Las Medallas Fields

Sección a cargo de

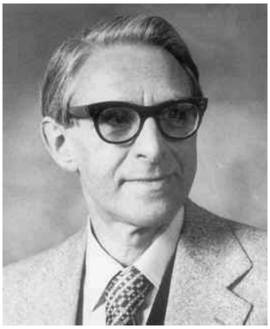
Leovigildo Alonso Tarrío y Ana Jeremías López

Klaus Friedrich Roth, Medalla Fields 1958

por

Jorge Jiménez Urroz

1. Su vida



Klaus Friedrich Roth nace el 29 de octubre de 1925 en Breslavia, Baja Silesia, Prusia (hoy la ciudad de Wrocław, Polonia), hijo del abogado Franz y de su mujer Matilde, ambos de origen judío-alemán. A la edad de 8 años se muda con sus padres a Londres a vivir con sus abuelos maternos. El motivo es simple, estamos en 1933 y la presión del nacionalsocialismo alemán sobre los judíos se hace insostenible, cuestión que es aún más crítica en su familia, ya que su padre fue expuesto a gas venenoso en la primera guerra mundial. La salud del padre es desde entonces muy delicada y muere poco después de llegar a Londres, con lo que Roth se cría solamente con su madre y sus abuelos maternos. Sus abuelos paternos son demasiado mayores para tomar el vuelo a Inglaterra y permanecen en Alemania.

Entre 1937 y 1943 estudió en la escuela St. Paul, trasladada al oeste a las afueras de Londres a causa de la evacuación por la guerra. A pesar de ser un niño con deseos incumplidos de ser piloto, cambiando de país, y perdiendo a su padre y abuelos al comienzo de su vida, nada le impidió volar. Es sobresaliente jugando al ajedrez, y aún más exquisito como alumno en matemáticas. De hecho, ya a esta edad construye una sólida reputación de solucionador de problemas.

Pero todo tiene dos caras. Quizás la difícil situación en casa y su inmensa capacidad le convierten en un niño con mucha responsabilidad a corta edad, lo que le produce tal estado de nervios que es incapaz de reflejar en los exámenes su potencial, ni siquiera en la materia donde más brilla. Entre 1943 y 1945 estudia matemáticas en la Universidad de Cambridge, concretamente en *Peterhouse*, el *college* más antiguo de la universidad, que será más adelante cuna del pensamiento político de Margaret Thatcher. Tras dos años de estudio, y con muchas dificultades, consigue graduarse con un nivel de tercera clase. Parece tan bajo su nivel que su tutor le sugiere que busque un trabajo como estadístico en alguna empresa. Y es que hay veces que uno no debería fiarse de las notas, porque todo puede ocurrir.

Estamos en plena guerra mundial y Roth tiene 18 años de edad. Es alemán de nacimiento lo que, en este contexto, fue una enorme suerte para él, y también para nosotros. En vez de ser alistado en el ejército y posiblemente combatir en el frente, lo que tiene que hacer es un servicio social sustitutorio. Ayudado por su amigo Walter Hayman consigue hacer el servicio como maestro en Escocia, en la reconocida escuela Gordonstoun, fundada en 1934 por Kurt Hanh, de origen alemán, y tío segundo de Walter. Dicha escuela tenía el objetivo de desarrollar en los alumnos, no solo su excelencia académica, sino también su carácter. Se esperaba que viviesen en unas condiciones bastante duras, sin acceso a ningún lujo en sus vidas. Quizás a Roth le sonaba familiar.

Después de su servicio Roth vuelve a Londres en 1946 para continuar su carrera como matemático, pero en *Peterhouse* no consideran que Roth tenga el nivel suficiente. Y, de nuevo, lo que parece una mala noticia se convierte en una oportunidad de vida. Gracias a este fracaso, intenta entrar en el *University College* de Londres donde es admitido por Davenport después de una entrevista. En 1948 obtiene el grado de máster después de resolver un problema propuesto por Davenport, de tal forma que sin ningún tipo de examen adicional le concedieron un puesto como *assistant lecturer*[1] en la universidad, y comenzó la tesis bajo la supervisión oficial de Estermann, quizás por compartir con Roth su origen alemán, y la constante inspiración de Davenport. De hecho, dos años después obtiene el título de doctor con la tesis titulada «Prueba de que casi todo entero se puede escribir como suma de un cuadrado, un cubo, y una cuarta potencia», resolviendo un problema que le había propuesto Davenport de mejor manera que la esperada, pues Davenport ¡creía necesario añadir una quinta potencia!

Al leer la tesis, Roth sube de categoría a *lecturer*[2], lo que tiene unas consecuencias determinantes. Por un lado empieza a dar clase, y en su primera lección tiene en primera fila a la alumna Melek Khairy, más adelante médica y psicóloga experimental en el *University College* ([61]), e hija del senador de Egipto, Khairy Pacha. Roth no duda en decir que para él «fue amor a primera vista», y se declara incapaz de evaluar sus exámenes al final del curso. En 1955 se casa con ella y se mantienen juntos el resto de sus días.

Por otro lado, y a pesar de que *lecturer* es el segundo escalón en la carrera académica británica, para Roth es suficiente como para saltar a la estratosfera matemática. En 1955 Roth demuestra que el mejor exponente en la desigualdad de Thue-Siegel es 2, confirmando así una famosa conjetura del propio Siegel, cerrando un problema comenzado por Dirichlet y Liouville hacía más de 100 años, al que habían dedicado

[1] Doctorando.
[2] Contratado doctor.

I have the honour and pleasure to announce that the Committee has decided to award the Medals to

Klaus Friedrich Roth, of the University of London, for solving a famous problem of number theory, namely, the determination of the exact exponent in the Thue–Siegel inequality;

and to

René Thom, of the University of Strasbourg, for creating the theory of 'Cobordisme' which has, within the few years of its existence, led to the most penetrating insight into the topology of differentiable manifolds.

Detailed reports on the work of the laureates will be given in a special session; Professor Davenport will speak on Dr Roth's work, and I on Professor Thom's.

May I now ask Dr Roth and Professor Thom to come forward to receive the Medals from the hands of the Lord Provost of Edinburgh?

Discurso del Presidente del Comité de Medallas Fields anunciando los galardonados en el ICM 1958, Edimburgo.

sus esfuerzos matemáticos de renombre mundial como son Thue, Siegel, Dyson o Gelfond. El artículo, publicado, cómo no, en la revista *Mathematika* del *University College*, tiene (en febrero de 2023) alrededor de 800 citas según Google Scholar. No parecen muchas (o quizás nos ayuda a entender lo que significa ser citado en matemáticas) para un trabajo que resuelve completamente el problema en una pieza maestra [71], y por el que le otorgan la Medalla Fields en 1958. Los expertos consideran esta una de las contribuciones más importantes en matemáticas.

Efectivamente, a las 10:30, aproximadamente [47], del 14 de agosto de 1958, en la sala *Mc Ewan Hall* de la Universidad de Edimburgo, en el cuarto Congreso Internacional de Matemáticos, Hopf, como presidente del Comité de las Medallas Fields, en el que le acompañan Chandrasekharan, Friedrichs, Hall, Kolmogoroff, Schwartz, Siegel y Zariski, otorga las medallas a K. F. Roth y a R. Thom[3].

Normalmente el presidente o un miembro del Comité de las Medallas habría sido quien introdujese el trabajo del galardonado. Hopf presentó el de Thom, pero Siegel no pudo asistir, con lo que nadie mejor que Davenport, representante del comité nacional de matemáticas en el congreso, fue el escogido para presentarlo delante de 2415 matemáticos de todo el mundo. Y es que en realidad Davenport tiene una pequeña parte del mérito. John Cosgrave [28] comenta que, al preguntar a Roth sobre la forma en que probó el teorema, Roth le responde que Davenport tenía la costumbre de invitar colegas a leer algún trabajo difícil y explicarlo a todos en un

[3] Tengo el honor y el placer de anunciar que el Comité ha decidido premiar con las Medallas a Klaus Friedrich Roth, de la Universidad de Londres, por resolver un famoso problema de teoría de números, concretamente, la determinación del exponente exacto en la desigualdad de Thue-Siegel, y a René Thom, de la Universidad de Estrasburgo, por crear la teoría del 'Cobordismo' que, en sus pocos años de existencia, ha proporcionado la comprensión más penetrante en la topología de variedades diferenciables. Se darán informes detallados sobre el trabajo de los galardonados en una sesión especial; el profesor Davenport hablará sobre el trabajo del Dr. Roth y yo hablaré sobre el del Profesor Thom. ¿Pueden ahora el Dr. Roth y el Profesor Thom acercarse para recibir las Medallas de manos del Sr. Alcalde de Edimburgo?

seminario, [66]. Davenport pidió a Roth leer los resultados de Thue y Siegel. Los leyó, los entendió y los explicó a todo el mundo, seguro que muy bien, dada su fama de buen comunicador. Después de todo ese esfuerzo, se dio un año para resolverlo (costumbre que practicaba a menudo). Y cuando el año estaba a punto de concluir, y él a punto de abandonar, el curso de la historia cambió.

