Cuatro variaciones sobre el teorema de Picard

por

José González Llorente

Resumen. El teorema de Picard es uno de los resultados más relevantes de la Teoría de Funciones de Variable Compleja. Desde su aparición, la sucesión de pruebas, extensiones y reinterpretaciones se ha prolongado casi ininterrumpidamente hasta la actualidad. En este artículo proponemos cuatro variaciones que exploran conexiones y paralelismos entre el teorema de Picard y familias normales, ecuaciones funcionales, superficies mínimas y una interpretación reciente en términos del rango de aplicaciones armónicas.

1. Introducción

En 1879, el joven de 23 años E. Picard dejó estupefacta a la comunidad matemática de la época cuando anunció el que hoy conocemos como *teorema pequeño de Picard*: una función holomorfa no constante en $\mathbb{C}$ toma todos los valores complejos con una posible excepción. Supongamos que $V = (V_1, V_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial (suficientemente regular) incompresible e irrotacional (por ejemplo, el campo estacionario de velocidades de un fluido bidimensional ideal; ver la figura 2). Si V no es un campo constante, ¿qué cardinal puede tener el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus V(\mathbb{R}^2)$? Es bien conocido que, bajo las hipótesis anteriores, V es solución del sistema

$$\begin{cases} \operatorname{div} V = 0, \\ \operatorname{rot} V = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

y los lectores comprobarán fácilmente que (1.1) equivale a las ecuaciones de Cauchy-Riemann para el campo $\overline{V} = (V_1, -V_2)$. Es decir, en notación compleja, $\overline{V(z)}$ es una

Figura 1: Émile Picard (1856–1941).

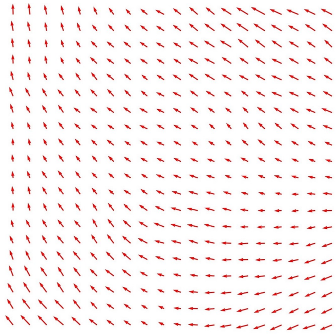

Figura 2: Un campo vectorial plano.

función holomorfa en $\mathbb{C}$. Por tanto, el teorema de Picard proporciona la respuesta a la pregunta planteada: a menos que V sea un campo constante, $V(\mathbb{R}^2)$ contiene todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ salvo, a lo sumo, una posible excepción.

En lo que sigue, la familia de funciones holomorfas (resp., meromorfas) en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ se denotará por $\mathcal{H}(\Omega)$ (resp., $\mathcal{M}(\Omega)$); y, si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, diremos que f es **entera**.

TEOREMA (Pequeño de Picard, [26]). *Si una función entera omite* 2 *valores complejos, entonces es constante. En particular, si una función meromorfa en* $\mathbb{C}$ *omite* 3 *puntos en la esfera de Riemann, entonces es constante.*

Muy poco después de [26], Picard obtuvo el siguiente resultado:

TEOREMA (Grande de Picard, [27]). *Si f es analítica en $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ y tiene una singularidad esencial en z_0, entonces f toma cada valor complejo, con una posible excepción, infinitas veces.*

Los teoremas de Picard son resultados acerca del **rango** de funciones holomorfas (o meromorfas), y en su momento proporcionaron mejoras sustanciales de resultados previos. El teorema pequeño refuerza notablemente la conclusión de los teoremas de Liouville (si una función entera omite un disco o un semiplano entonces es constante), mientras que el teorema grande extiende el teorema de Casorati-Weierstrass (el rango de una función analítica en cualquier entorno de una singularidad esencial es denso en $\mathbb{C}$). No debería constituir una sorpresa que el teorema grande implique el teorema pequeño. En efecto, supóngase que f es entera y omite dos valores complejos. Entonces la función $g(z) = f(1/z)$ tiene una singularidad aislada en $z = 0$. Por el teorema grande, esta singularidad no puede ser esencial. Si la singularidad fuese evitable, f sería acotada y por tanto constante, por el teorema de Liouville. Finalmente, si la singularidad fuese un polo, entonces f sería un polinomio. Como un polinomio toma todos los valores complejos a menos que sea constante, f también debería ser constante.

Los teoremas de Picard causaron una gran expectación entre la comunidad matemática de la época y, desde su aparición, se han obtenido un buen número de pruebas diferentes. Tal y como ocurre con todos los resultados relevantes, sus extensiones, generalizaciones y conexiones con otras áreas han alimentado el desarrollo de numerosas líneas de investigación, algunas de las cuales se prolongan en la actualidad. Desde la prueba original de Picard, basada en el uso de la función modular (el recubrimiento universal de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$), los teoremas de Bloch y Schottky, la teoría de Nevanlinna, los teoremas de Montel, el principio heurístico y las pruebas basadas en curvatura de métricas, hasta las más recientes interpretaciones reales, cada aportación ha contribuido al crecimiento de la Teoría Geométrica de Funciones.

El presente artículo no aspira a ser una recopilación de demostraciones de los teoremas de Picard. Por el contrario, el punto de vista adoptado es más bien musical: alrededor del tema central se han elegido (con criterios subjetivos) cuatro piezas o *variaciones* que muestran relaciones más o menos directas entre los teoremas de Picard y otras ideas matemáticas.

El artículo se estructura en cuatro partes que corresponden a cada una de las variaciones. La primera variación se centra en la relación estrecha entre los teoremas de Picard y familias normales, con especial atención a la formulación de Zalcman del principio heurístico de Bloch. La segunda variación describe la conexión clásica (ya observada por Borel y Montel) entre el teorema pequeño de Picard y la ecuación funcional de Fermat. La tercera variación, de naturaleza más geométrica, explora el paralelismo entre el rango de funciones holomorfas y el rango de la aplicación de Gauss de una superficie mínima. Finalmente, la cuarta variación aborda el enfoque real al teorema de Picard basado en la prueba *armónica* de J. Lewis e incluye una generalización reciente en términos del rango de aplicaciones armónicas en el plano.

2. Familias normales y el principio heurístico de Bloch

En opinión de L. Zalcman, el nacimiento de la moderna Teoría de Funciones de Variable Compleja coincide con la aparición del primer tratado de P. Montel sobre *familias normales* ([19]). Una familia $\mathcal{F}$ de funciones holomorfas en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ es *normal* si toda sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ tiene una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ tal que, o bien $\{f_{n_k}\}$ converge uniformemente en compactos de Ω (a una función holomorfa en Ω), o bien $\{|f_{n_k}|\}$ diverge uniformemente a ∞ en compactos de Ω. Por ejemplo, la familia $\mathcal{F} = \{nz : n = 1, 2, 3, \dots\}$ no es normal en ningún dominio que contenga al 0, pero sí es normal en $\mathbb{D} \setminus \{0\}$.

