Diámetro transfinito, constante de Chebyshev, capacidad logarítmica

por

Francisco Luquin

Resumen. El propósito de este trabajo es definir y desarrollar algunas propiedades básicas del diámetro transfinito y la constante de Chebyshev de un conjunto infinito y compacto del plano complejo. Ambos conceptos fueron introducidos en 1923 por M. Fekete, demostrando además su igualdad numérica. Además de probar esta, calculamos este invariante numérico para el caso de un intervalo y el círculo unidad, señalando por último el papel fundamental que juegan estos conceptos en el posterior desarrollo de la teoría de la aproximación de funciones mediante polinomios con coeficientes enteros. También hacemos notar que otra definición completamente distinta de las anteriores, la de capacidad logarítmica, nos da el mismo valor.

Atendiendo a los nombres y definiciones de diámetro transfinito, constante de Chebyshev y capacidad logarítmica es difícil pensar que pudieran estar relacionados. Sin embargo, observando la expresión analítica de sus definiciones y la identidad

$$|(z-z_1)\cdots(z-z_n)| = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\log\frac{1}{|z-z_i|}\right),$$

uno podría intuir que existiera una cierta relación entre ellos; de hecho, tienen el mismo valor numérico.

En este artículo, desde un punto de vista constructivo, estudiaremos la igualdad de los dos primeros conceptos y su relación con la Teoría de la Aproximación de funciones mediante polinomios con coeficientes enteros, o Aproximación Diofántica de funciones mediante polinomios. Veremos que, en sus inicios a principios del siglo XX, los trabajos sobre este tipo de aproximación se reducían a esporádicas publicaciones tratando casos particulares, si bien la resolución de estos problemas individuales era por métodos y técnicas totalmente nuevas y originales. Solo a partir de los trabajos de M. Fekete, sobre todo con su introducción del concepto de diámetro transfinito [8], se estableció un marco común que permitió entrelazar y relacionar los diferentes trabajos existentes hasta esa fecha, configurándose las bases para esta nueva teoría [9, 1].

Para la relación e igualdad con la capacidad logarítmica, ver [2, 5, 19, 20, 21].

En todo lo que sigue, salvo definición distinta, denotaremos por E un conjunto infinito y compacto del plano complejo $\mathbb{C}$.

1. Diámetro transfinito

Denotemos por

$$V(z_1,\dots,z_n)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ z_1 & z_2 & \dots & z_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \dots & z_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{\substack{k,l=1\\k<l}}^{n}(z_k-z_l) \tag{1}$$

el *determinante de Vandermonde* para $z_1,z_2,\dots,z_n\in E$, $n\geq 2$. Es claro que en (1) hay

$$(n-1)+(n-2)+\dots+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

factores. Sea

$$V_n=V_n(E)=\max_{z_1,z_2,\dots,z_n\in E}|V(z_1,z_2,\dots,z_n)|. \tag{2}$$

Este máximo existe, en virtud de que E es compacto.

Hagamos

$$d_n=V_n^{\frac{2}{n(n-1)}}.$$

Está claro que d_2 es el diámetro del conjunto E. Por esta razón, d_n se llama *diámetro de orden* n del conjunto E. Para $n\geq 3$, d_n es el máximo de la media geométrica de los lados de los polígonos de n lados por sus diagonales inscritos en E. El límite

$$d=d(E)=\lim_{n\to\infty}d_n\geq 0$$

se llama *diámetro transfinito* del conjunto E (ver [8]).

Veamos que $\{d_i\}$ es una sucesión decreciente y que, por lo tanto, existe este límite.

En efecto, supongamos que el máximo (2) se alcanza en el sistema de puntos $\xi_1,\dots,\xi_{n+1}$,

$$|V(\xi_1,\dots,\xi_{n+1})|=V_{n+1}.$$

Como

$$V(\xi_1,\dots,\xi_{n+1})=(\xi_{n+1}-\xi_1)(\xi_{n+1}-\xi_2)\cdots(\xi_{n+1}-\xi_n)V(\xi_1,\dots,\xi_n)$$

resulta

$$V_{n+1}\leq|\xi_{n+1}-\xi_1|\cdots|\xi_{n+1}-\xi_n|V_n. \tag{3}$$

Del mismo modo, obtenemos

$$\begin{aligned}V_{n+1}&\leq|\xi_n-\xi_1|\cdots|\xi_n-\xi_{n-1}||\xi_n-\xi_{n+1}|V_n\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ V_{n+1}&\leq|\xi_1-\xi_2|\cdots|\xi_1-\xi_n||\xi_1-\xi_{n+1}|V_n.\end{aligned} \tag{4}$$

Multiplicando (3) y (4), resulta

$$V_{n+1}^{n+1} \leq V_{n+1}^2 V_n^{n+1};$$

simplificando y elevando a $\frac{2}{(n+1)n(n-1)}$, obtenemos

$$d_{n+1} \leq d_n,$$

y como $d_n \geq 0$ para todo n, siempre existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} d_n = d,$$

y por ende el diámetro transfinito del conjunto E.

Si E es un conjunto finito, entonces, por definición, $d(E) = 0$.

Llamamos *puntos de Fekete* a n puntos de E en los cuales se alcanza el máximo de (2), y al polinomio $\mathcal{F}_n$ que los tiene como raíz, *polinomio de Fekete*. La búsqueda de los puntos de Fekete de un conjunto E es un problema estudiado, estos tienden a adoptar la posición más alejada posible unos de otros y se colocan en la frontera exterior de E, además su solución no es única, por ejemplo, si $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, se sabe que todo conjunto de puntos equiespaciados es de Fekete, verbigracia, el conjunto de las raíces n-ésimas de la unidad. Los sistemas de puntos de Fekete son muy útiles en la búsqueda del polinomio de interpolación de una función, y es interesante estudiar la distribución de dichos puntos cuando $n \to \infty$ [2, 5]. Así mismo los polinomios de Fekete son asintóticamente óptimos para la resolución del problema de la constante de Chebyshev [5, 19]. Los puntos de Fekete también tienen conexión con polinomios ortogonales y ecuaciones diferenciales [2].