Davenport no es solo precursor en parte del logro, sino también profundo conocedor del tema. De hecho, es Davenport quien reescribe el artículo original de Roth antes de ser publicado. Y no es coincidencia que, meses después de publicar Roth su artículo, aparece publicado, en la misma revista *Mathematika*, un artículo conjunto con Davenport en el que cuantifican el resultado de Roth ([31]). Y no menos importante, Davenport también es muy cercano a Roth. En la presentación en el Congreso comenta [89]:[4]

> *... It is a pleasant duty, in that it requires me to pay tribute to the work of a colleague and friend [...] The achievement is one that speaks for itself; it closes a chapter, and a new chapter will now be opened. Roth's theorem settles a question which is both of a fundamental nature and of extreme difficulty. It will stand as a landmark in mathematics for as long as mathematics is cultivated...*

Davenport termina haciendo una referencia explícita a su asombrosa capacidad de resolver problemas imposibles:[5]

> *... The Duchess, in Alice in Wonderland, said that there is a moral in everything if only you can find it. It is not difficult to find a moral in Dr. Roth's work. It is that the great unsolved problems of mathematics may still yield to direct attack, however difficult and forbidding they appear to be, and however much effort has already been spent on them...*

Pero, claro, la cosa no queda ahí. Un año después de la publicación de su trabajo, en 1956, le promueven a *reader*; se celebra el Congreso de 1958, y le otorgan la Medalla Fields; en 1960 es elegido *fellow* de la *Royal society* y un año después, en 1961, le conceden una plaza de *chair in pure mathematics* en la *London University.* Aquí no hay duda de los motivos por los que este hombre progresaba en su carrera académica: ni «artículos en el Q1», ni «aplicaciones online del ministerio», ni «burocracia»; «simplemente, matemáticas».

Y cuando Estados Unidos, en la mitad de los años 60, quiere atraerlo, como a tantos otros talentos, para formar parte del MIT, el *Imperial College* no le deja escapar ofreciéndole una posición permanente que no rechaza y que mantiene hasta

[4]... Es una tarea placentera, que me requieran rendir homenaje al trabajo de un colega y un amigo [...] Su logro habla por sí mismo; cierra un capítulo, y un nuevo capítulo se abrirá ahora. El teorema de Roth concluye una pregunta que es a la vez de naturaleza fundamental, y de extrema dificultad. Se mantendrá como punto de referencia en matemáticas mientras las matemáticas sean cultivadas...

[5]El Duque, en Alicia en el País de las Maravillas, dijo que en todo hay una moral si puedes encontrarla. No es difícil encontrar la moral en el trabajo de Dr. Roth. Es que los grandes problemas no resueltos en matemáticas todavía pueden rendirse a un ataque directo, por muy difíciles y prohibidos que parezcan, y por mucho esfuerzo que se les haya dedicado...

su jubilación en 1987. Lo que parecía una huida al país de las oportunidades, se quedó en un sabático en 1966 al otro lado del charco. Y continúa el reconocimiento. En 1983 recibe la Medalla De Morgan de la Sociedad Matemática de Londres, y en 1991 la de la Real Sociedad Británica. Además, diversas instituciones donde ha ido dejando una huella imborrable, como el *University College*, *Peterhouse*, el *Imperial College*, o incluso la Real Sociedad de Edimburgo, le eligen miembro honorario a lo largo de su vida.

En 1987 se muda con Melek a Inverness. Son tiempos felices en los que Roth se divide entre las matemáticas y el baile. Y es que, con su mujer, son entusiastas del baile latino, que ya lo venían practicando en Londres bajo la dirección Alan Fletcher, cinco veces campeón del mundo de esta modalidad [84, pp. 249–253]. Para no perder la costumbre, Roth y Melek dedican una de sus habitaciones especialmente para el baile.

Pero la vida también azota a los sabios a veces. Melek muere de cáncer en 2002 y Roth se desploma. Llevaban 52 años juntos, mano a mano con el devenir. No teniendo hijos, decide mudarse a la residencia de la tercera edad Highview de Inverness, en la que no parecen tratarle como merece una persona que ha dado ejemplo de la excelsitud de la humanidad. Roth se da cuenta, poco a poco, de la insuficiencia en atención y servicios que esta cultura presta a las personas mayores.

El martes 10 de noviembre de 2015 Roth muere en la residencia de ancianos Highview, pocos días después de su 90 cumpleaños ([92]). No es probable que supiese que el día de su muerte numerosos mensajes aparecerían en *Twitter* [91] anunciando la inestimable pérdida que este planeta había sufrido ese día. Periódicos como *The Telegraph* [87], o *The Scotsman* [86], hacen pública la triste noticia.

Su reconocimiento fue de tal envergadura que no solo fue académico, sino también merecidamente recompensado económicamente. Como dice el autor de la entrada en *Matters* [61]: «No es frecuente leer acerca de un matemático profesional exitoso que haya fallecido en su vejez y con una fortuna considerable». Roth, que además de todo, es un hombre amable y generoso hasta el último de sus días, deja toda su fortuna a organizaciones benéficas. Reparte más de 1.3 millones de libras entre la organización *Chest, Heart and Stroke* de Escocia, la *MacMillan Cancer Support* de Inverness, dejando explícito que su legado debería ser utilizado para ayudar a los enfermos y las personas mayores de la ciudad de Inverness. Todos sus premios académicos, incluidas 100 000 libras, las donó a *Peterhouse*, aquella institución que había dicho que Roth no tenía el nivel suficiente. Roth, descanse en paz.

2. Su Obra

2.1. Aprendiendo

A pesar de que el *Math Genealogy Project* sitúa a Roth como alumno directo de Estermann, su carrera esta más influenciada por la investigación de Davenport. Nada más entrevistarle para admitirle en el *University College*, Davenport propone a Roth el problema de demostrar que la ecuación $n = x_1^2 + x_2^3 + x_3^4 + x_4^5$ tiene solución en enteros para casi todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, que la proporción de enteros $n \leq N$ que no se pueden expresar de esa forma tiende a cero con N.

La pregunta se relaciona directamente con el problema de Waring; es decir, encontrar para cada entero positivo k el valor de $g(k)$ y $G(k)$ que denotan el menor número entero positivo s necesario para representar como suma de s potencias k-ésimas cualquier entero, o cualquier entero suficientemente grande, respectivamente. Es interesante recordar que, mientras que el problema de encontrar el valor de $g(k)$ está casi completamente resuelto para todo k, sin embargo, $G(k)$ solo se sabe para dos valores: $G(2) = 4$, consecuencia de los teoremas de Legendre y Lagrange de representación de enteros como suma de 3 y 4 cuadrados; y $G(4) = 16$, probado por Davenport en un artículo publicado en *Annals of Mathematics* ([29]).

Y a pesar de que Davenport es el mayor experto del momento en este tipo de problemas, y sabe que la dificultad de su pregunta es adecuada para un estudiante, se le escapa el hecho de que no hace falta la quinta potencia en el enunciado, y Roth consigue demostrar que, en realidad, $n = x_1^2 + x_2^3 + x_3^4$ ya tiene solución en enteros para casi todo $n \in \mathbb{N}$.

Los avances más significativos en el problema de Waring se han obtenido gracias al método del círculo ([15]), que traduce el comportamiento asintótico de una función aritmética $r(n)$ en el control de la función analítica compleja generatriz de $r(n)$ cerca de su frontera natural de convergencia, por la fórmula integral de Cauchy. Para analizar el tamaño de las singularidades, se hace un análisis de la cancelación de exponenciales complejas en los racionales, concretamente ordenados como fracciones de Farey, con lo que surge un análisis que depende de la aritmética del número racional que estamos estudiando y, por tanto, de su descomposición en primos. Típicamente, el método produce una fórmula tipo local global del estilo

$$r(n) \sim \mathcal{I}\mathfrak{S}n^{\beta},$$

en donde la aportación integral $\mathcal{I}$ recoge la información en característica cero, mientras que la serie singular $\mathfrak{S}$ es un producto de factores para cada primo. Uno de los retos principales es controlar este término y así poder demostrar que es, de hecho, la aportación principal, y que el resto de términos que aparecen son despreciables. Pues bien, Roth comienza probando dos cosas: una, que cualquier entero suficientemente grande se escribe de la forma $n = \sum_{i=1}^{50} x_i^{i+1}$, [67]; y otra, la pregunta original de Davenport. Ya, maestro en el método, obtiene la mejora que le permite deshacerse de la quinta potencia. Para ello toma como guía un artículo anterior de Davenport y Heilbronn [30], en donde se prueba que casi cualquier entero se puede representar como suma de 4 cubos, hasta el momento de controlar la serie singular. Para probar que la serie es positiva, y así obtener el término principal, Davenport y Heilbronn la truncaron como producto, evitando así el uso de ceros de funciones L asociadas. Roth va más allá en este punto y utiliza una función auxiliar que permite excluir términos no deseados de la serie y obtener la mejora del resultado.

Y tampoco se olvida de su director. Estermann [36] había probado que cualquier entero suficientemente grande se puede representar como suma de un cuadrado y un libre de cuadrados, dando además la fórmula asintótica para el número de representaciones de n de esta forma. Roth considera el problema restringiéndose a cuadrados de enteros que son a su vez libres de cuadrados. Las técnicas se encuadran en principio en una criba elemental. Es decir, como cualquier entero se puede escribir como $n = dm^2$ con d libre de cuadrados, para que n lo sea hace falta $m = 1$, es decir, m ha de ser coprimo con cualquier primo p, y de ahí la criba. Esta, sin embargo, es la parte fácil. En la práctica surge la necesidad de controlar el término de error que aparece en cada estimación. Para ello Roth prueba una excelente colección de ingeniosos lemas, haciendo una metódica disección del problema, para estimar de manera adecuada el error en las colas de los intervalos.

Es cierto que restringirse a libres de cuadrados en el problema no es una novedad de gran importancia, pero sí lo es en el hecho de convertir a Roth en un maestro del control de la oscilación. Por otro lado, es importante mencionar que para demostrar el mismo resultado para todo entero n, en vez de solo para enteros suficientemente grandes, se ha tenido que esperar más de 80 años hasta el muy reciente artículo [53], que utiliza, aparte de técnicas de criba y cotas no triviales para la función divisor, el tratamiento de sumas del estilo $n = x^2 + dy^2$ desde un punto de vista más algebraico, en el anillo de enteros de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, en vez de estimaciones directas de criba sobre d como hacía Roth. Esto permite tratar el error de forma más directa, acotándolo hasta hacer viable un análisis computacional para enteros del orden de 10^6.