Algunos autores excluyen la segunda posibilidad de la definición de normalidad. Sin embargo, si una sucesión diverge a ∞ puede entenderse que no hay gran dispersión de valores en la esfera de Riemann y por ello la definición que hemos dado (de hecho, la clásica) se adapta mejor al caso de funciones meromorfas. Resulta conveniente expresar la normalidad con la ayuda de la *métrica cordal (o esférica)* (ver [2, cap. 1]), dada por

$$\chi(z, w) = \frac{2|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2}\sqrt{1 + |w|^2}}, \qquad z, w \in \mathbb{C},$$
$$\chi(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$$

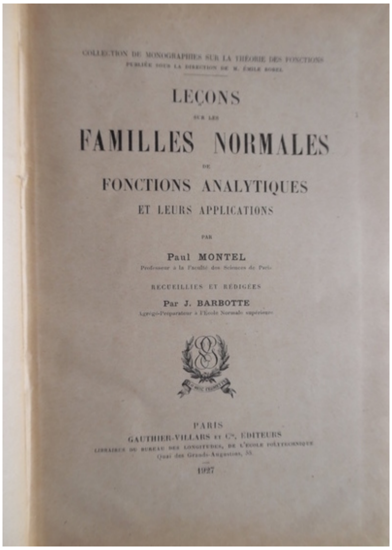

Figura 3: Portada del tratado de Montel sobre familias normales (1927), [22].

En general, una familia $\mathcal{F}$ de funciones meromorfas en Ω es *normal* si cada sucesión en $\mathcal{F}$ contiene una subsucesión que converge uniformemente en compactos de Ω a una función meromorfa en Ω o a la contante ∞, respecto de la métrica esférica. Topológicamente, $\mathcal{F}$ es normal si y solo si es un conjunto relativamente compacto en la topología de la convergencia uniforme en compactos respecto de la métrica esférica. Es fácil comprobar que, para familias formadas por funciones holomorfas, las dos definiciones de normalidad coinciden.

Dada $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, se define su *derivada esférica* por

$$f^{\#}(z) = \lim_{h \to 0} \frac{\chi(f(z+h), f(z))}{h} = \frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$$

si z no es un polo de f, y $f^{\#}(z) = (1/f)^{\#}(z)$ en caso contrario.

La normalidad de una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(\Omega)$ equivale, por el teorema de Ascoli-Arzelà, a la equicontinuidad respecto de la métrica esférica. No es sorprendente por tanto que la normalidad sea a su vez equivalente a la acotación uniforme (en compactos de Ω) de cierta *derivada*. El siguiente resultado corrobora esta afirmación y confirma que la derivada apropiada es justamente la *derivada esférica*. Está contenido en la tesis de F. Marty, realizada bajo la dirección de P. Montel ([18]).

TEOREMA (Criterio de Marty). *Una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(\Omega)$ es normal si y solo si la familia $\{f^{\#} : f \in \mathcal{F}\}$ es localmente acotada, es decir, para cada compacto $K \subset \Omega$ existe $C(K) > 0$ tal que $f^{\#}(z) \le C(K)$ para todo $z \in K$.*

El punto culminante de los trabajos de Montel sobre familias normales es el siguiente resultado, conocido como *criterio fundamental de normalidad* (CFN):

Teorema (Criterio fundamental de normalidad, [20]). *La familia de las funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ que omiten los valores 0 y 1 es normal.*

No es difícil comprobar que el CFN implica el teorema grande de Picard. Supongamos que f es holomorfa en $D(0, r) \setminus \{0\}$, tiene una singularidad esencial en 0 y toma los valores 0 y 1 un número finito de veces. Si

$$f_n(z) = f\left(\frac{z}{2^n}\right)$$

entonces, para n suficientemente grande, f_n es holomorfa en el anillo $A = \{\frac{1}{2} < |z| < 2\}$ y omite los valores 0 y 1. Por el criterio fundamental de normalidad, $\{f_n\}$ es una familia normal en A. Por tanto existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ tal que, o bien $\{f_{n_k}\}$ converge uniformemente en $\{|z| = 1\}$, o bien $\{|f_{n_k}|\}$ diverge uniformemente a ∞ en $\{|z| = 1\}$. En el primer caso, f es uniformemente acotada en las circunferencias $\{|z| = 2^{-n_k}\}$ para $k \geq k_0$, y del principio del máximo se deduce que f es acotada en $D(0, r') \setminus \{0\}$ para algún $r' > 0$, lo cual contradice que 0 es una singularidad esencial de f. En el segundo caso, el mismo argumento mostraría que $|f(z)| \to \infty$ si $z \to 0$, lo cual también contradice que 0 sea una singularidad esencial. Las dos posibilidades conducen a contradicción, y con ello se demuestra que el CFN implica el teorema grande.

Tenemos, por tanto, la siguiente cadena de implicaciones:

$$\text{CFN} \;\Rightarrow\; \text{teorema grande de Picard} \;\Rightarrow\; \text{teorema pequeño de Picard.} \tag{2.1}$$

La coincidencia en las hipótesis sobre las funciones en el CFN y en el teorema pequeño sugiere que tal vez exista una conexión entre ambos resultados. ¿Podría ser el caso que el teorema pequeño implique formalmente el CFN, de manera que las implicaciones en (2.1) sean reversibles? Que esto es efectivamente así es parte de un fenómeno más general, tradicionalmente conocido como *principio heurístico de Bloch*. El principio heurístico afirma (informalmente) que el hecho de que toda función entera que verifique cierta *propiedad* sea *constante* es equivalente a que la familia de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ que satisfacen esa propiedad sea *normal*. El origen del principio heurístico se atribuye a una enigmática frase en una de las obras del matemático francés André Bloch ([5]), *Nihil est in infinito quod non prius fuerit in finito*, traducida liberalmente como *Nada existe en el plano complejo que no ocurra previamente en el disco unidad*. Aunque en los trabajos de Bloch no hay aparentemente ninguna otra mención más explícita, el nombre de Bloch fue citado posteriormente por Valiron ([33]) en relación al principio heurístico. Las contribuciones de Bloch a la teoría de funciones de una y varias variables complejas resultaron profundamente innovadoras e influyentes, algo especialmente significativo si se tiene en cuenta que desarrolló la casi totalidad de su obra matemática en el hospital psiquiátrico de Charenton. Ver [8] para más detalles sobre la dramática vida de Bloch.

Sin matices adicionales, el principio heurístico es falso tal y como ha sido enunciado: tomemos, por ejemplo, la propiedad *ser acotada*. Por supuesto, toda función entera acotada es constante por el teorema de Liouville. Sin embargo, la familia $\mathcal{F} = \{nz : n = 1, 2, 3, \dots\}$ está formada por funciones holomorfas acotadas en $\mathbb{D}$ y no es normal en $\mathbb{D}$. La clave parece estar en el significado preciso de *propiedad*. ¿Qué propiedades debe cumplir una *propiedad*? La conveniencia de abordar rigurosamente esta pregunta ya fue señalada por A. Robinson en [30], y la consiguiente labor de formalización posterior se debe fundamentalmente a L. Zalcman ([35, 32]). Antes de nada necesitamos un poco de notación.

Una *propiedad* $\mathcal{P}$ en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un subconjunto de funciones holomorfas (meromorfas) en Ω. Para indicar que una función f holomorfa (meromorfa) en Ω satisface la propiedad $\mathcal{P}$ denotaremos $\langle f, \Omega \rangle \in \mathcal{P}$, de acuerdo con la notación de Robinson. Consideremos las siguientes propiedades de invariancia relativas a una propiedad $\mathcal{P}$:

P1. Si $\langle f, \Omega \rangle \in \mathcal{P}$ y $\Omega' \subset \Omega$, entonces $\langle f, \Omega' \rangle \in \mathcal{P}$.