2. Constante de Chebyshev

Sea H_n el conjunto de polinomios mónicos de grado n,

$$P_n(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n,$$

con coeficientes complejos arbitrarios $c_1, \ldots, c_n$. Hagamos

$$m_n = m_n(E) = \inf_{P_n \in H_n} \max_{z\in E} |P_n(z)| = \inf_{P_n\in H_n} \|P_n\|_\infty, \tag{5}$$

y escribamos

$$\tau_n = m_n^{1/n} \qquad (\tau_n^n = m_n). \tag{6}$$

El límite

$$\tau = \tau(E) = \lim_{n\to\infty} \tau_n \tag{7}$$

se llama *constante de Chebyshev* del conjunto E (ver [8]).

Demostremos que existe un polinomio perteneciente a H_n que alcanza el ínfimo (5) y que existe el límite (7). En efecto, sea

$$P_{n_1}(z), \ldots, P_{n_k}(z), \ldots \tag{8}$$

una sucesión de polinomios de H_n tales que

$$\max_{z\in E} |P_{n_k}(z)| \to m_n, \qquad k \to \infty.$$

Fijemos unos puntos $z_1, \dots z_{n+1} \in E$ y expresemos estos polinomios por la fórmula de Lagrange

$$P_{n_k}(z) = \sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{(z-z_1)\cdots(z-z_{\nu-1})(z-z_{\nu+1})\cdots(z-z_{n+1})}{(z_\nu-z_1)\cdots(z_\nu-z_{\nu-1})(z_\nu-z_{\nu+1})\cdots(z_\nu-z_{n+1})} P_{n_k}(z_\nu). \tag{9}$$

Sea $G \supset E$ un recinto acotado del plano tal que E está en su interior ([15, pp. 194–199]). Las expresiones (9) muestran que la sucesión de polinomios $\{P_{n_k}(z)\}$ está equiacotada (o sea, es uniformemente acotada) en el recinto G, pues

$$|P_{n_k}(z_\nu)| \le \max_{z\in E} |P_{n_k}(z)| \to m_n, \qquad k \to \infty,$$

es decir, el conjunto de números $|P_{n_k}(z_\nu)|$ está acotado y, además, z está acotado en G. Como $P_{n_k}(z)$ son funciones analíticas, se puede aplicar el principio de compacidad de Montel:

> *Para que un conjunto de funciones analíticas en un recinto G sea compacto en G, es necesario y suficiente que este conjunto esté equiacotado en el interior de G.*

Recordemos que un conjunto de funciones analíticas en un recinto G se dice que es compacto en G si de cualquier sucesión de funciones de este conjunto se puede extraer una sucesión parcial uniformemente convergente en el interior de G.

Por lo tanto, de (8) se puede extraer una sucesión parcial de polinomios $\{P_{n,k}(z)\}$ que es uniformemente convergente en E. Está claro que la función límite también es un polinomio de la clase H_n,

$$t_n(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n, \tag{10}$$

pues junto con los polinomios elegidos convergen también sus coeficientes. En virtud de (8), para el polinomio límite se tiene

$$\|t_n\|_\infty = \max_{z\in E} |t_n(z)| = m_n > 0.$$

El polinomio (10) se llama *polinomio de Chebyshev* de grado n de desviación mínima (uniforme) a cero en el conjunto E. Señalemos que, en el caso $E = [-2, 2]$, el polinomio de Chebyshev es de coeficientes enteros.

Otra demostración de la existencia de este polinomio puede verse en [9, p. 15].

En cuanto a la unicidad de tales polinomios, se sigue aplicando un resultado conocido de Haar (ver [9, p. 16]), que enunciaremos en una version generalizada. Aquí el conjunto X puede ser cualquier espacio compacto de Hausdorff.

> *Si X tiene al menos n puntos y $f_1, \dots, f_n$ son elementos de $C(X)$ (funciones continuas complejas), entonces la aproximación de $f \in C(X)$ mediante polinomios generalizados, $\sum_{k=1}^n a_k f_k$, es única, si y solo si 0 es la única función de la forma $\sum_{k=1}^n a_k f_k$ que tiene n ceros distintos. En particular, como una función de $C(X)$, el polinomio $t_n(z)$ está unívocamente determinado.*

Luego determinar los $t_n(z)$, equivale a considerar la aproximación de la función z^n mediante combinaciones lineales de las funciones $1, z, z^2, \dots, z^{n-1}$, pero, al ser estas polinomios de grado a lo más $n-1$, no pueden tener más de $n-1$ ceros distintos sin ser idénticamente nulas.

Veamos ahora que existe el límite (7). Para ello verifiquemos que la sucesión $\{\tau_n\}$ está acotada. En efecto, si $z_0 \in E$, de (6) se sigue que

$$\tau_n = \sqrt[n]{\max_{z\in E} |t_n(z)|} \leq \sqrt[n]{\max_{z\in E} |(z-z_0)^n|} = \max_{z\in E} |z - z_0| \leq D,$$

donde D es el diámetro del conjunto E.

Sean ahora α, β los límites inferior y superior de la sucesión τ_n,

$$\liminf_{n\to\infty} \tau_n = \alpha, \qquad \limsup_{n\to\infty} \tau_n = \beta.$$

Se tiene $\alpha \leq \beta < \infty$ (por ser acotada). Demostremos que se verifica la igualdad.