Otra de las herramientas básicas en teoría analítica de números es el método de gran criba. Los métodos de criba comienzan en la época de los griegos con la famosa criba de Eratóstenes, que para encontrar los números primos descarta todo entero múltiplo de algún entero menor que él. Dicho de otra forma, se descarta cualquier número $n \equiv 0 \pmod{p}$ para algún primo p anterior a n. Desde entonces, los avances que ha supuesto la teoría de criba y los escenarios en los que se puede aplicar son inmensos. Para detalles sobre estos métodos se puede ver el libro [38] de los más grandes expertos en la materia. Entre estos escenarios aparecen ocasiones en las que, en vez de excluir una sola clase módulo p, se han de excluir muchas por la naturaleza del problema. Por ejemplo, los residuos cuadráticos módulo p requieren excluir la mitad de las clases residuales. Es en este contexto en el que aparece y toma su nombre «la gran criba». Comienza con un artículo de Linnik [57] que le permite demostrar que dado δ, la cantidad de primos p hasta X para los que el menor residuo no cuadrático es mayor que δp está acotado por $\log \log X$. Nótese que este problema es trivial si consideramos residuos cuadráticos, pues 1 ya lo es. Así pues se trata de observar cómo de larga puede ser una sucesión de enteros, todos ellos residuos cuadráticos.

Teniendo en cuenta que se han de considerar muchas clases residuales, la idea es obtener resultados en media, dando cotas superiores no triviales a la varianza en un conjunto de enteros $\mathcal{N} \subset [1, N]$ de las progresiones aritméticas módulo p,

$$V_{\mathcal{N}}(p) = \sum_{h=0}^{p-1} \left(S_{h,p} - \frac{|\mathcal{N}|}{p} \right)^2 ,$$

donde

$$S_{h,p} = \sum_{n \equiv h \pmod{p}} \mathbb{1}_{\mathcal{N}}(n),$$

siendo $\mathbb{1}_{\mathcal{N}}(n)$ la función característica del conjunto $\mathcal{N}$. El punto de partida es la identidad

$$pV_{\mathcal{N}}(p) = \sum_{a=1}^{p-1} |S(a/p)|^2 \,,$$

donde $S(a/p) = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{\mathcal{N}}(n) e^{2\pi i a n/p}$. Una cota no trivial de $\sum_{p\leq N^{1/3}} pV_{\mathcal{N}}(p)$, consecuencia de la desigualdad de Parseval, permite a Linnik demostrar su resultado. En [72], Roth, antes de utilizar las herramientas del análisis de Fourier, considera funciones ortogonales definidas en intervalos más ajustados, pero sin solapamiento, al considerar clases residuales de diferentes primos, aumentando así el rango donde puede controlar la varianza, hasta obtener

$$\sum_{p\leq N^{1/2}} pV_{\mathcal{N}}(p) \ll (N \log N) \sum_{n=1}^{N} |\mathbb{1}_{\mathcal{N}}(n))|^2 = N \log N \, |\mathcal{N}| \,.$$

Este artículo, junto con el trabajo inmediatamente posterior de Bombieri [8], se considera una pieza fundamental para el desarrollo posterior del método de gran criba.

2.2. Sus líneas de investigación

Ya desde muy joven a Roth se le conocía por su prodigioso talento en matemáticas y, más concretamente, por su capacidad extraordinaria resolviendo problemas, como Davenport comentó en la presentación del Congreso Internacional de Matemáticos de Edimburgo.

Era capaz de utilizar técnicas clásicas con tal astucia que le permitían resolver problemas que eran considerados por los matemáticos más potentes del mundo fuera del alcance de las matemáticas del momento. Ya despuntaba así en los primeros trabajos que hemos comentado.

Y a eso dedica su investigación. Seleccionaba problemas dentro del área de la teoría analítica de números y se daba un año para hacer un avance significativo y, si era así, acabar por resolverlo completamente. Entre los problemas a los que dedicó sus esfuerzos están los problemas tipo Waring y el método del círculo; la distribución de números libres de cuadrados, y más concretamente el fascinante problema de entender la distancia entre dos libres de cuadrados consecutivos; geometría de números; polinomios trigonométricos; el problema del triángulo de Heilbronn que mide cómo de grande puede ser el menor de los triángulos posibles formados por N puntos en el círculo unidad; el método de gran criba; aproximación diofántica; distribución de enteros en progresiones aritméticas; o teoría geométrica de la discrepancia. En el recomendable artículo [22], Chen y Vaughan, ambos muy cercanos a Roth, hacen un extenso paseo por todo el trabajo de Roth, donde se pueden ver detalles de lo aquí descrito.

No podemos terminar esta sección sin dejar de mencionar dos libros en los que la aportación de Roth ha sido decisiva. El primero, de 1954, en el que hace una traducción al inglés del famoso libro de Vinogradov [93] quien, después de leerla, comentó a Roth en el ICM de 1958 que el libro debería ser traducido de nuevo al ruso.

El otro libro es menos anecdótico. Durante la década de los 50, Roth y Halberstam, motivados por Erdős, escriben el libro *Sequences*, de obligada lectura a día de hoy para el estudio aritmético de sucesiones relacionado con adición de sucesiones, el número de representaciones de un entero como suma de enteros en un conjunto dado, los teoremas relacionados con conjuntos de Sidon o, en general, la representación como suma de h elementos de un conjunto, métodos probabilísticos, sucesiones primitivas, etc. El libro contiene pruebas de teoremas fundamentales como los teoremas de Schnirelmann y Besicovitch, Erdős y Landau, Dyson y Van der Corput, Erdős-Fuchs, así como los métodos de criba de Vigo Brunn, Selberg, o la gran criba de Linnik y Renyi.

Dedicaremos el resto del artículo a comentar con algo más de detalle sus trabajos con mayor impacto en la comunidad matemática internacional, dedicados a la teoría geométrica de la discrepancia, la distribución de enteros en progresiones aritméticas, o la aproximación diofántica, razón por la que gana la Medalla Fields.

2.3. Teoría Geométrica de la Discrepancia

Por casualidad, ¿no será que 95 295 560 es tu número de carnet de identidad? Si lo es, has tenido la suerte de aparecer como las últimas ocho cifras del reciente récord, de junio 2022, de más de 100 billones de cifras decimales conocidas de π ([11]). Y, muy probablemente, no será la única vez que aparecerá tu número en su desarrollo decimal. Por ejemplo, en `http://www.math.com/tables/constants/pi.htm` puedes buscar cuántas veces aparece entre los primeros 200 millones de sus cifras decimales (en la sociedad en la que vivimos es bastante común pasar la tarde del domingo buscando números de la suerte entre las cifras de π).

Se espera que π sea un *número normal*, es decir, que la proporción de veces que aparece cada uno de los diez dígitos en su desarrollo decimal sea exactamente $1/10$.

A día de hoy es desconocido si esta sencilla afirmación es cierta o no. Pues bien, en 1954, en su artículo [70], Roth da un vuelco al problema y propone una reformulación que genera una nueva línea de investigación en teoría de números. De hecho, consideraba este como el mejor de sus artículos, por encima de su resultado con el que obtuvo la Medalla Fields. Simplemente, y en palabras de él mismo, «porque he empezado un nuevo tema de investigación».

El punto de partida está en observar que, dado $N \in \mathbb{N}$, el número de veces que el 1 aparece en los primeros $N+1$ dígitos del desarrollo decimal de un número real α es exactamente igual al número de enteros $1 \leq n \leq N$ tal que $\{10^n\alpha\}$, la parte fraccionaria de $10^n\alpha$, pertenece a $[0.1, 0.2)$; y, de la misma, forma el número de veces que aparece 817 924 264 en los primeros $N+9$ dígitos de α corresponde al número de enteros $1 \leq n \leq N$ tal que $\{10^n\alpha\} \in [0.817\,924\,264, 0.817\,924\,265)$. Esto nos lleva al problema de entender cómo se puede distribuir una sucesión de números reales módulo 1, en este caso la correspondiente a las partes fraccionarias $\{10^n\alpha\}$.

Decimos que una sucesión a_n está uniformemente distribuida módulo 1 si cualquier subintervalo de $[0, 1]$ contiene una proporción de elementos de la sucesión igual a su longitud. Concretamente, dada a_n llamamos $Z_N(E)$ al número de partes fraccionarias $\{a_n\}$ que caen en el conjunto E para $n \leq N$. Entonces, para que a_n esté uniformemente distribuida se ha de tener

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} Z_N([a,b)) = b - a,$$

para cualquier pareja de números $0 \leq a < b \leq 1$. Así pues, tenemos:

PROPOSICIÓN 1. *Un número α es normal si y solo si la sucesión $\{10^n\alpha\}$ está uniformemente distribuida módulo* 1.

A pesar de lo que pueda parecer a primera vista, los dos primeros ejemplos de sucesiones uniformemente distribuidas son sucesiones construidas *ad hoc* para el problema; concretamente la sucesión $\{n\alpha\}$, donde α es cualquier número irracional, y la sucesión de Van der Corput y_n que aparece al tomar los dígitos del entero n como decimales de y_n, precisamente si $n = n_0 \ldots n_k$ entonces $y_n = \sum_{0\leq i\leq k} n_i 10^{-i}$. No se conoce ningún número que de manera natural sea normal, a pesar de que se cree que cualquier número algebraico lo es.