P2. Si $\langle f, \Omega \rangle \in \mathcal{P}$ y $\phi(z) = az + b$, entonces $\langle f \circ \phi, \phi^{-1}(\Omega) \rangle \in \mathcal{P}$.

P3. Si $\langle f_n, \Omega_n \rangle \in \mathcal{P}$, donde $\Omega_n \uparrow \mathbb{C}$, y si $f_n \to f$ uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$ (respecto de la métrica esférica), entonces $\langle f, \mathbb{C} \rangle \in \mathcal{P}$.

Nótese que, por ejemplo, la propiedad *ser acotada* claramente no verifica P3. Ahora ya estamos en condiciones de enunciar la versión de Zalcman del principio heurístico ([35], ver también [32]):

TEOREMA 2.1 (Principio heurístico de Zalcman). *i) Supongamos que la propiedad $\mathcal{P}$ cumple las propiedades P1, P2 y P3 anteriores y que toda función entera g con $\langle g, \mathbb{C} \rangle \in \mathcal{P}$ es constante. Entonces, la familia $\{f : \langle f, \mathbb{D} \rangle \in \mathcal{P}\}$ es normal en $\mathbb{D}$.*

ii) Supongamos que la propiedad $\mathcal{P}$ cumple las propiedades P1 y P2 anteriores y sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\mathbb{D})$ (resp., $\mathcal{M}(\mathbb{D})$) tal que $\langle f, \mathbb{D} \rangle \in \mathcal{P}$ para cada $f \in \mathcal{F}$. Entonces, toda función entera (resp., meromorfa en $\mathbb{C}$) g tal que $\langle g, \mathbb{C} \rangle \in \mathcal{P}$ es constante.

Como aplicación canónica del principio heurístico veamos que, efectivamente, el teorema pequeño de Picard implica el CFN y, por consiguiente, el teorema grande. Sea $\mathcal{P}$ la propiedad

$$\langle f, \Omega \rangle \in \mathcal{P} \;\Leftrightarrow\; f \text{ es constante o bien omite los valores } 0 \text{ y } 1.$$

Es obvio que $\mathcal{P}$ cumple las condiciones P1 y P2, y también cumple P3 por el teorema de Hurwitz ([2, cap. 5]). Si asumimos el teorema pequeño de Picard, entonces se satisfacen las hipótesis de i) en el teorema 2.1, y por tanto obtenemos que la familia $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \langle f, \mathbb{D} \rangle \in \mathcal{P}\}$ es normal, lo cual implica trivialmente el CFN. Esto confirma que las implicaciones en (2.1) son reversibles.

El ingrediente fundamental en la prueba del teorema 2.1 es el siguiente *lema de no normalidad* de Zalcman ([35]).

LEMA 2.1. *Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas (meromorfas) en $\mathbb{D}$. Entonces $\mathcal{F}$ **no** es normal en $\mathbb{D}$ si y solo si existen*

i) un número r, $0 < r < 1$,

ii) puntos z_n con $|z_n| < r$,

iii) funciones $f_n \in \mathcal{F}$,

iv) números positivos ρ_n *con* $\rho_n \to 0$, *y*

v) una función g *entera (resp., meromorfa en* $\mathbb{C}$*) no constante*

tales que

$$f_n(z_n + \rho_n z) \to g(z)$$

uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$ *(respecto de la métrica esférica). Además,*

$$g^{\#}(z) \leq g^{\#}(0) = 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Si bien el principio heurístico proporciona un camino directo para establecer resultados de normalidad a partir de los correspondientes resultados funcionales, la verificación de las condiciones P1, P2 y P3 puede ser problemática, especialmente si en la definición de la propiedad $\mathcal{P}$ intervienen derivadas. En la práctica resulta incluso más efectivo usar el lema 2.1 de no normalidad (vía contradicción) para probar que cierta familia es normal. Como aplicación, veamos una demostración del CFN basada en el lema 2.1 y en un elegante argumento de A. Ros ([31], ver también [12, p. 321]).

Sea $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : f \neq 0, 1\}$. Supondremos que $\mathcal{F}$ no es normal y obtendremos una contradicción. Sea

$$S_n = \{0\} \cup \{e^{i2\pi k/n} : k = 0, 1, \ldots, n-1\}$$

y $\mathcal{F}_n$ la familia de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ que omiten S_n. Si $f \in \mathcal{F}_n$ entonces $f^n \in \mathcal{F}$ y, recíprocamente, si $f \in \mathcal{F}$ entonces $\sqrt[n]{f} \in \mathcal{F}_n$. En particular, si $\mathcal{F}$ no es normal entonces $\mathcal{F}_n$ no es normal para cada n. Por el lema 2.1, existe una función entera no constante g_n que es límite uniforme en compactos de $\mathbb{C}$ de funciones que omiten S_n; por tanto, por el teorema de Hurwitz, g_n también omite S_n. Además, $g_n^{\#}(z) \leq g_n^{\#}(0) = 1$. Hagamos $T_n = S_{2^n}$, $G_n = g_{2^n}$. Puesto que $G_n^{\#} \leq 1$ en $\mathbb{C}$ y $G_n^{\#}(0) = 1$, el criterio de Marty afirma que $\{G_n\}$ es una familia normal y, por tanto, tiene una subsucesión convergente uniformemente a G en compactos. Como $G^{\#}(0) = 1$, G es entera y no constante. Por otra parte, los conjuntos T_n son crecientes y cada G_n omite T_n; por tanto G omite $\cup T_n$, un subconjunto denso en $\partial\mathbb{D}$. Puesto que $G(\mathbb{C})$ es abierto, se deduce que o bien $G(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ o bien $G(\mathbb{D}) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. En ambos casos, el teorema de Liouville implica que G es constante y por tanto llegamos a contradicción.

Para cerrar la sección veremos un resultado debido a Carathéodory que se obtiene como aplicación directa del principio heurístico.

Teorema 2.2 ([7, vol. II, p. 202]). *Sea* $\varepsilon > 0$ *y* $\mathcal{F}$ *una familia de funciones meromorfas en* $\mathbb{D}$. *Supongamos que cada* $f \in \mathcal{F}$ *omite* 3 *puntos distintos* a, b, c *en la esfera de Riemann (que podrían depender de* f*) tales que*

$$\chi(a, b) \cdot \chi(a, c) \cdot \chi(b, c) \geq \varepsilon. \tag{2.2}$$

Entonces, $\mathcal{F}$ *es normal en* $\mathbb{D}$.