Para un $\varepsilon > 0$, tomamos (de los infinitos $n \in \mathbb{Z}^+$ que existen) un n tal que $\tau_n < \alpha + \varepsilon$. Entonces, en E se tiene

$$\max_{z\in E} |t_n(z)| = \tau_n^n < (\alpha+\varepsilon)^n.$$

Sean q y s, $0 \leq s \leq n-1$, enteros positivos, y $z_0 \in E$; entonces, para todo $z \in E$, se verifica

$$|(z-z_0)^s (t_n(z))^q| \leq D^s (\alpha+\varepsilon)^{nq},$$

de donde

$$m_{nq+s} \leq \max_{z\in E} |(z-z_0)^s (t_n(z))^q| \leq D^s (\alpha+\varepsilon)^{nq},$$

y, haciendo $M = qn + s$, resulta

$$\tau_M \leq D^{s/M} (\alpha+\varepsilon)^{nq/M} \leq D^{s/M} (\alpha+\varepsilon)^{1-s/M}.$$

Pasemos a límites en esta desigualdad, cuando M toma valores de una sucesión para la cual se alcanza el límite superior, $\limsup_{M\to\infty} \tau_M$; dejando n fijo, obtenemos

$$\beta \leq \alpha + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, resulta

$$\beta \leq \alpha.$$

Por lo tanto,

$$\beta = \alpha.$$

Luego existe el límite (7).

Otra forma de probarlo sería a partir de la desigualdad

$$m_{n_1+n_2} \leq m_{n_1} m_{n_2},$$

de donde

$$m_{nq} \leq m_n^q.$$

Sea $M = qn + s$ un entero arbitrario, $0 \leq s \leq n-1$. Entonces

$$m_M \leq m_{nq} m_s \leq m_n^q m_s$$

y

$$\tau_M = \sqrt[M]{m_M} \leq m_n^{q/M} m_s^{1/M} = \tau_n^{qn/M} \tau_s^{s/M} = \tau_n^{1-s/M} \tau_s^{s/M}.$$

Para cualquier n fijo, podemos pasar a límites cuando $M \to \infty$, de tal modo que se alcance el límite superior; obtenemos

$$\limsup_{M\to\infty} \tau_M = \beta \leq \tau_n.$$

Pasando ahora a límites cuando $n \to \infty$, de tal modo que se alcance el límite inferior, resulta

$$\beta \leq \liminf_{n\to\infty} \tau_n = \alpha,$$

lo cual implica que

$$\beta = \alpha.$$

3. Capacidad logarítmica

Definamos (para esta sección ver [2, 3, 5, 18, 19, 20, 21]) la siguiente variante de la energía logarítmica de n puntos cualesquiera $z_1, \dots, z_n \in E$; escribamos

$$I'(E) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1\leq i\neq j\leq n} \log \frac{1}{|z_i - z_j|} = -\log \left(\prod_{i<j} |z_i - z_j| \right)^{2/(n(n-1))}.$$

Si consideramos que estos n puntos son los ceros de un polinomio P de grado exactamente n (usaremos la notación $\partial P = n$), el problema de encontrar un conjunto de Fekete de n puntos consiste en hallar el

$$\inf_{\partial P = n} I'(E).$$

Veamos ahora el análogo continuo de la búsqueda de los puntos de Fekete.

DEFINICIÓN. Sea $\mathcal{M}(E)$ el conjunto de todas las medidas positivas finitas de Borel μ con soporte $S(\mu) \subset E$ y masa 1. Dada $\mu \in \mathcal{M}(E)$, se denomina *potencial logarítmico* asociado a μ a la función

$$U_\mu(z) = \int_E \log \frac{1}{|z-t|}\, d\mu(t),$$

y *energía* asociada a μ al valor

$$I(\mu) = \int_E \int_E \log \frac{1}{|z-t|}\, d\mu(t)\, d\mu(z) = \int_E U_\mu(z)\, d\mu(z).$$

Al valor ínfimo

$$I(E) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}(E)} I(\mu)$$

lo llamaremos *constante de Robin* de E. La cantidad

$$C(E) = e^{-I(E)}$$

se denomina *capacidad logarítmica* de E.

El cálculo del valor de la constante de Robin y la búsqueda de una medida cuya energía coincida con este mínimo son una versión continua del problema de hallar las cantidades d_n y los puntos de Fekete.

Es conocido que la cantidad $I(E)$ se alcanza en una medida μ_E, y si $I(E) < \infty$ entonces esta medida es única. Una medida μ_E que cumpla $I(E) = I(\mu_E)$ se denomina *medida de equilibrio* para E y el potencial $U_{\mu_E}(z)$ asociado a la medida de equilibrio se denomina *potencial de equilibrio*. El siguiente resultado caracteriza a la medida de equilibrio:

Teorema de Frostman. *Sea E un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$, con $C(E) > 0$. Entonces:*

(a) $U_{\mu_E}(z) \leq I(E)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

(b) $U_{\mu_E}(z) = I(E)$ casi en todas partes sobre E, esto es, excepto para z perteneciente a un subconjunto de E de capacidad cero.

Otro teorema fundamental, además del anterior, para la teoría del potencial es el siguiente:

Teorema de Fekete-Szegő. *Sea E un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Entonces la sucesión de los diámetros de orden n de E, $\{d_n\}_{n\geq 2}$, es decreciente y*

$$d(E) = \lim_{n\to\infty} d_n = C(E).$$

Estos resultados se pueden sintetizar en el siguiente [5, 20]:

Teorema fundamental de la teoría del potencial. *Sea E un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Entonces:*

(a) $d(E) = \tau(E) = C(E)$.