La forma de demostrar que las sucesiones anteriores están uniformemente distribuidas es gracias al (en su día) innovador criterio de Weyl ([96]) que afirma que una sucesión a_n estará uniformemente distribuida módulo 1 si, y solo si, para todo entero $k \neq 0$,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} S_N(k) = 0,$$

pasando así el problema original a un problema de estudio de la cancelación en las conocidas sumas de Weyl, $S_N(k) = \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k a_n}$. La transformación de un problema aritmético en un problema de análisis de Fourier está servido. De hecho, este tipo de sumas aparecen en innumerables artículos, tanto dentro de la teoría de números como del análisis. Por mencionar algunos ejemplos, destacamos el problema del retículo, iniciado por Gauss y dando lugar a una teoría independiente en sí misma, a veces combinando tanto teoría de números, como análisis, [24, 41, 48, 51, 16, 32, 26, 25]. También las sucesiones de Sidon [81], que nacen de estudiar la convolución de series trigonométricas para ser uno de los temas de mayor interés en teoría analítica y combinatoria de números [23, 63], las series trigonométricas lagunares y el estudio de Hadamard de convergencia de funciones analíticas complejas, [76], o el estudio del espectro de singularidades de series de Fourier con frecuencias en polinomios, como el ejemplo de Riemann, $\sum_{n\geq 1} \frac{\operatorname{sen}(2\pi n^2 x)}{n^2}$, en [18, 17].

En el intento de encontrar sucesiones uniformemente distribuidas, Van der Corput observa un fenómeno extraordinario y de vital importancia en el futuro [27]. Ninguna sucesión que esté incluida en el intervalo $[0,1]$ puede estar demasiado bien distribuida a lo largo del intervalo. Concretamente, a la par que encuentra su sucesión, formula la siguiente conjetura:

CONJETURA 2. *Dada una sucesión a_n en $I = [0,1)$, y un número K, arbitrariamente grande, existe un entero N y dos subintervalos de I de la misma longitud I_1 e I_2 tal que*

$$|Z_N(I_1) - Z_N(I_2)| > K.$$

Es decir, incluso si una sucesión está uniformemente repartida en el intervalo, hay cierta discrepancia en su distribución. La conjetura se probó 10 años después, en 1945, por Van Aardenne-Ehrenfest [1], y 4 años más tarde de forma cuantitativa [2]. Para su prueba, Van Aardenne-Ehrenfest considera la hoy en día llamada *función de discrepancia*

$$\Delta_N(I) = |Z_N(I) - N|I||,$$

para la que obtiene la cota $\sup_I(\Delta_N(I)) \geq c\frac{\log\log N}{\log\log\log N}$ para infinitos valores de N y cierta constante c. Es importante mencionar la desigualdad de Erdős-Turán que da una relación directa entre la discrepancia y las sumas de Weyl, concretamente demuestran que, cualesquiera que sean $K \geq 1$ y $N \geq 1$,

$$D(N) = \sup_I \frac{1}{N}\Delta_N(I) \leq \frac{1}{K+1} + 3\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{Nk} S_N(k),$$

estableciendo la equivalencia entre $\lim_{N\to\infty} D(N) = 0$ y la distribución uniforme de la sucesión.

El pionero trabajo de esta mujer, [2], da la primera cota inferior no trivial de la discrepancia y abre las puertas a otra cuestión de enorme interés. Surge el problema de comprender qué tipo de funciones $g(N)$ se admiten como cota inferior de la discrepancia. Roth no duda en hacer de este problema uno de sus retos particulares, consiguiendo, en el que puede ser su mejor trabajo, la amplísima mejora $D(N) \geq c\sqrt{\log N}$ para infinitos N.

La grandeza del artículo de Roth es que formula el problema de una manera que abre camino a un nuevo campo de investigación como es la teoría geométrica de la discrepancia. Y es tan simple, aparentemente, como hacer una reformulación geométrica del problema en términos de la distribución de puntos en el cuadrado unidad. Hay un principio oculto, y aun así bien conocido, según el cual detrás de cada cantidad a analizar en teoría analítica de números hay otra, nombrada de manera familiar por el reconocido H. Iwaniec como su «compañera», que permite sacar información adicional del problema que nos interesa, para poder atacarlo correctamente. Obviamente, la dificultad estriba en saber dónde se encuentra esta «compañera» amiga y secreta. Para Roth fue simple encontrarla en el caso de la discrepancia, y consiste en pasar de una a dos dimensiones continuas en el problema. Considera intervalos $I_a = [0, a]$ y al parámetro a en la función $\Delta_N(I_a)$ le asocia otro b, con el simple cambio de variable $N = nb$, con $n \leq N$ entero, pasando de una variable discreta N a otra b de naturaleza aparentemente continua cuando N y n son enteros grandes, más fácil de atacar con herramientas de análisis. En particular, permite darnos una equivalencia con la pregunta formulada por Van der Corput, al colocar de forma astuta n puntos en el cuadrado unidad, pues ab no es más que el área del cuadrado de lados a, b dentro del cuadrado unidad.

En general, Roth define la discrepancia de una colección de puntos $\mathcal{P}$ en el hipercubo unidad $[0, 1]^k$ respecto a una caja $B(x) = [0, x_1] \times \cdots \times [0, x_k]$, donde $x = (x_1, \ldots, x_k) \in [0, 1]^k$, como el número de puntos dentro de la caja $Z_{\mathcal{P}}(B(x))$, menos su volumen reescalado $Nx_1 \cdots x_k$, esto es,

$$D(\mathcal{P}, B(x)) = |Z_{\mathcal{P}}(B(x)) - Nx_1 \cdots x_k|.$$

En su artículo, Roth consigue dos cosas. La primera es demostrar que obtener una cota $D(N) \gg g(N)$ es equivalente a obtener una cota $\sup_{x\in[0,1]^2} D(\mathcal{P}, B(x)) \gg g(N)$; la segunda es obtener la cota general

$$\int_{[0,1]^k} |D(\mathcal{P}, B(x))|^2 \, dx \gg (\log N)^{k-1}, \tag{1}$$

de donde se deduce trivialmente $\sup_{x\in[0,1]^k} D(\mathcal{P}, B(x)) \gg (\log N)^{(k-1)/2}$, que para $k = 2$ mejora sustancialmente el resultado original de Van Aardenne-Ehrenfest.

En la demostración Roth utiliza un tipo de partición diádica del cubo para aprovechar al máximo el área donde no puede haber puntos, simplemente contando la cantidad, y después, de modo más determinante, aprovecha la ortogonalidad de las funciones características de estos conjuntos para medir el tamaño mínimo que puede tener la discrepancia, introduciendo lo que hoy en día se conoce como el método de la función ortogonal de Roth.

Es cierto que el resultado no es el mejor posible y años después, en 1972, W. Schimdt [79] lo mejora con métodos puramente combinatorios, obteniendo la mejor cota posible $\sup_{x\in[0,1]^2} D(\mathcal{P}, B(x)) \gg \log N$, en vista del resultado de Lerch [56]. Sin embargo, el método de Roth no había mostrado toda su potencia.

En lo que queda de sección incluyo un breve resumen personal de los excelentes artículos [19, 3, 21], escritos en parte por W. Chen, alumno directo de Roth, y que explican con claridad el avance de esta teoría.

Una astuta selección de la función ortogonal permitió a Halasz ([49]) recuperar el resultado de Schmidt, esta vez de forma geométrica. Por otro lado, Bilyk [7], Lacey y Vagharshakyan generalizan el método para obtener un resultado válido en dimensiones mayores; concretamente $\sup_{x\in[0,1]^k} D(\mathcal{P}, B(x)) \gg (\log N)^{(k-1)/2+c_k}$ para una constante c_k que solo depende de la dimensión. Es importante mencionar que en general no se sabe el mejor exponente posible, aunque se cree que podría ser $k/2$, y se considera un problema «*excruciatingly difficult*» («insoportablemente difícil»).

La propia definición del problema, módulo 1, invita a considerar funciones periódicas y análisis de Fourier. Así es como Roth da una prueba alternativa del resultado de Davenport que afirma que (1) es esencialmente la mejor cota posible. Es interesante mencionar que la búsqueda de distribuciones de puntos con discrepancia baja no es solo de interés teórico sino que tiene aplicaciones en otras disciplinas. Por ejemplo, en [97], Wozniakowski prueba que estas distribuciones son las que dan las mejores aproximaciones en integración multivariable, con consecuencias directas en la aproximación de soluciones a problemas con información limitada dentro de la teoría de la complejidad de la información.

Si en vez de tomar cubos, uno toma cualquier objeto geométrico A con función característica $\mathbb{1}(A)$, una forma natural de definir la discrepancia sería

$$D(\mathcal{P}, A) = |\mathcal{P} \cup A| - N\mu(A) = \int_{[0,1]^k} \mathbb{1}(A) \, dZ_N(\mathcal{P}, y) - N \, d\mu(y),$$

donde dZ es la medida de contar, mientras que μ es la medida usual del volumen del objeto. Esta fórmula pone en evidencia la relación directa de la discrepancia con la geometría y la teoría de la medida.

Es interesante recordar que el problema surge de la sucesión de Van der Corput, que se define como el desarrollo decimal de una sucesión diádica en $[0,1]^k$, por lo que está estrechamente relacionada con la función parte fraccionaria, $\{\frac{x}{2^k}\}$. En este punto, la periodicidad de la función nos abre la puerta al uso directo del análisis de Fourier. Teniendo en cuenta que las traslaciones en el objeto dan lugar a la convolución entre la función característica y la medida, no hay más que considerar la transformada de Fourier para separar el problema en dos partes independientes $\mathcal{F}\{D(\mathcal{P},A)\} = \mathcal{F}\{\mathbb{1}_A\}\times\mathcal{F}\{dZ_N(\mathcal{P},y) - Nd\mu(y)\}$. Por un lado aparece la geometría y por otra la teoría de la medida. Beck utiliza estas técnicas para obtener cotas para la discrepancia media sobre dilataciones y traslaciones de un objeto ([5, 6]).

Como explican en [20], se podría decir que estudiar la discrepancia en media L^2 es como estudiar el decaimiento de la transformada de Fourier de la función característica de rotaciones, traslaciones y dilataciones de un objeto convexo, [12, 90].