El teorema 2.2 se deduce del principio heurístico y de la versión meromorfa del teorema pequeño de Picard con relativa facilidad. Consideremos la propiedad $\mathcal{P}$ dada por «f omite tres valores a, b, c que verifican (2.2)». Las propiedades P1 y P2 se satisfacen trivialmente. Para P3, supongamos que $\chi(f_n, f) \to 0$ uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$ y cada f_n omite a_n, b_n, c_n, con $\chi(a_n, b_n) \cdot \chi(a_n, c_n) \cdot \chi(b_n, c_n) \geq \varepsilon$. Debemos comprobar que f también satisface $\mathcal{P}$. Podemos suponer que f no es constante porque las constantes satisfacen $\mathcal{P}$ trivialmente. Por la compacidad de la esfera de Riemann, existen 3 puntos límite a, b, c y subsucesiones (a las que seguiremos llamando a_n, b_n, c_n) tales que

$$\chi(a_n, a) \to 0, \quad \chi(b_n, b) \to 0, \quad \chi(c_n, c) \to 0$$

y, por continuidad, $\chi(a, b) \cdot \chi(a, c) \cdot \chi(b, c) \geq \varepsilon$. Únicamente faltaría probar que f omite a, b, c, y esto es esencialmente consecuencia del teorema de Hurwitz. Por tanto $\mathcal{P}$ satisface P3 (ver [35] para más detalles y [3] para extensiones recientes de los resultados de Montel y Carathéodory). Una vez comprobado que $\mathcal{P}$ verifica P1, P2 y P3, basta observar que toda función meromorfa en $\mathbb{C}$ con la propiedad $\mathcal{P}$ es constante, por el teorema pequeño de Picard. Las hipótesis en el apartado i) del teorema 2.1 se cumplen, y por tanto $\mathcal{F}$ es normal en $\mathbb{D}$.

Durante los últimos 50 años se han obtenido, con la ayuda de técnicas de teoría de Nevanlinna y de extensiones del lema 2.1, numerosos resultados de normalidad para familias de funciones holomorfas o meromorfas tales que las funciones o sus derivadas omiten valores (ver [10, 4, 36, 32]). Por otra parte, la noción de normalidad se convirtió rápidamente en una herramienta esencial en el estudio de la *iteración* de funciones meromorfas, un tema que no ha dejado de suscitar interés desde que los trabajos clásicos de Julia y Fatou explotaron la nueva teoría desarrollada por Montel.

3. La ecuación funcional de Fermat

Como consecuencia de su estudio sistemático de las familias normales, Montel obtuvo las siguientes generalizaciones del criterio fundamental de normalidad y del teorema pequeño de Picard:

Teorema 3.1 ([21, 22]). *Sean $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$ y $\mathcal{F}$ la familia de las funciones holomorfas f en $\mathbb{D}$ tales que*

el orden de cada cero de f es un múltiplo entero de p (quizás cero), (3.1)

el orden de cada cero de $f - 1$ es un múltiplo entero de q (quizás cero). (3.2)

Entonces, $\mathcal{F}$ es una familia normal.

Teorema 3.2 ([21, 22]). *Sean $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$. Si f es entera y verifica (3.1) y (3.2), entonces f es constante.*

Nótese que el teorema 3.2 implica el teorema pequeño de Picard. Además, si $\mathcal{P}$ denota la propiedad

$$\langle f, \Omega \rangle \in \mathcal{P} \;\Leftrightarrow\; f \text{ verifica (3.1) y (3.2) en } \Omega,$$

entonces $\mathcal{P}$ satisface la condición ii) en el enunciado del principio heurístico (teorema 2.1). Por tanto, el teorema 3.2 se deduce del teorema 3.1 vía principio heurístico.

Borel y Montel ya observaron la conexión entre el teorema 3.2, el teorema de Picard y ecuaciones funcionales ([6, 20, 21]). Supongamos que F y G son funciones enteras que satisfacen $F^p + G^q = 1$, donde $p, q \in \mathbb{N}$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$. Entonces $f = F^p = 1 - G^q$ verifica las hipótesis del teorema 3.2, y por tanto es constante, lo cual implica que F y G son también constantes. Se obtiene así la siguiente versión del teorema 3.2 en términos de ecuaciones funcionales:

Teorema 3.3 ([21, 22]). *Sean $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$. Entonces la ecuación funcional*

$$F^p + G^q = 1$$

no admite soluciones enteras no constantes.

Corolario 3.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Entonces la ecuación de Fermat*

$$F^n + G^n = 1$$

no admite soluciones enteras no constantes.

La imposibilidad de elegir $p = q = n = 2$ en los teoremas 3.2, 3.3 y en el corolario 3.1 se comprueba tomando $f = \operatorname{sen} z$ y $F = \operatorname{sen} z$, $G = \cos z$.

Hemos mencionado que el teorema pequeño de Picard es un caso particular del teorema 3.2. En relación al itinerario inverso, Montel planteó en [20] si los teoremas 3.2 y 3.3 podrían a su vez deducirse directamente del teorema pequeño de Picard mediante un argumento elemental. Véase [15] para una respuesta positiva a la pregunta de Montel.

La interrelación entre ecuaciones funcionales, ecuaciones diofánticas y el rango de funciones enteras y meromorfas ha generado numerosos problemas interesantes, algunos de los cuales todavía permanecen abiertos. Veamos un ejemplo significativo. Sean $n, k \in \mathbb{N}$ y consideremos la ecuación funcional de Fermat

$$f_1^n + \cdots + f_k^n = 1. \tag{3.3}$$

Para $k = 2$, el corolario 3.1 afirma que las soluciones enteras de (3.3) son constantes si $n \geq 3$, y además 3 es el exponente óptimo. Sin embargo, si $k \geq 3$ existen valores de n para los cuales la respuesta se desconoce. Por ejemplo, si $k = 3$ se sabe que (3.3) tiene soluciones enteras no constantes para $1 \leq n \leq 5$ y que las soluciones enteras son constantes si $n \geq 7$, pero el problema permanece abierto para $n = 6$, y lo mismo ocurre si $k = 4$ y $8 \leq n \leq 12$. El mismo tipo de problemas surge cuando en (3.3) se sustituye *enteras* por *meromorfas*, *racionales* o *polinomios*. Ver [13, 14] y sus referencias para descripciones más detalladas sobre las soluciones de (3.3) en las cuatro clases de funciones anteriores. Véase también [14, sección 3] para un análogo funcional de la conjetura *abc* en términos de funciones enteras.

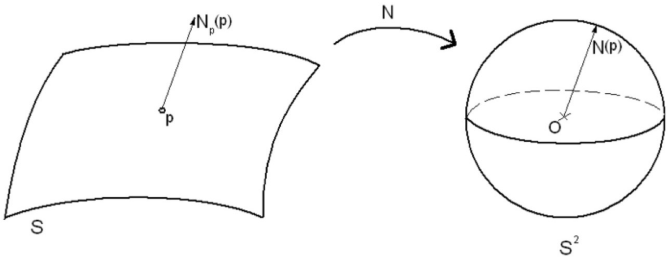

Figura 4: Aplicación de Gauss.

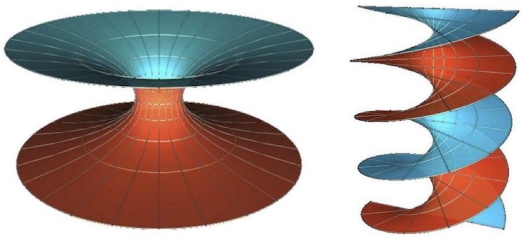

Figura 5: Catenoide y helicoide.