(b) Los polinomios de Fekete son asintóticamente óptimos para el problema de Chebyshev,

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{F}_n\|_E^{1/n} = \tau(E).$$

Además, si $C(E) > 0$, entonces μ_E será única y se verifica lo siguiente:

(c) Los puntos de Fekete tienen distribución asintótica μ_E; es decir, los puntos de Fekete se equidistribuyen según la medida de equilibrio de E,

(d) El limite

$$\lim_{n\to\infty} |\mathcal{F}_n(z)|^{1/n} = \exp(-U_{\mu_E}(z))$$

converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de la componente no acotada (conexa) de $\mathbb{C} \setminus E$.

La teoría del potencial logarítmico se aplica en el estudio de un gran número de problemas en teoría de aproximación, como por ejemplo al analizar el comportamiento asintótico de las raíces n-ésimas de sucesiones de polinomios ortogonales [2, 18].

4. Relación entre d y τ

En este apartado (ver [8]) probaremos que el diámetro transfinito es igual a la constante de Chebyshev del conjunto E, es decir,

$$d = \tau.$$

Para ello, veamos primero que se verifican las desigualdades

$$m_n \leq \frac{V_{n+1}}{V_n} \leq (n+1)m_n. \tag{11}$$

En efecto,

$$\frac{V(x,\psi_1,\ldots,\psi_n)}{V(\psi_1,\ldots,\psi_n)} = (x-\psi_1)\cdots(x-\psi_n).$$

Supongamos que $x,\psi_1,\ldots,\psi_n \in E$ y que en $\psi_1,\ldots,\psi_n$ se alcanza el máximo

$$|V(\psi_1,\ldots,\psi_n)| = V_n.$$

Entonces,

$$m_n \leq \max_{x\in E} |(x-\psi_1)\cdots(x-\psi_n)| = \max_{x\in E}\left|\frac{V(x,\psi_1,\ldots,\psi_n)}{V(\psi_1,\ldots,\psi_n)}\right| \leq \frac{V_{n+1}}{V_n}. \tag{12}$$

Ahora bien, como los polinomios de Chebyshev son mónicos podemos escribir la igualdad

$$V(x_1,\ldots,x_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_{n+1}^{n-1} \\ t_n(x_1) & t_n(x_2) & \ldots & t_n(x_{n+1}) \end{vmatrix},$$

y desarrollando este determinante por los elementos de la última fila obtenemos

$$|V(x_1,\ldots,x_{n+1})| \leq |t_n(x_1)||V(x_2,\ldots,x_{n+1})| + \cdots + |t_n(x_{n+1})||V(x_1,\ldots,x_n)|. \tag{13}$$

Si, ahora, $x_1, \dots, x_{n+1} \in E$ son tales que se alcanza el máximo

$$|V(x_1, \dots, x_{n+1})| = V_{n+1},$$

de la desigualdad (13) obtenemos

$$V_{n+1} \le (n+1) m_n V_n. \tag{14}$$

De (12) y (14) se sigue (11).

Las desigualdades (11) pueden expresarse en la forma

$$\tau_n^n \le \frac{V_{n+1}}{V_n} \le (n+1)\tau_n^n.$$

Multiplicando las desigualdades anteriores para $n = 2, 3, \dots, n$ y teniendo en cuenta que $V_2 \le 2m_1 = 2\tau_1$, resulta

$$(\tau_2^2 \cdots \tau_n^n)^{\frac{2}{(n+1)n}} V_2^{\frac{2}{(n+1)n}} \le d_{n+1} \le ((n+1)!)^{\frac{2}{(n+1)n}} (\tau_1 \tau_2^2 \cdots \tau_n^n)^{\frac{2}{(n+1)n}}. \tag{15}$$

Pero $V_2^{\frac{2}{(n+1)n}} \to 1$ y $((n+1)!)^{\frac{2}{(n+1)n}} \to 1$, cuando $n \to \infty$. No queda, pues, más que examinar

$$\lim_{n\to\infty} (\tau_1 \tau_2^2 \cdots \tau_n^n)^{\frac{2}{(n+1)n}}.$$

Sea

$$T_n = (\tau_1 \tau_2^2 \cdots \tau_n^n)^{\frac{2}{(n+1)n}},$$

con lo cual

$$\ln T_n = \frac{2}{(n+1)n} \sum_{k=1}^{n} k \ln \tau_k. \tag{16}$$

Vemos que en esta suma hay

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

sumandos, ya que $\ln \tau_k$ está repetido k veces. Como $\tau_k \to \tau$ cuando $k \to \infty$, la sucesión formada por los τ_k en la que cada τ_k se repite k veces converge hacia τ. Por lo tanto, la sucesión correspondiente de logaritmos

$$\ln \tau_1,\ \ln \tau_2,\ \ln \tau_2,\ \dots,\ \ln \tau_n,\ \dots,\ \ln \tau_n,\ \dots \tag{17}$$

tiende hacia $\ln \tau$. Es sabido que la sucesión cuyo término general es la media aritmética de los términos de otra sucesión converge hacia el mismo límite; en nuestro caso, con (16) y (17),

$$\lim_{n\to\infty} \ln T_n = \ln \tau.$$

De aquí que

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \tau.$$

Pasando ahora a límites en (15) obtenemos la igualdad requerida, $\tau = d$.

5. Cálculo del diámetro transfinito: ejemplos

5.1. Círculo

Sea E el círculo $\{z : |z| \leq \rho\}$. Como el principio del módulo máximo nos asegura que si $f(z)$ es una función analítica en un conjunto cerrado y acotado E, el máximo de $|f(z)|$ se alcanza en la frontera de E, podemos considerar indistintamente un círculo o su circunferencia ya que el diámetro transfinito no varía. Denotemos por C_ρ su circunferencia $\{z : |z| = \rho\}$.

