

La ola solitaria

por

Luis Vega González

THE WAVE OF TRANSLATION

Suelen citarse las observaciones del ingeniero escocés John Scott Russell (1834)¹ en un canal cerca de Edimburgo, como la primera descripción documentada sobre la onda solitaria. En este caso se trataba de una ola creada en un canal de poca profundidad, que se propagaba a gran velocidad sin cambio aparente en su forma o en su velocidad durante un periodo de tiempo sorprendentemente largo:

“I believe I shall best introduce the phaenomenon by describing the circumstances of my own first acquaintance with it. I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped –not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with a great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure for some thirty feet long and a foot to a foot and a half in

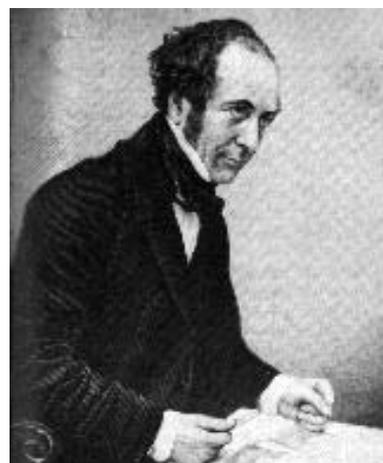


Figura 1: John Scott Russell

¹John Scott Russell (Glasgow 1808-Isla de Wight 1882) no sólo es conocido por sus observaciones y experimentos sobre olas solitarias. Ingeniero naval, diseñó el *Warrior*, la primera fragata acorazada, y el *Great Eastern*, un buque a vapor de dimensiones colosales que continuó siendo el barco más grande del mundo hasta comienzos del siglo XX. Fue catedrático de la Universidad de Edimburgo a los veinticuatro años y *Fellow* de la *Royal Society*.

height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such in the month of August 1834 was my first chance interview with that singular and beautiful phaenomenon which I have called the Wave of Translation . . . ”

... y a la que nosotros nos referiremos como la ola solitaria.

Russell fue capaz de repetir dicho fenómeno en su laboratorio (ver figura 2a), proponiendo una fórmula para la velocidad de propagación c :

$$c^2 = g(h + a), \quad (1)$$

siendo g la aceleración de la gravedad, h la profundidad del agua en estado de equilibrio y a la amplitud de la ola. De (1) se deduce que a mayor amplitud mayor velocidad. También consiguió crear dos olas simultáneas de diferentes alturas (fig.1b), yendo la más alta siempre por delante y alejándose de la más baja, ver [Ru]. Desde el principio, estas observaciones de Russell causaron polémica y tardaron años en ser aceptadas, en gran parte por la oposición de Stokes en una primera instancia, y sobre todo de Airy (ver [Ur]). Este último era muy escéptico sobre la posibilidad de que la ola se mantuviera siempre por encima del nivel del agua y de que no se “dispersara” y por tanto cambiara de forma.

SISTEMAS DISPERSIVOS

Consideremos sistemas lineales que admitan soluciones de la forma²

$$\varphi(x, t) = a \cos\left(\kappa\left(x - \frac{\omega}{\kappa}t\right)\right) = a\Re e^{i\kappa\left(x - \frac{\omega}{\kappa}t\right)}, \quad (2)$$

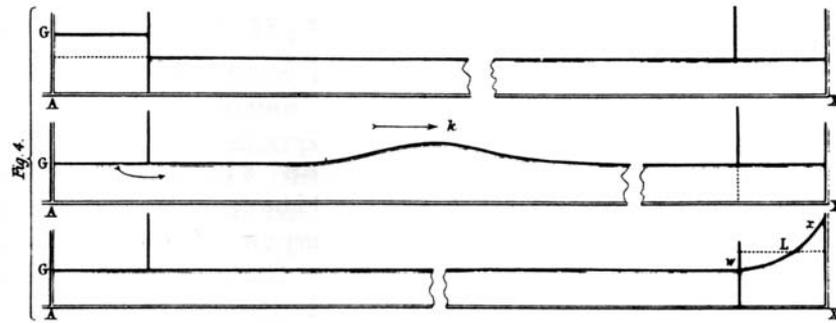
siendo la frecuencia ω una función real del número de onda κ , $\omega = \omega(\kappa)$, función que viene determinada por el sistema en cuestión y a la que se conoce como relación de dispersión. El término $\frac{\omega}{\kappa}$ representa la velocidad de la fase. El dado por $\omega'(\kappa)$ es tal vez más relevante y se le conoce como la velocidad del grupo (figura 3). Es habitual considerar dispersivo cualquier medio en el que la velocidad de la fase no es constante sino que depende del número de onda κ . Matemáticamente es más acertado definir como dispersivos los sistemas para los que $\omega'' \neq 0$. Así las soluciones de

$$\partial_t u - \partial_x u = 0 \quad (3)$$

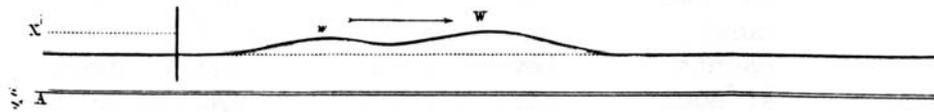
no son dispersivas ($\omega(k) = k$), mientras que las soluciones de la ecuación

$$\partial_t u - \partial_x^3 u = 0, \quad (4)$$

²El símbolo \Re , indica la parte real.