4. EL RANGO DE LA APLICACIÓN DE GAUSS DE UNA SUPERFICIE MÍNIMA

En toda la sección, $S \subset \mathbb{R}^3$ denota una superficie regular orientable completa y N su aplicación de Gauss (ver la figura 4). Remitimos a [24] para los prerrequisitos básicos de la teoría de superficies en $\mathbb{R}^3$. Una pregunta natural, desde un punto de vista geométrico, es ¿qué se puede decir de la distribución de valores de N? La respuesta a esta pregunta resulta especialmente satisfactoria si nos restringimos a la clase de superficies *mínimas* en $\mathbb{R}^3$. Una superficie mínima se caracteriza porque su *curvatura media* es 0. Las superficies mínimas resultan ser los puntos críticos del *funcional de área*, lo cual enlaza con el origen histórico de las superficies mínimas como soluciones al problema de encontrar una superficie de área mínima limitada por una curva frontera dada (problema de Plateau). El catenoide, la helicoide y la superficie de Enneper (ver las figuras 5 y 6) son ejemplos clásicos de superficies mínimas.

Existe otra caracterización que pone de manifiesto la estrecha conexión entre superficies mínimas y funciones de variable compleja. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y $X : \Omega \to S \subset \mathbb{R}^3$ una parametrización de S, con $X(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$. Denotemos por X_u, X_v los respectivos vectores tangentes y

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}$$

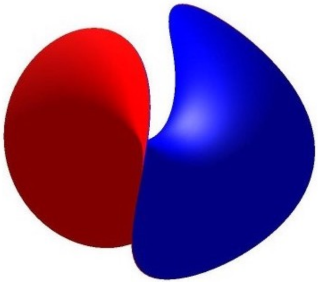

Figura 6: Superficie de Enneper.

la aplicación de Gauss. Se dice que (u,v) son coordenadas *isotermas* de S si X es una transformación conforme del plano de parámetros (u,v) en S o, equivalentemente,

$$X_u \cdot X_u = X_v \cdot X_v = \lambda^2(u,v), \quad X_u \cdot X_v = 0, \tag{4.1}$$

es decir, $ds^2 = \lambda^2(u,v)(du^2 + dv^2)$, siendo ds la métrica en S inducida de $\mathbb{R}^3$ y λ el llamado *factor conforme*. La existencia de coordenadas isotermas locales en superficies es un hecho clásico (ver [24] para una prueba específica en el caso de superficies mínimas), y tiene como consecuencia relevante que una superficie riemanniana admite una estructura de superficie de Riemann. Si X es una parametrización de S en coordenadas isotermas (u,v) como en (4.1) y $\Delta X = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)$, un poco de cálculo muestra que ΔX es paralelo a N y, además,

$$H = \frac{\Delta X \cdot N}{2\lambda^2}, \tag{4.2}$$

donde H denota la curvatura media. Por tanto, de (4.2) se deduce que S es *mínima* si y solo si $\Delta X = 0$, es decir, las coordenadas x_1, x_2, x_3 son funciones *armónicas* de los parámetros (u,v). Una consecuencia notable de esta representación y del principio del máximo para funciones armónicas es que no existen superficies mínimas *compactas*.

En este punto resulta conveniente introducir notación compleja. Puesto que $x_j(u,v)$ es armónica en Ω,

$$\phi_j = \frac{\partial x_j}{\partial u} - i\frac{\partial x_j}{\partial v}$$

es holomorfa en Ω, $j = 1,2,3$. Se comprueba que las ϕ_j verifican

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0, \quad |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 = 2\lambda^2 > 0, \tag{4.3}$$

donde la identidad (resp., desigualdad) en (4.3) es equivalente a que las coordenadas (u,v) sean isotermas (resp., a que S es regular). Si ahora se definen

$$f = \phi_1 - i\phi_2, \quad g = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2},$$

entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $g \in \mathcal{M}(\Omega)$. Un cálculo sencillo muestra que las ϕ_j se expresan en términos de f y g mediante

$$\phi_1 = \frac{1}{2} f(1 - g^2), \quad \phi_2 = \frac{i}{2} f(1 + g^2), \quad \phi_3 = fg, \tag{4.4}$$

lo cual indica que fg y fg^2 son holomorfas; en particular, los ceros de f coinciden con los polos de g, y f tiene un cero de orden $2m$ en cualquier punto donde g tenga un polo de orden m. Por otra parte, si Ω es simplemente conexo y φ_j es holomorfa tal que $\operatorname{Re} \varphi_j = x_j$, entonces $\varphi_j' = \phi_j$, $j = 1, 2, 3$. Integrando,

$$\begin{cases} x_1(z) = \operatorname{Re} \displaystyle\int_{z_0}^{z} \phi_1 = \operatorname{Re} \int_{z_0}^{z} \frac{1}{2} f(1 - g^2), \\ x_2(z) = \operatorname{Re} \displaystyle\int_{z_0}^{z} \phi_2 = \operatorname{Re} \int_{z_0}^{z} \frac{i}{2} f(1 + g^2), \\ x_3(z) = \operatorname{Re} \displaystyle\int_{z_0}^{z} \phi_3 = \operatorname{Re} \int_{z_0}^{z} fg, \end{cases} \tag{4.5}$$

donde $z = u + iv$, $z_0 \in \Omega$ y la integración se realiza a lo largo de cualquier camino en Ω que conecte z_0 y z. Además, el proceso es reversible: si f y g cumplen los requisitos especificados anteriormente y $x_j(u, v)$ se definen mediante (4.5), $j = 1, 2, 3$, entonces X es una parametrización de una superficie mínima regular $S = X(\Omega)$ en las coordenadas isotermas (u, v).

Las parametrizaciones (4.4) y (4.5) se conocen como representación de *Enneper-Weierstrass* de la superficie mínima y juegan un papel fundamental en el desarrollo de la teoría. En la siguiente tabla se indican duplas (f, g) para la superficie de Enneper, el catenoide y el helicoide, con $\Omega = \mathbb{C}$ en los tres casos:

	f	g
Enneper	1	z
catenoide	$-e^{-z}$	$-e^{z}$
helicoide	e^{-z}	$-ie^{z}$

Una superficie S es *completa* si cualquier curva divergente en S tiene longitud infinita (una curva es divergente si abandona eventualmente cualquier compacto). Hemos mencionado que una superficie mínima S tiene una estructura natural de superficie de Riemann. Asociada a S existe una superficie mínima simplemente conexa $\widetilde{S}$, llamada *recubrimiento universal* de S, y una aplicación recubridora localmente conforme $\pi : \widetilde{S} \to S$. Además $\widetilde{S}$ es completa si S es completa. En muchos problemas basta considerar, vía π, superficies mínimas simplemente conexas. Por el teorema de uniformización ([1]), el recubrimiento universal de cualquier superficie de Riemann se puede elegir entre el disco unidad $\mathbb{D}$, el plano complejo $\mathbb{C}$ o la esfera $\mathbb{S}^2$, y este último caso podemos descartarlo ya que no hay superficies mínimas compactas. Por tanto, en la práctica podemos reducirnos al caso en que $\Omega = \mathbb{D}$ o $\Omega = \mathbb{C}$.