Para cualquier polinomio $P_n(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n$, $c_i \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\rho^{2n} \leq \rho^{2n} + |c_1|^2 \rho^{2n-2} + \cdots + |c_n|^2 = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} |P_n(z)|^2 \, \frac{dz}{z} \right| \leq \max_{|z|=\rho} |P_n(z)|^2,$$

pues

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} z^k \bar{z}^m \, \frac{dz}{z} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq m \\ \rho^{2k} & \text{si } k = m. \end{cases}$$

Por lo tanto, aplicando esto al polinomio $t_n(z)$, resulta

$$\rho^n \leq m_n.$$

Ahora bien, para $p_n(z) = z^n$ se tiene

$$\max_{z\in E} |p_n(z)| = \rho^n;$$

por lo tanto,

$$\rho^n \leq m_n \leq \rho^n, \qquad \tau_n = \sqrt[n]{m_n} = \rho$$

y

$$d = \tau = \lim_{n\to\infty} \tau_n = \rho,$$

luego el diámetro transfinito del círculo $|z| \leq \rho$ es igual a su radio.

5.2. Segmento rectilíneo

Sea E el segmento rectilíneo $-a \leq x \leq a$.

Para cualquier polinomio $P_n(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n$, $c_i \in \mathbb{C}$, se tiene

$$\max_{z\in E} |P_n(z)| = \max_{0\leq x\leq \pi} |P_n(a\cos x)| = \max_{0\leq x\leq\pi} |Q_n(x)|,$$

donde $Q_n(x)$ es un polinomio trigonométrico:

$$Q_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + \cdots + a_n \cos nx, \qquad a_n = \frac{a^n}{2^{n-1}}.$$

Ahora bien,

$$\frac{a^{2n}}{2^{2n-1}} \leq |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |Q_n(x)|^2 \, dx \leq \max_{0\leq x\leq\pi} |Q_n(x)|^2,$$

de modo que
$$\frac{a^n}{2^{n-1/2}} \leq \max_{0\leq x\leq \pi} |Q_n(x)| = \max_{z\in E} |P_n(z)|.$$
Esta desigualdad se verifica para cualquier polinomio con el coeficiente superior igual a 1, luego en particular para el polinomio de Chebyshev de este segmento.

Por otra parte, para el polinomio de Chebyshev de coeficientes reales de este segmento
$$t_n(x) = \frac{a^n}{2^{n-1}} \cos\left(n \arccos \frac{x}{a}\right),$$
se tiene
$$\max_{x\in E} |t_n(x)| = \frac{a^n}{2^{n-1}}.$$
Por lo tanto,
$$\frac{a^n}{2^{n-1/2}} \leq m_n \leq \frac{a^n}{2^{n-1}}$$
de donde
$$d = \tau = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{m_n} = \frac{a}{2},$$
luego el diámetro transfinito del segmento $-a \leq x \leq a$ es igual a la cuarta parte de su longitud.

El diámetro transfinito de este intervalo también se podría calcular considerando el mismo cambio pero para $0 \leq x \leq 2\pi$. Entonces, como antes para cualquier polinomio,
$$\begin{aligned} P_n(z) = P_n(a\cos x) &= a^n \cos^n x + c_1 a^{n-1} \cos^{n-1} x + \cdots + c_n \\ &= a^n \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n + c_1 a^{n-1} \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^{n-1} + \cdots + c_n \\ &= \sum_{k=-n}^{n} A_k e^{ikx}, \qquad A_n = \frac{a^n}{2^n} = A_{-n}, \qquad \overline{P_n(z)} = \sum_{k=-n}^{n} \bar{A}_k e^{-ikx}. \end{aligned}$$
Ahora, teniendo en cuenta que
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-l)x}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l, \\ 1 & \text{si } k = l, \end{cases}$$
obtenemos
$$|A_n|^2 + |A_{-n}|^2 \leq \sum_{k=-n}^{n} |A_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=-n}^{n} A_k e^{ikx}\right)\left(\sum_{k=-n}^{n} \bar{A}_k e^{-ikx}\right) dx,$$
y de aquí,
$$\left(\frac{a^n}{2^n}\right)^2 2 \leq \max_{0\leq x\leq 2\pi} \left(\left(\sum_{k=-n}^{n} A_k e^{ikx}\right)\left(\sum_{k=-n}^{n} \bar{A}_k e^{-ikx}\right)\right) = \max_{-a\leq z\leq a} |P_n(z)|^2.$$

Aplicando esta desigualdad a $t_n(z)$, resulta

$$\frac{a^n}{2^n}\sqrt{2} \leq m_n.$$

Si, como antes, consideramos el polinomio de Chebyshev de coeficientes reales de E, obtenemos

$$2^{1/(2n)}\,\frac{a}{2} \leq \tau_n \leq 2^{1/n}\,\frac{a}{2},$$

y de aquí,

$$d = \tau = \lim_{n\to\infty} \tau_n = \frac{a}{2}.$$

5.3. Comentarios adicionales

Si se considera probado que si $E \subset \mathbb{R}$ (números reales) entonces $t_n(z)$ tiene coeficientes reales para cada n, podríamos calcular directamente sobre estos polinomios el diámetro transfinito de un intervalo.

En [9, pp. 22–23], para el cálculo del diámetro transfinito de un intervalo y círculo cualesquiera, se calculan directamente los polinomios de Chebyshev para el intervalo $[-1,1]$ y para el círculo unidad (en este caso $t_n(z) = z^n$), y por ende sus diámetros transfinitos, y de estos pasamos a los valores correspondientes a cualquier intervalo y círculo aplicando las igualdades

$$d(z_0 + E) = d(E), \quad d(z_0 E) = |z_0|\, d(E), \quad \forall\, z_0 \in \mathbb{C}, \quad E \subset \mathbb{C},$$

a las expresiones

$$[a,b] = \frac{a+b}{2} + \frac{|b-a|}{2}[-1,1], \quad E = z_0 + \rho\mathbf{T},$$

para cualquier segmento $[a,b]$ y círculo $E \subset \mathbb{C}$ de centro z_0 y radio ρ, siendo $\mathbf{T}$ el círculo unidad. De donde

$$d([a,b]) = \frac{|b-a|}{2} d([-1,1]) = \frac{|b-a|}{4},$$

luego el diámetro transfinito de cualquier segmento es la cuarta parte de su longitud.