Mencionamos por último que Skriganov [83] reemplazó el uso natural de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{F}_2$ en la sucesión de Van der Corput por el cuerpo $\mathbb{F}_p$ e hizo la bella observación de que el conjunto de todas las posibles distribuciones de N puntos tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{F}_p$, lo que permite el uso de las funciones de Chrestenson-Levy, que forman una base ortonormal de $L^2([0,1]^k)$ para cada p fijo, y así del análisis de Fourier-Walsh en $[0,1]^k$.

2.4. Progresiones Aritméticas

El interés de Roth en este problema comienza al leer el artículo de Van der Waerden [94], en el que se prueba que cualesquiera que sean r y k, si tomamos un número suficientemente grande N de enteros consecutivos y los coloreamos con r colores distintos, hay una progresión aritmética de longitud k cuyos elementos tienen todos el mismo color. Este teorema se encuadra dentro de la teoría de Ramsey, originada por el filósofo-matemático Ramsey en 1930 ([64]), que se pregunta por el tamaño necesario de un conjunto aleatorio para que contenga algún subconjunto con cierta estructura. Como ejemplo, Ramsey demuestra su famoso teorema que asegura que en cualquier fiesta de más de seis personas, siempre hay tres que son amigos mutuos o desconocidos mutuos.

En el caso de conjuntos que contengan progresiones aritméticas, en la línea del teorema de Van der Waerden, Erdős y Turán conjeturan en 1936, [35], que si un conjunto de enteros tiene densidad superior positiva, entonces debe contener una progresión aritmética de longitud arbitrariamente larga. El concepto de densidad superior de un conjunto A,

$$\overline{d}(A) = \limsup_{N\to\infty} \frac{A(N)}{N},$$

donde $A(N) = |A \cap [1,N]|$, mide la probabilidad de que un entero escogido al azar caiga dentro del conjunto. Teniendo en cuenta que las progresiones aritméticas poseen probabilidad positiva, que decrece con la razón, parece natural la conjetura de

Erdős y Turán. Y, aun así, no fue hasta 1975 cuando fue completamente resuelta por Szemerédi [85] en 46 páginas de complicados argumentos puramente combinatorios.

Pero de nuevo es Roth quien da la primera contribución al problema y prueba la conjetura para progresiones aritméticas de longitud 3, [68]. A diferencia de Szemerédi y dada su formación, la prueba de Roth utiliza herramientas puramente analíticas y, más concretamente, una novedosísima manera de utilizar el método del círculo, del que ya es un experto. Y es que el método del círculo se ideó para analizar la representación de un entero como suma de los elementos de un conjunto, no para estudiar las propiedades aditivas de un conjunto, que es lo que hace Roth sin precedente.

Demostrar la conjetura es equivalente a demostrar que cualquier conjunto sin 3 términos en progresión aritmética debe cumplir $A(N) = o(N)$. Roth va un poco más allá y con su método consigue probar que, en ese caso, $A(N) \ll \frac{N}{\log\log N}$. Para describir la prueba vamos a seguir el trabajo original de Roth, utilizando para ello nomenclatura actual como por ejemplo en [52] o [62].

Como en el método del círculo, la prueba comienza por considerar las sumas exponenciales que caracterizan el problema. Para este propósito utilizamos la transformada discreta de Fourier, herramienta habitual en teoría aditiva de números para obtener las propiedades de un conjunto. Para la función característica de A, $\mathbb{1}_A(n)$, la transformada se define como $\hat{\mathbb{1}}(\alpha) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{1}_A(n)\chi_N(-n\alpha)$, donde $\chi_N(t) = e^{-2\pi i t/N}$ es el carácter aditivo módulo N. En este contexto, llamando A_{p3} a la cantidad de progresiones aritméticas del conjunto A y teniendo en cuenta que tres elementos x, y, z están en progresión aritmética cuando $x + z = 2y$, nos interesa estudiar la suma

$$A_{p3} = \sum_{x,y,z} \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_A(z)\mathbb{1}_A(-2y) = N^2 \sum_m \hat{\mathbb{1}}_A(m)^2\hat{\mathbb{1}}_A(-2m),$$

donde la segunda igualdad se sigue del teorema de inversión de Fourier. Teniendo en cuenta que el tamaño del conjunto cumple $\hat{\mathbb{1}}_A(0) = |A|/N$, la prueba sería directa si el resto de los coeficientes de Fourier de la función fuesen todos suficientemente pequeños, ya que en ese caso

$$A_{p3} = N^{-1}|A|^3 + E,$$

donde

$$E = N^2 \sum_{m\neq 0} \hat{\mathbb{1}}_A(m)^2\hat{\mathbb{1}}_A(-2m)$$

sería pequeño, con lo que $A_{p3} \sim N^{-1}|A|^3 > 0$ para $|A|$ suficientemente grande. Obsérvese que en este argumento el tamaño de $|A|$ debe ser lo suficientemente grande para que $N^{-1}|A|^3$ sea más grande que el tamaño de las progresiones aritméticas triviales $x = y = z$ contenidas en cualquier conjunto. Estas tienen el mismo tamaño que el conjunto, con lo que necesitamos $N^{-1}|A|^3 > |A|$, así que es suficiente que $|A| > N^{1/2}$.

Falta por tanto considerar el caso en el que alguno de los coeficientes de Fourier de $\mathbb{1}_A$ es grande. Es el momento de observar que una de las principales propiedades de la trasformada de Fourier, en la que como hemos visto Roth era un maestro, es su capacidad de utilizar la ortogonalidad para obtener cancelación suficiente en las sumas. En el caso de la transformada discreta, la fórmula en cuestión es

$$\sum_{0\le n\le q-1} \chi_q(n\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq 0, \\ q & \text{si } \alpha = 0. \end{cases}$$

Así pues, si tenemos un coeficiente de Fourier grande es porque no hay cancelación; es decir, los términos son 0 módulo q para algún q. En otros términos, salvo una traslación, que dependerá del coeficiente grande, el conjunto contiene alguna progresión aritmética $a + kq$. La razón de la progresión la encuentra Roth al aproximar, como es costumbre, el argumento α por racionales $\frac{h}{q}$. Es decir, un coeficiente grande indica la presencia de una progresión aritmética, quizás en un intervalo más pequeño. Para terminar la prueba, Roth utiliza un argumento iterativo, aumentando la densidad del conjunto a considerar en intervalos cada vez más pequeños. Concretamente, supongamos que $\hat{\mathbb{1}}_A(m)$ es grande, y que $|A| = \delta N$. Usando la periodicidad de la transformada módulo N, un sencillo argumento empleando el principio del palomar permite deducir que existen dos múltiplos sucesivos de m que están muy próximos, digamos a distancia q. Esta será la razón de la progresión aritmética P buscada. Como mencionamos anteriormente, basta ahora utilizar las propiedades de la convolución para encontrar un entero x tal que $|A \cap (x - P)| \geq (\delta + |\hat{\mathbb{1}}_A(m)|)|P|$, con lo que la densidad relativa aumenta en relación al tamaño del coeficiente de Fourier. Iterando el proceso llegamos a encontrar un conjunto de densidad mayor que 1, lo cual es una contradicción, y concluye la prueba del teorema.

Y de nuevo, el problema tratado por Roth es de interés incluso hoy en día. Años más tarde de su primer teorema, en [75], Roth consigue extender sus argumentos analíticos para probar la existencia de progresiones aritméticas de longitud 4, pero el control en el término de error en la transformada se hace cada vez más difícil. La ventaja de su método es que obtiene cotas explícitas para el tamaño del mayor subconjunto de enteros en el intervalo $[1, N]$ sin progresiones aritméticas. Estas cotas no son óptimas, y las han mejorado progresivamente eminentes autores como Heath-Brown [50], Bourgain [10] o Sanders [77], hasta la mejor cota actual obtenida por Bloom en 2016, $\frac{A(N)}{N} \ll \frac{(\log\log N)^4}{\log N}$. Las mejoras obtenidas van desde refinamientos sofisticados del método de Roth explotando la periodicidad de la transformada de Fourier, hasta el análisis de Fourier en conjuntos de Bohr, introducidos por Bourgain en la teoría combinatoria aditiva.

El teorema de Roth, así como más adelante el de Szemerédi, han sido extensamente estudiados en la literatura, produciendo diferentes pruebas y resultados de muy distinta naturaleza, de los que quizás es interesante mencionar la generalización de Furstenberg [39] a un espacio de probabilidad general utilizando teoría ergódica e ilustrando el carácter más combinatorio del problema.

El propio Roth continuó su estudio personal de la teoría de Ramsey, generalizando su resultado a sistemas lineales [69], o con su nombrado «Teorema 1/4» en el que prueba que, para cualquier conjunto $A \subset [1, N]$ de densidad d, existe una progresión aritmética $P \subset [1, N]$ de longitud l tal que la función de discrepancia cumple

$$\big||A \cap P| - ld\big| \gg d(1-d)N^{1/4},$$

demostrando así que cualquier conjunto ni muy pequeño ni muy grande, $d \neq 0, 1$, no puede estar bien distribuido en todas las progresiones aritméticas. Su estudio sobre la irregularidad de la distribución de conjuntos sobre progresiones aritméticas lo continúa en [73] y [74].

Por último, debemos mencionar el inmenso trabajo de Gowers sobre las U normas, creadas por él precisamente para estudiar la presencia de estructura dentro de un conjunto dado. Con su teoría, por la que le otorgaron la Medalla Fields en 1998, consigue mejorar en [42] y [43] la estimación para conjuntos $A_k \subset [1, N]$ sin progresiones aritméticas de longitud k, y demostrar la existencia de una constante c_k tal que

$$|A_k(N)| \ll \frac{N}{(\log\log N)^{c(k)}}.$$

La cota permanece inamovible hasta que, en 2017, Green y Tao [46] obtienen

$$|A_4(N)| \ll \frac{N}{(\log N)^c}.$$

Como los autores explican en su artículo, las ideas principales se basan en el método de Roth, solo que para el incremento de densidad y regularidad utilizan teoremas de recurrencia «a la Khintchine» [55]. No es por casualidad que sean estos autores quienes obtienen esta importante mejora. Y es que ellos mismos son capaces de probar que cualquier subconjunto de primos de densidad superior positiva contiene progresiones aritméticas de primos. Primero lo hace Green en [44] para progresiones de longitud 3, y luego junto con Tao en [45] para progresiones de longitud arbitrariamente grande. Este celebérrimo resultado es en parte la razón por la que Tao consiguió la Medalla Fields en 2006.