La representación de Enneper-Weierstrass (4.5) permite no solo construir superficies mínimas sino también obtener información geométrica acerca de la superficie en términos de las funciones de variable compleja f y g. Por ejemplo, en el caso de la aplicación de Gauss, un poco de cálculo muestra que

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = \left(\frac{2\operatorname{Re} g}{|g|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im} g}{|g|^2+1}, \frac{|g|^2-1}{|g|^2+1} \right). \tag{4.6}$$

El lector reconocerá el término a la derecha de (4.6) como la proyección estereográfica en la esfera unidad de $g \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Por tanto (4.6) tiene la siguiente consecuencia importante: la aplicación de Gauss de S se *identifica* con la función meromorfa g de la representación de Enneper-Weierstrass. A partir de los valores de g se deduce que la aplicación de Gauss del catenoide y del helicoide omite dos puntos en la esfera de Riemann (los polos norte y sur) mientras que la aplicación de Gauss de la superficie de Enneper omite un punto de la esfera de Riemann ($g(z) = z$ omite el infinito, que corresponde al polo norte). Las tres superficies son completas.

Volvemos ahora a la cuestión que planteábamos al principio de la sección: dada una superficie mínima, ¿qué se puede decir del rango de su aplicación de Gauss? Un teorema clásico de Bernstein ([9, pp. 136–139]) afirma que los planos son las únicas superficies mínimas dadas por una gráfica global $z = f(x, y)$, donde $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Una gráfica global en $\mathbb{R}^2$ es una superficie simplemente conexa completa y, una vez elegida una orientación, su aplicación de Gauss omite una semiesfera en la esfera unidad. Esta observación condujo a Nirenberg a formular las dos conjeturas siguientes, que evocan los teoremas de Liouville y de Picard:.

Conjetura (N1). *Una superficie mínima completa cuya aplicación de Gauss omite un entorno de un punto en la esfera es un plano.*

Conjetura (N2). *Una superficie mínima completa cuya aplicación de Gauss omite* 3 *puntos de la esfera es un plano.*

La conjetura N1 fue resuelta afirmativamente por Osserman en [23]. Recordemos que, pasando al recubrimiento universal y utilizando la representación de Enneper-Weierstrass, podemos elegir $\Omega = \mathbb{C}$ o $\Omega = \mathbb{D}$ como dominio de parámetros. Mediante una rotación, se puede asumir que la función g (que representa la aplicación de Gauss) omite un entorno de ∞. Si $\Omega = \mathbb{C}$ entonces g sería entera y acotada, por tanto constante por el teorema de Liouville, y la superficie sería un plano. En [23], Osserman demostró que si $\Omega = \mathbb{D}$ y la aplicación de Gauss omite un entorno de ∞, entonces la superficie no puede ser completa. Esto establece N1. En cuanto a N2, es falsa en general. Si se pudiera tomar $\Omega = \mathbb{C}$ entonces el mismo argumento anterior, reemplazando el teorema de Liouville por el de Picard, mostraría que g es constante. Sin embargo, el caso $\Omega = \mathbb{D}$ es más rico y elecciones adecuadas de f y g en la representación de Enneper-Weierstrass muestran que, dado cualquier conjunto E de como máximo 4 puntos en la esfera unidad, existe una superficie mínima completa cuya aplicación de Gauss omite exactamente E (el resultado se debe a Voss, ver [25, p. 85]). Por tanto N2 es falsa tal y como fue enunciada. En 1981 Xavier ([34]) demostró que la aplicación de Gauss de una superficie mínima completa en $\mathbb{R}^3$ que no sea un plano puede omitir como máximo 6 puntos en la esfera. El resultado definitivo, en sintonía con el de Voss, se debe a Fujimoto:

TEOREMA 4.1 ([11]). *Una superficie mínima completa en* $\mathbb{R}^3$ *cuya aplicación de Gauss omite* 5 *puntos de la esfera es un plano.*

5. El punto de vista real. Rango de aplicaciones armónicas

Durante los años 80 y 90 se desarrolló el interés por entender el teorema de Picard desde un punto de vista *real.* En 1980 Rickman ([29]) obtuvo un teorema tipo Picard para funciones *cuasirregulares* de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. (Sin ánimo de entrar en definiciones técnicas, las funciones cuasirregulares transforman infinitesimalmente bolas en elipsoides de excentricidad controlada, y generalizan así las funciones holomorfas en el plano, que transforman infinitesimalmente discos en discos). En 1994 J. Lewis obtuvo una prueba abreviada del teorema de Rickman ([16]) basada en técnicas de teoría del potencial no lineal que culminaba trabajos previos de Eremenko-Sodin y Eremenko-Lewis. Un atractivo adicional del artículo de Lewis es que contiene la primera prueba real del teorema pequeño de Picard, en tanto que usa exclusivamente propiedades de las funciones *armónicas.* El argumento de Lewis consiste en reducir el teorema de Picard a un problema sobre distribución conjunta de funciones armónicas. En efecto, sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ holomorfa. Asociadas a f existen canónicamente dos funciones armónicas enteras: $u = \log |f|$ y $v = \log |f - 1|$. (En lo que sigue también utilizaremos la denominación *entera* para referirnos a una función armónica en $\mathbb{C}$). Un sencillo ejercicio muestra que si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, entonces

$$\big| \log^+ |z| - \log^+ |z - 1|\big| \leq \log 2$$

y

$$\text{máx}(\log |z|, \log |z - 1|) \geq - \log 2.$$

El teorema pequeño de Picard es consecuencia del siguiente resultado ([16], ver también [28]).

TEOREMA 5.1 (Lewis). *Sean u,v funciones armónicas enteras tales que*

$$|u^+ - v^+| \leq C, \tag{5.1}$$

$$\text{máx}(u, v) \geq -C \tag{5.2}$$

para alguna constante positiva C. *Entonces* u *y* v *son constantes.*

Que el teorema 5.1 implica el teorema pequeño de Picard es ahora fácil: si $u = \log |f|$ y $v = \log |f - 1|$ son constantes, argumentos elementales muestran que f también debe ser constante.

Obsérvese que de (5.1) y del teorema de Liouville armónico ([28]) se deduce que, si u es constante, entonces v también es constante. Por tanto, para demostrar el teorema 5.1 basta asumir que u no es constante y llegar a contradicción. La prueba de Lewis se divide en dos pasos. Suponiendo que u no es constante, el primer paso es un *lema de oscilación* (lema 5.1) que proporciona una sucesión de discos en los cuales u oscila significativamente pero de manera controlada. En el segundo paso, un argumento de reescala produce dos sucesiones de funciones armónicas en el disco unidad que capturan el comportamiento de u y v en los discos obtenidos en el lema de oscilación. Las hipótesis (5.1) y (5.2) junto con propiedades bien conocidas de las funciones armónicas conducen finalmente a una contradicción.

Antes de enunciar el lema de oscilación necesitamos un poco de notación. Si $D(z,r)$ es el disco (abierto) de centro $z \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$, definimos

$$M(u,z,r) = \sup_{D(z,r)} u.$$

Lema 5.1 (Lema de oscilación, [16]). *Sea $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ armónica, no constante. Entonces existe una sucesión de discos $D(z_n, r_n)$ tales que*

$$u(z_n) = 0, \tag{5.3}$$

$$\lim_n M(u, z_n, r_n) = +\infty, \tag{5.4}$$

$$M(u, z_n, r_n) \leq \alpha M(u, z_n r_n/2), \tag{5.5}$$

donde $\alpha > 0$ es una constante absoluta.