Para el cálculo explícito del diámetro transfinito de más subconjuntos compactos del plano, por ejemplo arcos circulares, ver [11, 14, 21].

6. Diámetro transfinito y aproximación diofántica de funciones

Salvo que se señale algo distinto, todos los resultados de este apartado —y mucho más— se encuentran enunciados y demostrados en el libro [9]. No obstante, con el fin de mostrar un poco parte de la técnica que se emplea, presentaremos algunas demostraciones.

Aparentemente, el primer resultado concerniente con la aproximación de funciones mediante polinomios con coeficientes enteros como tal, es el siguiente de Pál [17] en 1914:

Sea f una función continua de valor real definida en un intervalo $[-\alpha, \alpha]$, $0 < \alpha < 1$. Entonces f puede ser aproximada uniformemente con precisión arbitraria (c.p.a.) mediante polinomios con coeficientes enteros si y solo si $f(0)$ es un entero.

Kakeya [12] publicó en la misma revista la siguiente generalización del resultado de Pál:

Una función continua de valor real definida sobre $[-1, 1]$ es aproximable uniformemente c.p.a. mediante polinomios con coeficientes enteros si y solo si $f(-1)$, $f(0)$ y $f(1)$ son enteros y $f(-1) + f(1)$ es par.

Además, en este mismo trabajo establece lo siguiente:

En cualquier intervalo de longitud ≥ 4 ninguna función puede ser aproximada uniformemente c.p.a. mediante polinomios con coeficientes enteros, excepto si ella misma es uno de tales polinomios.

En 1925 Chlodovsky [6] demuestra que

si $[a, b]$ es un intervalo que no contiene un número entero, entonces cualquier función real continua sobre $[a, b]$ puede ser uniformemente aproximada c.p.a. mediante polinomios con coeficientes enteros.

L. V. Kantorovic [13] (Premio Nobel de Economía en 1975) en 1931 demuestra que

una función continua de valor real sobre $[0, 1]$ es aproximable uniformemente c.p.a. mediante polinomios con coeficientes enteros si y solo si $f(0)$ y $f(1)$ son enteros.

Veamos la prueba de este resultado.

Que la condición es necesaria es trivial, ya que un polinomio de coeficientes enteros toma un valor entero en un número entero. Para ver la suficiencia emplearemos uno de los métodos de demostración utilizados en esta teoría: usar los resultados ya obtenidos en aproximación mediante polinomios con coeficientes reales. Veámoslo.

Es conocido que la sucesión de los polinomios de Bernstein

$$B_n(f, x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$$

de una función $f(x)$ converge uniformemente a dicha función sobre $[0, 1]$, por lo que será suficiente con buscar la aproximación para los $\{B_n(f, x)\}$. Sea $\{B_n^e(f, x)\}$ la sucesión de polinomios de Bernstein donde cada coeficiente de $x^i(1-x)^{n-i}$ se ha sustituido por su entero más próximo, luego

$$\begin{aligned} \left|f(x) - B_n^e(f, x)\right| &\leq \left|f(x) - B_n(f, x)\right| + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} x^i (1-x)^{n-i} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \qquad \forall\, x \in [0, 1], \end{aligned}$$

ya que $f(0)$ y $f(1)$ son enteros y además

$$\sum_{i=1}^{n-1} x^i(1-x)^{n-i} \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n}{1}} x^i(1-x)^{n-i} \leq \frac{1}{n}, \quad \forall\, x \in [0,1].$$

Si consideramos polinomios con coeficientes reales, entonces el bien conocido teorema de Weierstrass de 1885 establece que cualquier función continua puede ser aproximada uniformemente c.p.a. mediante dichos polinomios, sobre cualquier intervalo cerrado y acotado. Vemos que en el caso que nos ocupa —el de la aproximación uniforme mediante polinomios con coeficientes enteros— existen dos diferencias fundamentales para que se verifique dicho teorema. La primera es que solo aquellas funciones que satisfagan ciertas condiciones aritméticas son aproximables, aumentando estas conforme la longitud del intervalo tienda a cuatro. La segunda es que, en aproximación mediante polinomios con coeficientes enteros, si el conjunto sobre el cual ha de tener lugar la aproximación es tomado demasiado «grande», el problema es trivial; en concreto, si el diámetro transfinito no es menor que uno, no existe dicha aproximación.

Hay un resultado anterior publicado por Hilbert [10] en el año 1894, en el cual demostraba la existencia de polinomios con coeficientes enteros y normas cuadráticas arbitrariamente pequeñas. Si bien el resultado es sobre polinomios con coeficientes enteros, el trabajo no estuvo encuadrado dentro del marco de la aproximación diofántica sino en el de la teoría de los polinomios ortogonales, en concreto, en la de los polinomios de Legendre; no obstante, después de los trabajos antes citados de M. Fekete se reconocería la relación y aplicación de dicho teorema en la Teoría de la Aproximación Diofántica de funciones mediante polinomios. El enunciado del teorema es el siguiente:

> *Si $b-a<4$, entonces para todo $0<\varepsilon<1$, existe un polinomio $P_n(x)$ con coeficientes enteros racionales, no simultáneamente nulos, tal que $\int_a^b P_n^2(x)\,dx < \varepsilon < 1$.*

Este teorema no es válido para los segmentos de longitud mayor o igual a cuatro.