2.5. Aproximación diofántica

El trabajo de Roth en relación con la aproximación diofántica está en la base de nuestra concepción de número real, y su aportación es de tal relevancia que sin duda merece la concesión del mayor de los reconocimientos que existen hacia el trabajo de un matemático, la Medalla Fields.

En la Grecia antigua se creía que cualesquiera dos cantidades eran conmensurables, es decir, que su cociente era un número racional, o razón de dos enteros. Llega el teorema de Pitágoras y, con él, la prueba de la existencia de números irracionales, como es la diagonal del cuadrado unidad. Ya desde el principio su existencia ejerce una influencia perturbadora en el concepto de número.

Medir lleva intrínseca la comparación con la unidad de medida, con lo que si un número es inconmensurable con la unidad, ¿cómo se puede medir? El truco natural para poder medir es aproximar nuestra cantidad por números que sí son conmesurables con la unidad, es decir racionales, cometiendo un pequeño error que, con suerte, es despreciable.

Supongamos que queremos aproximar un número real α por racionales. Comencemos por observar que, a medida que el racional tiene denominador mayor, la distancia a α será menor, pues el denominador dicta el tamaño en que estamos subdividiendo el intervalo unidad en el que se encuentra el número. Así pues, vamos a medir lo buena que es la aproximación en función del denominador. Como cualquier número está entre dos enteros consecutivos, si dividimos ese intervalo en q subintervalos, se tendrá que α estará a menos de la mitad de distancia de uno de sus extremos, es decir, la aproximación trivial es $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{2q}$ para todo q y algún p en función de q. Nuestro objetivo es, por tanto, el siguiente problema, que nos permitirá aproximar α de la mejor manera posible. Asumiremos $\alpha > 0$, por simplicidad.

Problema 3. *Dado un número real $\alpha > 0$, encontrar infinitos racionales $\frac{p}{q}$ para los que $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^r}$ para r lo más grande posible.*

En 1842, en [33], Dirichlet demuestra que cualesquiera que sean α y $Q \geq 0$, siempre hay un racional $\frac{p}{q}$ con $q \leq Q$ tal que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qQ}. \tag{2}$$

Teniendo en cuenta que si $\alpha = \frac{a}{b}$ entonces cualquier racional distinto de α cumple $\left|\alpha - \frac{c}{d}\right| = \frac{|ad-bc|}{|bd|} \geq \frac{1}{|bd|}$, vemos que (2) es en algún sentido el mejor resultado posible. La prueba de (2) utiliza lo que hoy en día se conoce como principio del palomar de Dirichlet.

Por otro lado, si α es irracional, usando la anterior aproximación para el número $|\alpha - \frac{p}{q}|^{-1}$ y un argumento recurrente, Dirichlet prueba que existen infinitos racionales para los que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2},$$

dando así la primera caracterización de los números irracionales. Si ahora tenemos en cuenta que para cualquier racional p/q, $2q^2 - p^2$ es un entero no nulo, se tiene

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| = \frac{|2q^2 - p^2|}{q^2|\sqrt{2} + \frac{p}{q}|} > \frac{c}{q^2},$$

para alguna constante c, con lo que vemos que $r = 2$ es el mejor exponente que se puede esperar en el Problema 3.

La prueba surge del hecho de que $\sqrt{2}$ es raíz de un polinomio cuadrático con coeficientes enteros. Básicamente es consecuencia de utilizar el teorema del valor medio en el polinomio $f(x) = x^2 - 2$, con lo que, al igual que en el caso anterior, surge la duda de si se podrá modificar el exponente al omitir los números reales cuadráticos.

En 1844, en [58, 59], y con más detalle en [60], Liouville prueba que para las raíces de polinomios de grado d, el mejor exponente que se puede esperar en el Problema 3 es d. Concretamente, si α es tal que $p(\alpha) = 0$, siendo $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio con coeficientes enteros irreducible de grado d, entones existe una constante explícita $c(\alpha)$ tal que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c(\alpha)}{q^d}, \tag{3}$$

para todo racional $\frac{p}{q}$.

De nuevo, esta condición permite a Liouville obtener un criterio sobre el grado de un número algebraico dado, así como probar por primera vez en la historia la existencia de números trascendentes, dando sus famosos ejemplos de números de Liouville $\sum_{n\geq 0} a_n 10^{-n!}$. Es importante recordar que 20 años después Cantor en [14] demuestra que los números algebraicos son numerables, mientras que los reales no lo son, con lo que casi todos los números son trascendentes.

Aun con la importancia que conlleva, y a diferencia del caso de irracionales cuadráticos, (3) no es más que una cota inferior, y por tanto queda por ver si es óptima. Comienza así un largo e interesante camino cuyo extraordinario colofón no es otro que el teorema de Roth. En lo que sigue diremos que $\mu = \mu(\alpha)$ es una medida de la irracionalidad de α si existe una constante $c(\alpha)$ tal que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c(\alpha)}{q^\mu} \tag{4}$$

se verifica para todo racional $\frac{p}{q}$. El primer resultado que mejora significativamente la desiguladad de Liouville se debe a Thue [88], que consigue probar que si α es un número algebraico de grado $d \geq 3$, entonces $\mu = \frac{d}{2} + 1$ es una medida de la irracionalidad de α. Como consecuencia del resultado, Thue demuestra que si f es una forma irreducible de grado $d \geq 3$ definida en $\mathbb{Z}[x, y]$ y $c \in \mathbb{Z}$, entonces la ecuación diofántica $f(x, y) = c$ tiene solamente un número finito de soluciones enteras. Desde entonces, a este tipo de ecuaciones diofánticas se las llama ecuaciones de Thue.

La prueba del teorema de Thue se puede entender como una ingeniosa generalización del teorema del valor medio utilizado por Liouville. Si un polinomio se anula en un punto hasta orden n, dos números racionales cercanos a θ estarán a distancia como una potencia negativa del denominador que depende de n. Por tanto, en un intervalo menor no podrá haber más que un racional tan próximo a la raíz. Thue construye una serie de polinomios de grado creciente para los que los intervalos con la propiedad anterior en realidad cubren la recta real, con lo que la desigualdad (4) con μ fijo solo puede tener una solución. Concretamente, los polinomios de Thue son del estilo

$$P(x) - \alpha Q(x) = (x - \alpha)^n G_n(x, \alpha), \tag{5}$$

aumentando para cada n el grado de G_n en x, y aprovechando el grado constante $d-1$ en α. Curiosamente, la dificultad central es demostrar que la identidad anterior no es trivial en algún racional, es decir, hay un racional para el que P, Q, y G_n no son a la vez nulos, pues en ese caso no estarían dando ninguna aproximación.

Para demostrarlo, Thue controla el grado del polinomio G en función de la aproximación que quiere obtener, asegurándose que el wronskiano

$$W(x) = P'(x)Q(x) - Q'(x)P(x)$$

no es idénticamente nulo, construyendo lo que ahora se conoce como teorema del índice. Obsérvese que es natural considerar el wronskiano en el sentido de que cualquier derivada en (5) de orden k pequeño en comparación con n sigue dando una buena aproximación de orden $(x-\alpha)^{n-k}$.

A partir de aquí, primero Siegel [82], en 1921, rebaja el exponente y demuestra que $\mu = \frac{d}{s}+s-1$ es una medida de la irracionalidad de α para cualquier $s \in \mathbb{N}$, con lo que escogiendo $s \sim \sqrt{d}$ se obtiene la mejora $\mu = 2\sqrt{d}$. Después, Dyson en [34] y Gelfond en [40] de forma independiente, refinan el método llegando hasta $\mu = \sqrt{2d}$. Pero todos los ataques hasta ese momento utilizan las mismas ideas de Thue, consiguiendo mejoras que dependen del grado del número algebraico considerado.

Por otro lado, es fácil ver que $\mu = 2$ es cota inferior para la medida de irracionalidad de cualquier número irracional α. Efectivamente, dado α consideramos su desarrollo en fracción continua definida mediante la sucesión $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_{n+1} = \frac{1}{\{\alpha_n\}}$. Llamando ahora $a_n = [\alpha_n]$, se dice que el número racional

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1 \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\cdots + \frac{1}{a_n}}}}}$$

es la n-ésima convergente de α, y es inmediato ver que $\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$. Es consecuencia directa de la conocida identidad

$$q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n, \tag{6}$$

que la desigualdad

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{2q_n^2}$$

es cierta para al menos una de cada dos convergentes consecutivas, dando así el resultado deseado.

Es 1948 y, dada la distancia entre la cota superior y la cota inferior, independiente del número real considerado, no está claro cuál será la verdadera magnitud para la medida de la irracionalidad y, lo que es peor, se está falto de ideas para conseguir resolver la cuestión. Sin embargo, debido a que la menor distancia entre enteros es obviamente la unidad, la identidad (6) sugiere de alguna forma que $\mu = 2$ es la cota óptima. Esta es justamente la conjetura de Siegel, que afirma que para cualquiera que sea el $\varepsilon > 0$, $\mu = 2 + \varepsilon$ es una medida de la irracionalidad de α para todo α algebraico de grado $d \geq 2$.