Nótese que (5.3) y (5.4) implican

$$\lim_n \inf_{D(z_n,r_n)} u = -\infty,$$

luego u oscila significativamente en los discos $D(z_n, r_n)$. La propiedad doblante (5.5) impone una cierta regularidad a la oscilación. Veamos ahora cómo el lema 5.1 junto con un argumento de reescala prueban el teorema 5.1. Sean u, v como en el teorema 5.1. Supondremos que u es no constante y llegaremos a una contradicción. Elegimos discos $D(z_n, r_n)$ como en el lema de oscilación (aplicado a u) y reescalamos al disco unidad:

$$U_n(z) = \frac{u(z_n + r_n z)}{M_n}, \quad V_n(z) = \frac{v(z_n + r_n z)}{M_n},$$

donde $M_n = M(u, z_n, r_n)$. Nótese que U_n, V_n son armónicas en $\mathbb{D}$ y verifican

$$U_n(0) = 0, \tag{5.6}$$

$$U_n \leq 1, \tag{5.7}$$

$$V_n \leq 1 + \frac{C}{M_n} \leq 2, \qquad n \geq n_0, \tag{5.8}$$

$$M(U_n, 0, 1/2) \geq \alpha. \tag{5.9}$$

Además, de (5.1) y (5.2) se deduce

$$|U_n^+ - V_n^+| \leq \frac{C}{M_n}, \tag{5.10}$$

$$\max(U_n, V_n) \geq -\frac{C}{M_n}. \tag{5.11}$$

Por (5.7), (5.8) y el teorema de Harnack, existe una subsucesión $\{n_k\}$ tal que $U_{n_k} \to U$, $V_{n_k} \to V$ uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$, donde U es armónica en $\mathbb{D}$ y V es armónica en $\mathbb{D}$ o quizás idénticamente $-\infty$. De (5.6) y (5.9) se deduce que $U(0) = 0$ y $M(U, 0, 1/2) \geq \alpha > 0$, en particular U es no constante y toma valores positivos y negativos. Por otra parte, (5.10) implica que $U^+ = V^+$ y, por continuación única, $U = V$. Finalmente, (5.11) implica $\max(U, V) \geq 0$, lo cual contradice que $U = V$ y que U también toma valores negativos. Esta contradicción establece el teorema 5.1.

El teorema 5.1 plantea preguntas en varias direcciones. Una de ellas, explorada en [17], es interpretar el resultado en función del rango de la aplicación $f = u+iv$. En lo que sigue, dadas dos funciones armónicas enteras $u, v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, nos referiremos a $f = u+iv : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como la *aplicación armónica* entera asociada a u, v. Por tanto, una aplicación armónica entera es simplemente un par de funciones armónicas enteras. Si $f = u + iv : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una aplicación armónica entera, denotaremos su *rango* por $\mathcal{R}_f = f(\mathbb{C})$. La principal motivación de los resultados en [17] es reinterpretar el teorema de Lewis en términos del rango $\mathcal{R}_f$. Como un primer ejemplo básico en esta dirección, el teorema de Liouville armónico se podría enunciar así: si $f = u+iv : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una aplicación armónica tal que $\mathcal{R}_f$ está contenido en el semiplano $\{(u, v) : au + bv \geq c\}$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces existe $d \geq c$ tal que $au + bv = d$; en particular $\mathcal{R}_f$ es un punto o una recta. En cuanto al teorema de Lewis, se puede reinterpretar así: si $f = u + iv : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una aplicación armónica tal que

$$\mathcal{R}_f \subset \{u + iv : |u^+ - v^+| \leq C,\ \max(u, v) \geq -C\} \equiv \mathcal{R}_{\mathrm{Le}} \tag{5.12}$$

para alguna constante $C > 0$, entonces f es constante. Observemos que el conjunto $\mathcal{R}_{\mathrm{Le}}$ en (5.12) es un entorno en forma de cruz de las semirrectas $\{u = v \geq 0\}$, $\{u = 0, v \leq 0\}$ y $\{v = 0, u \leq 0\}$ (ver la figura 7).

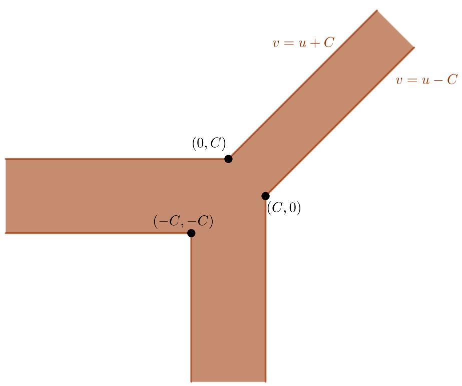

Figura 7: La región $\mathcal{R}_{\mathrm{Le}}$.

Los comentarios anteriores sugieren la pregunta siguiente: ¿qué condiciones sobre el rango $\mathcal{R}_f$ implican que la aplicación armónica f es constante? Antes de contestar esta pregunta necesitamos una definición. Dado $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}$, decimos que $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$ es una *dirección asintótica* de $\mathcal{R}$ si existe una sucesión $\{w_n\} \subset \mathcal{R}$ tal que $|w_n| \to \infty$ y $w_n/|w_n| \to e^{i\theta}$. Denotaremos por $\mathcal{D}(\mathcal{R})$ el conjunto de direcciones asintóticas de $\mathcal{R}$. Es fácil comprobar que $\mathcal{D}(\mathcal{R}) \subset \partial\mathbb{D}$ es cerrado y no vacío si $\mathcal{R}$ es no acotado. Veamos algunos ejemplos.

1. Si $\mathcal{R}_{\mathrm{Le}}$ es la configuración de Lewis dada por (5.12), entonces $\mathcal{D}(\mathcal{R}_{\mathrm{Le}}) = \{-1, -i, e^{i\pi/4}\}$.
2. Si $f = c + iv$, con $c \in \mathbb{R}$ constante y v es no constante, entonces $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f) = \{-i, +i\}$. Análogamente, $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f) = \{-1, +1\}$ si $f = u + ic$ y u no es constante. En general, si $\mathcal{R}_f$ es una recta en el plano, entonces $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$ se reduce a las dos direcciones (opuestas) en $\partial\mathbb{D}$ correspondientes a dicha recta.
3. Sea $f = u + iv$, con $u = x$, $v = e^x \operatorname{sen} y$. Entonces $\mathcal{R}_f = \{(u, v) : u \in \mathbb{R}, |v| \le e^u\}$ y $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f) = \{-1\} \cup \{e^{i\theta} : -\pi/2 \le \theta \le \pi/2\}$.
4. Sea $f = u + iv$, con $u = e^x \operatorname{sen} y$, $v = e^{-x} \operatorname{sen} y$. Entonces $\mathcal{R}_f = \{(u, v) : 0 < |uv| \le 1\} \cup \{(0, 0)\}$ y $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f) = \{-1, +1, -i, +i\}$.

Una mirada atenta a los ejemplos anteriores indica que, con la excepción del conjunto de Lewis $\mathcal{R}_{\mathrm{Le}}$, en todos los demás casos los conjuntos $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$ contienen parejas de puntos diametralmente opuestos en $\partial\mathbb{D}$. El siguiente resultado proporciona una explicación geométrica al teorema de Lewis y muestra que esta última observación no es una coincidencia.