M. Fekete en [8] también demuestra el siguiente teorema:

> *Para cualquier número natural n, existe un polinomio $P_n(x)$, de coeficientes enteros no simultáneamente nulos, de grado no superior a n, tal que $\max\limits_{a\leq x\leq b} |P_n(x)| \leq 2(n+1)\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n/2}$.*

Luego si $b-a<4$ siempre existe un polinomio de coeficientes enteros no todos nulos, tal que $\max\limits_{a\leq x\leq b} |P_n(x)| < \varepsilon < 1$, y como en el caso del teorema de Hilbert, esto no ocurre si $b-a\geq 4$.

La importancia de la existencia de este tipo de polinomios de normas arbitrariamente pequeñas viene dada por los resultados de tipo general (ver [9, p. 9, pp. 15–25]) que vemos a continuación. Sea $\mathcal{R}$ cualquier *subanillo discreto* de $\mathbb{C}$; por discreto se quiere decir que $\mathcal{R}$ es discreto como subconjunto del espacio topológico $\mathbb{C}$. No obstante, para las demostraciones necesitaremos principalmente la siguiente condición equivalente a que un subanillo $\mathcal{R}$ de $\mathbb{C}$ sea discreto: si $0\neq a\in\mathcal{R}$ entonces $|a|\geq 1$.

Proposición. *Sea* $(H, \|\cdot\|^*)$ *un espacio lineal normado de funciones que contiene a* $\mathcal{R}[z]$ *(polinomios en* z *con coeficientes de* $\mathcal{R}$*) y* $f \in H \setminus \mathcal{R}[z]$. *Si* f *es aproximable c.p.a. mediante elementos de* $\mathcal{R}[z]$*, existen elementos mónicos de* $\mathbb{C}[z]$ *(polinomios en* z *con coeficientes de* $\mathbb{C}$*) con normas* $\|\cdot\|^*$ *arbitrariamente pequeñas.*

Veamos la prueba de esta proposición:

Por hipótesis, para todo $\varepsilon > 0$ existen elementos distintos $q(z), p(z) \in \mathcal{R}[z]$ que verifican

$$\|q - p\|^* = \|q - f + f - p\|^* \leq \|q - f\|^* + \|f - p\|^* \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \leq \varepsilon.$$

Ahora bien, al ser $q(z)$ y $p(z)$ distintos, su coeficiente principal $c \in \mathcal{R}$ será distinto de cero y, al ser $\mathcal{R}$ subanillo discreto, $|c| \geq 1$. Entonces $(q(z) - p(z))/c$ es mónico, pertenece a $\mathbb{C}[z]$ y $\|(q-p)/c\|^* < \varepsilon$.

Teorema. *Sean* E *un subconjunto compacto de* $\mathbb{C}$. *Entonces,* $d(E) \geq 1$ *si y solo si todo polinomio mónico* $p(z)$ *de* $\mathbb{C}[z]$ *verifica* $\|p\|_E = \text{máx}_{z\in E} |p(z)| \geq 1$.

Luego como consecuencia de este teorema y de la anterior proposición se demuestra que:

> *Si* $d(E) \geq 1$ *entonces ninguna función sobre* E *puede ser aproximada uniformemente c.p.a. mediante elementos de* $\mathcal{R}[z]$ *excepto si ella misma pertenece a* $\mathcal{R}[z]$.

Este resultado también es válido para la aproximación en norma $L_p([a,b])$, con $1 \leq p < \infty$.

Veamos esto último para el caso cuando el anillo de los coeficientes es el de los enteros racionales. El enunciado quedaría:

> *Si* $[a,b]$ *es un intervalo de longitud cuatro o más, entonces ningún elemento de* $L_p([a,b]) \setminus \mathbb{Z}[x]$, $1 \leq p < \infty$, *puede ser aproximado en norma* L_p *mediante elementos de* $\mathbb{Z}[x]$.

Hagamos su demostración:

Es conocido que el polinomio mónico de Chebyshev de segundo orden de grado n,

$$U_n(x) = \frac{1}{2^n} \frac{\operatorname{sen}\big((n+1)\cos^{-1} x\big)}{\sqrt{1-x^2}}$$

es el de mínima desviación $L_1([-1,1])$ a cero entre todos los de su clase, y verifica $\|U_n\|_1 = 2^{1-n}$. Mediante el usual cambio de variable del intervalo $[-1,1]$ al intervalo $[a,b]$, $y = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}$, obtenemos que, sobre $[a,b]$, $\|\tilde{U}_n\|_1 = (b-a)((b-a)/4)^n$ donde $\tilde{U}_n$ es el polinomio mónico de menor L_1 norma en $[a,b]$. Aplicando ahora la desigualdad de Hölder para un p fijo, $1 \leq p < \infty$, y un polinomio mónico $R_n(x)$ de grado $\leq n$, tenemos, para $p^{-1} + q^{-1} = 1$,

$$\|R_n\|_1 = \int_a^b |R_n(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |R_n(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b 1^q\,dx\right)^{1/q} = \|R_n\|_p\,(b-a)^{1/q};$$

y, de aquí,

$$\|R_n\|_p \geq (b-a)^{-1/q}\,\|R_n\|_1 \geq (b-a)^{1/p}\left(\frac{b-a}{4}\right)^n \geq 1.$$

Es curioso que en norma L_p no haya que imponer condiciones aritméticas a la función.

Además del diámetro transfinito existen otras constantes también asociadas a un subconjunto compacto E de $\mathbb{C}$.