Y es justamente esta conjetura la que prueba magistralmente Roth, con herramientas al alcance de cualquier experto del momento, pero con enorme ingenio. La observación de partida es que es suficiente con demostrar la desigualdad (4) para cualquier racional salvo para un número finito, simplemente cambiando la constante. Es decir, de forma análoga a la que Thue demostró que, como mucho, habría una solución a la desigualdad contraria, Roth permitía un número finito. Así pues, la idea es generalizar la aproximación a polinomios que dependen de p variables. De nuevo surge la necesidad de probar que un polinomio multivariante no es idénticamente nulo, resultado que demuestra gracias a la introducción del wronskiano generalizado

$$W(x) = (\det \Delta_i \varphi_j(x)),$$

donde $\varphi_j(x)$ son l polinomios en p variables, y Δ_i son operadores diferenciales del estilo

$$\Delta = \frac{1}{i_1! \cdots i_p!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{i_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_p} \right)^{i_p}$$

de órdenes $i = 0, \ldots, l-1$, donde $i = i_1 + \cdots + i_p$, aunque ya el propio Roth admite que este tipo de wronskianos había sido utilizado por Siegel con anterioridad.

La prueba de Roth ahora sigue el mismo esquema que la original de Thue, necesitando demostrar que los wronskianos generalizados solo se anulan todos a la vez cuando los polinomios son linealmente dependientes, consecuencia directa de su prueba del teorema del índice. El teorema se deduce de observar que un polinomio no nulo no puede tener aproximación muy buena en tantos racionales como queramos, pues en ese caso los wronskianos generalizados serían nulos.

Las ideas de independencia en la demostración han llevado a consecuencias notables en teoría de la aproximación diofántica. Por un lado, Baker elabora su teoría de formas lineales en logaritmos de números algebraicos [4]. Por otro, Schmidt establece un resultado en aproximación diofántica simultanea [78] y su famoso teorema del subespacio [80], que afirma que las soluciones enteras de n formas lineales con coeficientes algebraicos $L_1(\overline{x}), \ldots, L_n(\overline{x})$ que cumplen

$$|L_1(\overline{x}) \times \cdots \times L_n(\overline{x})| < |\overline{x}|^{-\varepsilon},$$

con $\varepsilon > 0$, están en la unión de un número finito de subespacios de $\mathbb{Q}^n$. El teorema del subespacio tiene una versión p-ádica relativa a ecuaciones S-unidad mucho más general [95], en la línea del teorema de Ridout [65] que generaliza el teorema de Roth, al caso en que la factorización de los racionales se restringen a un conjunto S finito de números primos.

A pesar de que el teorema de Roth da el mejor resultado posible en el sentido de que 2 es el ínfimo del conjunto de medidas de irracionalidad de cualquier número algebraico independientemente del grado, quedan dos cuestiones en el aire. Por un lado está la dependencia de ε como función del denominador q. En este sentido, Lang conjetura que la función $q^{2+\varepsilon}$ que aparece en la medida de irracionalidad se podría cambiar por $q^2(\log q)^{1+\varepsilon}$. Esta conjetura la propone basándose en el artículo de años anteriores de Khintchine [54] en el que se obtiene el primer resultado de teoría métrica de la aproximación diofántica, concretamente que si $x^2\psi(x)$ es una función continua no creciente, entonces el conjunto

$$K(\psi(x)) = \left\{ \alpha \in \mathbb{R} \, : \, \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \psi(q) \text{ para infinitos } \frac{p}{q} \right\}$$

tiene medida de Lebesgue 0 si $\sum_{q\geq 1} q\psi(q)$ converge, y su complementario tiene medida de Lebesgue 0 en caso contrario.

Por último, hay que destacar que los resultados obtenidos hasta ese momento son inefectivos, en el sentido de que no devuelven una cota explícita para la constante $c(\alpha)$, lo cual es muy relevante a la hora de establecer un criterio para la trascendencia de un número, así como para cuantificar el número de soluciones que puede tener una ecuación de Thue. El primer resultado efectivo se debe a Roth y Davenport [31], que utilizan el teorema de Roth para demostrar que si q_n es el denominador de la n-ésima convergente en la fracción continua de α y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\log q_n (\log n)^{1/2}}{n} = +\infty,$$

entonces α es transcendente.

Un resultado general lo obtuvo Feldman [37], basándose en la teoría de Baker de formas lineales en logaritmos [4], obteniendo cotas explícitas para constantes $c(\alpha)$ y $\tau(\alpha)$, dependiendo del número algebraico α de grado d, para las que la relación $|\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{c(\alpha)}{q^{d-\tau(\alpha)}}$ es cierta cualquiera que sea el racional $\frac{p}{q}$. Las cotas en $\tau(\alpha)$ fueron mejoradas por Bugeaud and Györy [13] usando esencialmente el mismo método de Feldman-Baker, para hacerlas depender del regulador del cuerpo de números $\mathbb{Q}(\alpha)$, y posteriormente por Bombieri [9] con un método completamente independiente de las formas lineales en logaritmos.

Referencias

[1] T. van Aardenne-Ehrenfest, Proof of the impossibility of a just distribution of an infinite sequence of points over an interval, *Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch.* **48** (1945), 266–271.

[2] T. van Aardenne-Ehrenfest, On the impossibility of a just distribution, *Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch.* **52** (1949), 734–739.

[3] J. R. Alexander, J. Beck y W. Chen, Geometric Discrepancy, Theory and Uniform Distribution, *Handbook of Discrete and Computational Geometry* (J. E. Goodman, J. O'Rourke y C. D. Tóth, eds.), 3.ª ed., 331–357, capítulo 13, CRC Press LLC, Boca Raton, FL, 2017.

[4] A. Baker, Linear forms in the logarithms of algebraic numbers (I–IV), *Mathematika* **13** (1966), 204–216; *ibid.* **14** (1967), 102–107; *ibid.* **14** (1967), 220–228; *ibid.* **15** (1968), 204–216.

[5] J. Beck, Irregularities of distribution. I, *Acta Math.* **159** (1987), 1–49.

[6] J. Beck, Irregularities of distribution. II, *Proc. London Math. Soc.* **56** (1988), 1–50.

[7] D. Bilyk, Roth's orthogonal function method in discrepancy theory and some new connections, *A panorama of discrepancy theory*, 71–158, *Lecture Notes in Mathematics* **2107**, Springer, Cham, 2014.

[8] E. Bombieri, On the large sieve, *Mathematika* **12** (1965), 201–225.

[9] E. Bombieri, The equivariant Thue-Siegel method, *Arithmetic Geometry (Cortona, 1994)*, 70–86, Cambridge University Press, Sympos. Math. **36**, 1997.

[10] J. Bourgain, Roth's theorem on progressions revisited, *J. Anal. Math.* **104** (2008), 155–192.

[11] A. Boyle, Google developers set another record for calculating digits of pi: 100 trillion!, *GeekWire*, 2022, `https://www.geekwire.com/2022/google-developers-set-another-record-for-calculating-digits-of-pi-100-trillion/`

[12] L. Brandolini, L. Colzani y G. Travaglini, Average decay of Fourier transforms and integer points in polyhedra, *Ark. Mat.* **35** (1997), no. 2, 253–275.

[13] Y. Bugeaud y K. Győry, Bounds for the solutions of Thue-Mahler equations and norm form equation, *Acta. Arith.* **74** (1996), 67–80.

[14] G. Cantor, Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen, *J. reine angew. Math.* **77** (1874), 258–262.

[15] F. Chamizo, E. Cristóbal y A. Ubis, El método del círculo, *La Gaceta de la RSME* **9** (2006), no. 2, 465–481.

[16] F. Chamizo y H. Iwaniec, On the sphere problem, *Rev. Mat. Iberoamericana* **11** (1995), no. 2, 417–429.

[17] F. Chamizo y J. Jiménez-Urroz, Irreducibility and the distribution of some exponential sums, *Finite Fields Appl.* **23** (2013), 53–59.

[18] F. Chamizo y A. Ubis, Multifractal behavior of polynomial Fourier series, *Adv. Math.* **250** (2014), 1–34.

[19] W. Chen, A. Srivastav y G. Travaglini, *A Panorama of Discrepancy Theory*, Lecture Notes in Mathematics **2107**, Springer, Cham, 2014.

[20] W. Chen y G. Travaglini, Some of Roth's ideas in discrepancy theory, `http://williamchen-mathematics.info/researchfolder/cb03.pdf`

[21] W. Chen y G. Travaglini, Some of Roth's ideas in discrepancy theory, *Analytic Number Theory. Essays in Honour of Klaus Roth on the Occasion of his 80th Birthday*, 150–163, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.

[22] W. Chen y R. Vaughan, Klaus Friedrich Roth, 1925-2015, *Bull. London Math. Soc.* **50** (2018), 529–560.

[23] J. Cilleruelo, *Conjuntos de Sidon*, XXVII EMALCA, Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Caracas, Venezuela, 2014.

[24] J. Cilleruelo y A. Córdoba, Trigonometric polynomials and lattice points, *Proc. Amer. Math. Soc.* **115** (1992), no. 4, 899–905.

[25] J. Cilleruelo y J. Jiménez-Urroz, Lattice points on hyperbolas, *J. Number Theory* **63** (1997), no. 2, 267–274.

[26] J. Cilleruelo y J. Jiménez-Urroz, Divisors in a Dedekind domain, *Acta Arith.* **85** (1998), no. 3, 229–233.

[27] J. G. van der Corput, Verteilungsfunktionen I-II, *Proc. Akad. Amsterdam* **38** (1935), 813–821, 1058–1066.

[28] J. Cosgrave, Klaus Friedrich Roth, 2005, `https://johnbcosgrave.com/archive/download/Public%20and%20other%20lectures/transcendental%206thMay04/transcendental30.html`

[29] H. Davenport, On Waring's problem for fourth powers, *Annals of Math. (2)* **40** (1939), 731–747.

[30] H. Davenport y H. Heilbronn, On Waring's problem: two cubes and one square, *Proc. London Math. Soc. (2)* **43** (1937), 73–104.

[31] H. Davenport y K. Roth, Rational approximations to algebraic numbers, *Mathematika* **2** (1955), 160–167.