Teorema 5.2 ([17]). *Sea $f = u + iv : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una aplicación armónica. Si $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$ no contiene ninguna pareja de puntos diametralmente opuestos, entonces f es constante.*

La prueba del teorema 5.2 combina el método de Lewis con propiedades del conjunto de ceros de una función armónica en el plano. Basta reducirse al caso en que u y v son no constantes y llegar a contradicción. A continuación indicamos brevemente un esquema de la demostración (ver [17] para más detalles).

- El primer paso es elemental y consiste en observar que si un subconjunto cerrado de $\partial\mathbb{D}$ (en nuestro caso $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$) no contiene parejas de puntos diametralmente opuestos, entonces existen tres puntos en el complementario de manera que dos de ellos son diametralmente opuestos y el tercero es el punto medio de una de las semicircunferencias que forman ([17, lema 2.1]). De aquí se deduce que $\mathcal{R}_f$ omite asintóticamente tres sectores S_1, S_2, S_3 que, mediante rotación, podemos suponer que tienen como ejes las semirrectas $\{u = 0, v > 0\}$, $\{u = 0, v < 0\}$ y $\{v = 0, u < 0\}$.
- Aplicando el método de Lewis se obtienen dos funciones armónicas no constantes U y V en $\mathbb{D}$ como límite de reescaladas de u y v. Si $F = U + iV$, entonces $\mathcal{R}_F \subset \{re^{i\theta} : r \ge 0, e^{i\theta} \in \mathcal{D}(\mathcal{R}_f)\}$. Por tanto $\mathcal{R}_F$ omite los sectores S_1, S_2, S_3 y, en particular,
$$\{U = 0\} \subset \{V = 0\} \subset \{U \ge 0\}. \tag{5.13}$$
- Las propiedades de los conjuntos de ceros de funciones armónicas en el plano muestran que, localmente alrededor de 0, se puede mejorar (5.13): de hecho

$\{U = 0\} = \{V = 0\}$ y UV tiene signo constante. Este paso es fundamental porque permite una *reducción* del rango $\mathcal{R}_F$ de manera que esté contenido en dos cuadrantes opuestos.

- Eligiendo direcciones extremales en $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$ y realizando sucesivas reducciones del rango, un argumento iterativo proporciona eventualmente dos direcciones diametralmente opuestas en $\mathcal{D}(\mathcal{R}_f)$, lo cual nos da la contradicción buscada.

REFERENCIAS

[1] L. V. AHLFORS, *Conformal invariants: topics in Geometric Function Theory*, McGraw Hill, New York, 1973.

[2] L. V. AHLFORS, *Complex Analysis*, McGraw Hill, New York, 1978.

[3] A. F. BEARDON Y D. MINDA, An extension of Montel's three omitted values theorem, *Comput. Methods Funct. Theory* **21** (2021), no. 1, 61–72.

[4] W. BERGWEILER, Bloch's Principle, *Comput. Methods Funct. Theory* **6** (2006), no. 1, 77–108.

[5] A. BLOCH, *Les fonctions holomorphes et méromorphes dans le cercle unité*, Gauthier-Villars, Paris, 1926.

[6] E. BOREL, Sur les zéros des fonctions entières, *Acta Math.* **20** (1897), no. 1, 357–396.

[7] C. CARATHÉODORY, *Theory of functions of one complex variable*, Chelsea, New York, 1958, 1960.

[8] H. CARTAN Y J. FERRAND, Le cas André Bloch, *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques* **9** (1988), 210–219.

[9] S. S. CHERN, Curves and surfaces in euclidean space, *Global differential geometry* (S. S. Chern, ed.), MAA Stud. Math. **27** (1989), 99–139.

[10] D. DRASIN, Normal families and the Nevanlinna theory, *Acta Math.* **122** (1969), 231–263.

[11] H. FUJIMOTO, On the number of exceptional values of the Gauss map of minimal surfaces, *J. Math. Soc. Japan* **40** (1988), no. 2, 235–247.

[12] T. W. GAMELIN, *Complex Analysis*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[13] G. G. GUNDERSEN, Research questions on meromorphic functions and complex differential equations, *Comput. Methods Funct. Theory* **17** (2017), no. 2, 195–209.

[14] G. G. GUNDERSEN Y W. K. HAYMAN, The strength of Cartan's version of Nenvalinna theory, *Bull. London Math. Soc.* **36** (2004), no. 4, 433–454.

[15] A. V. JATEGAONKAR, Elementary proof of a theorem of P. Montel on entire functions, *J. London Math. Soc.* **40** (1965), 166–170.

[16] J. LEWIS, Picard's theorem and Rickman's theorem by way of Harnack's inequality, *Proc. Amer. Math. Soc.* **122** (1994), no. 1, 199–206.

[17] J. G. LLORENTE, On the range of harmonic maps in the plane, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **45** (2020), no. 2, 915–930.

[18] F. Marty, Recherches sur la répartition de valeurs d'une fonction méromorphe, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys. (3)* **23** (1931), 183–261.

[19] P. Montel, Sur les suites infinies de fonctions, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* **24** (1907), 233–334.

[20] P. Montel, Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionelles dans un domaine, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* **29** (1912), 487–535.

[21] P. Montel, Sur les familles normales de fonctions analytiques, *Ann. École Norm. Sup. (3)* **33** (1916), 223–302.

[22] P. Montel, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications*, Gauthiers-Villars, Paris, 1927.

[23] R. Osserman, Proof of a conjecture of Nirenberg, *Comm. Pure Appl. Math.* **12** (1959), 229–232.

[24] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*, Dover, New York, 1986.

[25] R. Osserman, Minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$, *Global differential geometry* (S. S. Chern, ed.), MAA Stud. Math. **27** (1989), 73–98.

[26] É. Picard, Sur une proprieté des fonctions entières, *C. R. Acad. Sci. Paris* **88** (1879), 1024–1027.

[27] É. Picard, Sur les fonctions analytiques uniformes dans le voisinage d'un point singulier essentiel, *C.R. Acad. Sci. Paris* **89** (1879), 745–747.

[28] T. Ransford, *Potential Theory in the complex plane*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[29] S. Rickman, On the number of omitted values of entire quasiregular mappings, *J. Analyse Math.* **37** (1980), 100–117.

[30] A. Robinson, Metamathematical problems, *J. Symbolic Logic* **38** (1973), 500–516.

[31] A. Ros, The Gauss map of minimal surfaces, *Differential Geometry* (Valencia, 2001), 235–252, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002.

[32] J. L. Schiff, *Normal families*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1993.

[33] G. Valiron, *Sur les valeurs exceptionelles des fonctions méromorphes et leurs dérivées*, Hermann et cie., Paris, 1937.

[34] F. Xavier, The Gauss map of a complete non-flat minimal surface cannot omit 7 points of the sphere, *Ann. of Math. (2)* **113** (1981), 211–214. Erratum, *Ann. of Math. (2)* **115** (1982), 667.

[35] L. Zalcman, A heuristic principle in complex function theory, *Amer. Math. Monthly* **82** (1975), no. 8, 813–817.

[36] L. Zalcman, Normal families: new perspectives, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **35** (1998), no. 3, 215–230.

José González Llorente, Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid

Correo electrónico: `josgon20@ucm.es`