\gamma_{n-k,\alpha} n^k} t^k,$$

el cociente $\frac{\gamma_{n,\alpha}}{\gamma_{n-k,\alpha} n^k}$ tiende a 1 cuando $n \to \infty$, de donde se sigue el resultado. □

Alejandro Gil Asensi, Dpto. de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja
Correo electrónico: algila@unirioja.es