1.– En [8] Fekete también considera el conjunto $\tilde{H}_n$ de polinomios mónicos con coeficientes complejos y cuyos ceros todos pertenecen a E y sus correspondientes valores $\tilde{m}_n$, $\tilde{t}_n(z)$, $\tilde{\tau}_n = \tilde{m}_n^{1/n}$, para los cuales se cumple

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\tau}_n = \tilde{\tau} = \tilde{d} = d.$$

2.– Puede probarse ([9, p. 143]) —de manera similar a como en el caso del diámetro transfinito— que existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n\|_E^{1/n} = \delta(E),$$

donde $P_n \neq 0$ es un polinomio de coeficientes enteros de grado $\leq n$ y mínima norma uniforme sobre E. Se verifica que $\delta(E) \leq \sqrt{d(E)}$, y $d(E) \leq \delta(E)$ si $d(E) < 1$. A diferencia de $d(E)$, la cantidad $\delta(E)$ sí puede variar por traslación de E.

El caso del intervalo $E = [0,1]$ es un caso particular ya que, como observaron Schnirelman y A. O. Gelfond, existe una esperanzadora relación entre el valor de $\delta([0,1])$ y el teorema del número primo ([4], [9, p. 143], [16, pp. 179–193]). H. L. Montgomery ([16, p. 182]) considera el conjunto $\mathcal{F}$ de todos los polinomios con coeficientes enteros, irreducibles sobre $\mathbb{Q}$ (números racionales) y todas sus raíces pertenecientes al intervalo $[0,1]$, y toma

$$\beta = \liminf_{\substack{F\in\mathcal{F}\\ \partial F = N}} c_N^{1/N}$$

donde $c_N > 0$ es el coeficiente principal de F. Prueba que $\delta(E) \leq \beta$ y conjetura que $\delta(E) = \beta$.

La aplicación del método del diámetro transfinito ha sido muy fructífera en diferentes áreas de las matemáticas; ya hemos visto que su técnica ha sido utilizada tanto dentro de la Teoría del Potencial como en las Teorías de la Aproximación [20] y de los Polinomios Ortogonales [2, 3, 5, 19]. Una aplicación en Geometría y Topología puede verse en [11, 14, 19, 21].

AGRADECIMIENTOS. El autor agradece a su colega Pedro Alegría de la UPV/EHU y al revisor sus útiles comentarios, así como la prontitud de este en la lectura y revisión del artículo.

Referencias

[1] J. M. Almira y N. del Toro, Sobre aproximación con polinomios de coeficientes enteros, *La Gaceta de la RSME* **2** (2003), no. 2, 377–403.

[2] C. Beltrán, F. Marcellán y A. Martínez-Finkelshtein, Algunas propiedades extremales de las raíces de polinomios ortogonales, *La Gaceta de la RSME* **21** (2018), no. 2, 345–366.

[3] E. Bendito, A. Carmona y A. M. Encinas, Algunas aplicaciones de la teoría del potencial, *XV Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones, V Congreso de Matemática Aplicada (Vigo, 23–26 septiembre 1997)*, vol. 2, 1045–1050, Universidad de Vigo, 1998, .

[4] P. Borwein y T. Erdélyi, The integer Chebyshev problem, *Math. Comp.* **65** (1996), no. 214, 661–681.

[5] J. I. Burgos Gil y R. Menares, *Equidistribución, Teoría del potencial y Aplicaciones Aritméticas*, 2019. `http://www.mat.uc.cl/~rmenares/Equidistribucion.pdf`

[6] M. I. Chlodovsky, Une remarque sur la représentation des fonctions continues par des polynomes à coefficients entiers, *Mat. Sb.* **32** (1925), 472–474.

[7] H. G. Diamond, Elementary methods in the study of the distribution of prime numbers, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **7** (1982), no. 3, 553–589.

[8] M. Fekete, Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, *Math. Z.* **17** (1923), 228–249.

[9] Le Baron O. Ferguson, *Approximation by polynomials with integral coefficients*, Mathematical Surveys, 17, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1980.

[10] D. Hilbert, Ein Beitrag zur Theorie des Legendre'schen Polynoms, *Acta Math.* **18** (1894), 155–159.

[11] E. Hille, Remarks on transfinite diameters, *General Topology and its relations to Modern Analysis and Algebra, (Proceedings of the symposium held in Prague in September 1961)*, 211–220, Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1962. `http://dml.cz/dmlcz/700913`

[12] S. Kakeya, On approximate polynomials, *Tôhoku Math. J.* **6** (1914/1915), 182–186.

[13] L. V. Kantorovic, Some remarks on the approximation of functions by means of polynomials with integral coefficients, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **9** (1931), 1163–1168 (en ruso).

[14] M. Klein, Estimates for the transfinite diameter with applications to conformal mapping, *Pacific J. Math.* **22** (1967), no. 2, 267–279.

[15] A. I. Markushevich, *Teoría de las funciones analíticas (Curso breve)*, Urmo, S. A. Ediciones, 1977.

[16] H. L. Montgomery, *Ten lectures on the interface between analytic Number Theory and Harmonic Analysis*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 84, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1994.

[17] J. PÁL, Zwei kleine Bemerkungen, *Tôhoku Math. J.* **6** (1914/1915), 42–43.

[18] I. C. PÉREZ IZQUIERDO, *Asintótica de polinomios extremales de Sobolev*, Tesis Doctoral, Universidad de La Habana, 2006.

[19] T. RANSFORD, *Potential theory in the complex plane*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[20] E. B. SAFF, Logarithmic potential theory with applications to approximation theory, *Surv. Approx. Theory* **5** (2010), 165–200.

[21] M. TSUJI, *Potential theory in modern function theory*, Maruzen, Tokio, 1959.

FRANCISCO LUQUIN, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO / EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA

Correo electrónico: `francisco.luquin@ehu.eus`