[32] J. M. Deshouillers y A. Ubis, Integral points on convex curves, *Ramanujan J.* **53** (2020), no. 2, 399–422.

[33] L. G. P. Dirichlet, Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einige Anwendungen auf die Theorie der Zahlen, *S.- B. Preuss. Akad. Wiss.* (1842), 93–95.

[34] F. J. Dyson, The approximation of algebraic numbers by rationals, *Acta Math.* **79** (1947), 225–240.

[35] P. Erdős y P. Turán, On some sequences of integers, *J. Lond. Math. Soc.* **11** (1936), 261–264.

[36] T. Estermann, Einige Sätze über quadratfreie Zahlen, *Math. Ann.* **105** (1931), no. 1, 653–662.

[37] N. I. Feldman, An effective refinement of the exponent in Liouville's theorem, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **35** (1971), 973–990.

[38] J. Friedlander y H. Iwaniec, *Opera de cribro*, American Mathematical Society Colloquium Publications **57**, AMS, Providence, RI, 2010.

[39] H. Furstenberg, Ergodic behaviour of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions, *J. Anal. Math.* **31** (1977), 204–256.

[40] A. O. Gelfond, Approximation of algebraic irrationalities and their logarithms, *Vest. Mosk. Univ.* **9** (1948), 3–25.

[41] F. Götze, Lattice point problems and values of quadratic forms, *Invent. Math.* **157** (2004), no. 1, 195–226.

[42] W. T. Gowers, A new proof of Szemerédi's theorem for arithmetic progressions of length four, *Geom. Funct. Anal.* **8** (1998), no. 3, 529–551.

[43] W. T. Gowers, A new proof of Szemerédi's theorem, *Geom. Funct. Anal.* **11** (2001), no. 3, 465–588.

[44] B. J. Green, Roth's theorem in the primes, *Annals of Math. (2)* **161** (2005), no. 3, 1609-1636.

[45] B. J. Green y T. Tao, The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions, *Annals of Math. (2)* **167** (2008), no. 2, 481-547.

[46] B. J. Green y T. Tao, New bounds for Szemerédi's theorem III: a polylogarithmic bound for $r_4(N)$, *Mathematika* **63** (2017), no. 3, 944–1040.

[47] L. Guggenbuhl, International Congress of Mathematicians, Edinburgh, 1958, *The Mathematics Teacher* **52** (1959), no. 3, 190–196.

[48] J. GUO, On lattice points in large convex bodies, *Acta Arith.* **151** (2012), no. 1, 83–108.

[49] G. HALÁSZ, On Roth's method in the theory of irregularities of point distributions, *Recent Progress in Analytic Number Theory, Vol. 2 (Durham, 1979)*, 79–94, Academic Press, London, 1981.

[50] D. R. HEATH-BROWN, Integer sets containing no arithmetic progressions, *J. London Math. Soc. (2)* **35** (1987), 385–394.

[51] D. R. HEATH-BROWN, Lattice points in the sphere, *Number Theory in Progress, Vol. 2 (Zakopane-Kościelisko, 1997)*, 883–892, de Gruyter, Berlin, 1999.

[52] A. IOSEVICH, Roth's Theorem on Arithmetic Progressions, 2003, `https://people.math.rochester.edu/faculty/iosevich/expository/roth03.pdf`

[53] J. JIMÉNEZ-URROZ, Every integer can be written as a square plus a squarefree, *Expo. Math.* **40** (2022), no. 3, 665–678.

[54] A. YA. KHINTCHINE, Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der diophantischen Approximationen, *Math. Ann.* **92** (1924), no. 1-2, 115–125.

[55] A. YA. KHINTCHINE, Eine Verschärfung des Poincaréschen "Wiederkehr-Satzes", *Compos. Math.* **1** (1935), 177–179.

[56] M. LERCH, Question 1547, *L'Intermediaire des Mathématiciens* **11** (1904), 144–145.

[57] YU. V. LINNIK, The large sieve, *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.)* **30** (1941), 292–294.

[58] J. LIOUVILLE, Remarques relatives à des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques, *C. R. Acad. Sci. Paris* **18** (1844), 883–885.

[59] J. LIOUVILLE, Nouvelle démonstration d'un théorème sur les irrationnelles algébriques, *C. R. Acad. Sci. Paris* **18** (1844), 910–911.

[60] J. LIOUVILLE, Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques, *J. Math. Pures Appl.* **1** (1851), 133–142.

[61] MATTERS MATHEMATICAL, Fields Medalist Klaus Roth (1925–2015) has left a fortune to health charities, 2016, `https://mattersmathematical.wordpress.com/2016/04/27/fields-medalist-klaus-roth-1925-2015-has-left-a-fortune-to-health-charities/`

[62] A. LOTT, Roth's theorem on arithmetic progressions, 2017, `https://people.math.rochester.edu/faculty/iosevich/lott17.pdf`

[63] K. O'BRYANT, A complete annotated bibliography of work related to Sidon sequences, *Electron. J. Combin, Dynamic Surveys* **DS11** (2004), 39 páginas.

[64] F. P. RAMSEY, On a problem of formal logic, *Proc. London Math. Soc.* **30** (1929), 264–286.

[65] D. RIDOUT, Rational approximations to algebraic numbers, *Mathematika* **4** (1957), 125–131.

[66] C. A. Rogers, B. J. Birch, H. Halberstam y D. A. Burgess, Harold Davenport. 1907–1969, *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society* **17** (1971), 159–192.

[67] K. F. Roth, A problem in additive number theory, *Proc. London Math. Soc. (2)* **53** (1951), 381–395.

[68] K. F. Roth, On certain sets of integers, *J. Lond. Math. Soc.* **28** (1953), 104–109.

[69] K. F. Roth, On certain sets of integers II, *J. Lond. Math. Soc.* **29** (1954), 20–26.

[70] K. F. Roth, On irregularities of distribution, *Mathematika* **1** (1954), 73–79.

[71] K. F. Roth, Rational aproximation to algebraic numbers, *Mathematika* **2** (1955), no. 3, 1–20.

[72] K. F. Roth, On the large sieve of Linnik and Rényi, *Mathematika* **12** (1965), no. 23, 1–9.

[73] K. F. Roth, Irregularities of sequences relative to arithmetic progressions, *Math. Ann.* **169** (1967), 1–25.

[74] K. F. Roth, Irregularities of sequences relative to arithmetic progressions. II, *Math. Ann.* **174** (1967), 41–52.

[75] K. F. Roth, Irregularities of sequences relative to arithmetic progressions. IV, *Period. Math. Hungar.* **2** (1972), 301–326.

[76] W. Rudin, Trigonometric series with gaps, *J. Math. Mech.* **9** (1960), no. 2, 203–227.

[77] T. Sanders, On Roth's theorem on progressions, *Ann. of Math. (2)* **174** (2011), no. 1, 619–636.

[78] W. M. Schmidt, Simultaneous approximation to algebraic numbers by rationals, *Acta Math.* **125** (1970), 189–201.

[79] W. M. Schmidt, Irregularities of distribution. VII, *Acta Arith.* **21** (1972), 45–50.

[80] W. M. Schmidt, The subspace theorem in Diophantine approximations, *Compositio Math.* **69** (1989), 121–173.

[81] S. Sidon, Ein Satz über trigonometrische Polynome und seine Anwendung in der Theorie der Fourier-Reihen, *Math. Ann.* **106** (1932), no. 1, 536–539.

[82] C. L. Siegel, Approximationen algebraischer Zahlen, *Math. Z.* **10** (1921), 173–213.

[83] M. M. Skriganov, Coding theory and uniform distributions, *St. Petersburg Math. J.* **13** (2002), no. 2, 301–337.

[84] A. K. Szemerédi, *Art in the life of mathematicians*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

[85] E. Szemerédi, On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression, *Acta Arith.* **27** (1975), 199–245.

[86] The Scotsman, *Mathematician leaves £1m to help sick patients in Inverness*, 2016, `https://www.scotsman.com/news/mathematician-leaves-aps1m-help-sick-patients-inverness-1477974`

[87] THE TELEGRAPH, *Klaus Roth, mathematician-obituary*, 2016.

[88] A. THUE, Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen, *J. Reine Angew. Math.* **135** (1909), 284–305.

[89] J. A. TODD (EDITOR), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1958*, Cambridge University Press, Cambridge, 1960.

[90] G. TRAVAGLINI, Average decay of the Fourier transform, *Fourier Analysis and Convexity*, 245–268, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser, 2004.

[91] TWITTER, Tweets related to Klaus Roth, `https://www.dead-people.com/Klaus-Roth`

[92] UCL DEPARTMENT OF MATHEMATICS, *De Morgan Association Newsletter*, 2015, `https://www.ucl.ac.uk/maths/sites/maths/files/demorgan_newsletter_2015.pdf`

[93] I. M. VINOGRADOV, The method of trigonometrical sums in the theory of numbers, *Trav. Inst. Math. Stekloff* **23** (1947), 1–109.

[94] B. L. VAN DER WAERDEN, Beweis einer Baudetschen Vermutung, *Nieuw Arch. Wisk.* **15** (1927), 212–216.

[95] M. WALDSCHMIDT, Schmidt subspace theorem and S-unit equation, 2015, `https://webusers.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt/articles/pdf/SubspaceTheoremOujda2015.pdf`

[96] H. WEYL, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, *Math. Ann.* **77** (1916), no. 3, 313–352.

[97] H. WOŹNIAKOWSKI, Average case complexity of multivariate integration, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **24** (1991), 185–194.

JORGE JIMÉNEZ URROZ, DPTO. DE MATEMÁTICAS, UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA, Y E.T.S. DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS, UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Correo electrónico: `jorge.urroz@upc.edu` y `jorge.urroz@upm.es`

Página web: `https://web.mat.upc.edu/jorge.urroz/`