(a) Figura 4 en el original de Russell



(b) Figura 6 en el original de Russell

Figura 2: Esquemas de los experimentos realizados por Scott Russell tomados de "Report on waves", ver [Ru].

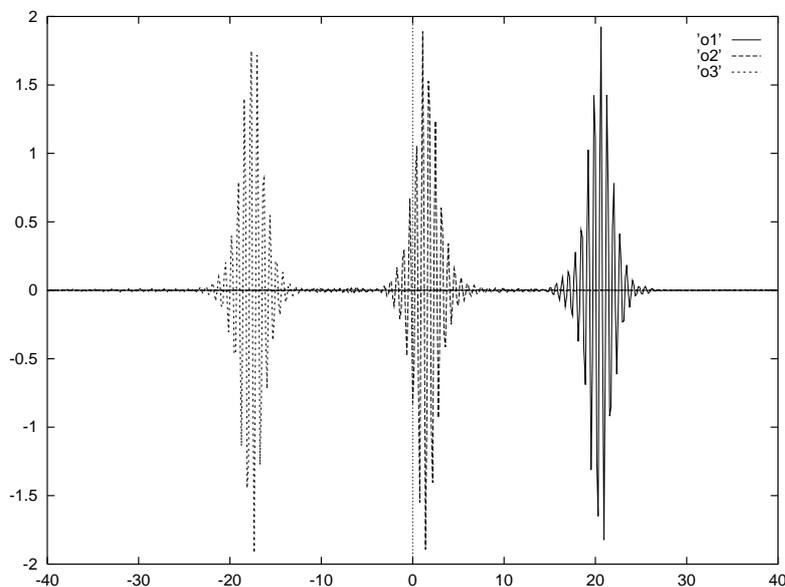


Figura 3: Situación en tres tiempos distintos de un grupo o paquete de ondas que se propaga hacia la izquierda. En concreto son ondas no lineales dadas por la fórmula (98) y obtenidas por M. Wadati en 1973. El número de onda es N , la velocidad de la fase es $3c^2 - N^2$, la velocidad del grupo es $3(c^2 - N^2)$ y la de la amplitud $c^2 - 3N^2$. Asintóticamente en N las dos últimas coinciden. La gráfica se ha obtenido por integración numérica de la ecuación mKdV, (99), con dato inicial $u(x, 0) = 2 \cos 9x \operatorname{sech} x$. En este ejemplo se ha tomado por tanto $N = 9$ y $c = 1$.

que llamaremos de Airy, sí lo son. En este caso la relación de dispersión es

$$\omega(\kappa) = \kappa^3. \quad (5)$$

Centrémonos en esta última ecuación. Al ser lineal, la superposición de soluciones (*i.e.* un tren de ondas) es una nueva solución. Pasando al límite obtenemos la solución $u(x, t)$ dada por

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\kappa x - \kappa^3 t)} d\kappa. \quad (6)$$

Para $t \neq 0$ se puede escribir en la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{t^{1/3}} Ai\left(\frac{x}{t^{1/3}}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (7)$$

siendo $Ai(x) = u(x, 1)$ la función de Airy. Es un ejercicio muy interesante, que explica entre otras cosas la importancia de la velocidad del grupo respecto a la

de la fase, probar que A_i es una función regular que tiende a cero en el infinito. Por tanto, de la expresión (7) se deduce que u va decayendo y dispersándose a medida que t se hace grande.

En 1847 Stokes demostró que si η es la elevación de un tren de olas que se propaga horizontalmente en aguas de gran profundidad puede desarrollarse en potencias de la amplitud a en la forma

$$\eta = a \cos(\kappa x - \omega t) + \frac{1}{2} \kappa a^2 \cos 2(\kappa x - \omega t) + \frac{3}{8} \kappa^2 a^3 \cos 3(\kappa x - \omega t) + \dots, \quad (8)$$

siendo

$$\omega^2 = g\kappa(1 + \kappa^2 a^2 + \dots). \quad (9)$$

La aproximación lineal corresponde al primer término en (8) que coincide con (2) y la relación de dispersión correspondiente es

$$\omega^2 = g\kappa. \quad (10)$$

Se puede justificar esta primera aproximación fácilmente. Es de hecho un ejercicio sencillo y muy ilustrativo de ecuaciones en derivadas parciales ya que se trata de un problema de frontera libre. Es decir, donde la condición de contorno es una incógnita del problema, la función η en nuestro caso. En efecto, dado que el fluido es el agua supondremos por simplicidad que es incompresible y sin viscosidad, y si además imponemos que la vorticidad es cero, las ecuaciones en el interior se reducen a la ecuación de Laplace sobre el potencial cuyo gradiente determina la velocidad del fluido. ¿Dónde está el fenómeno ondulatorio? Precisamente en las condiciones de contorno, que en la frontera libre están determinadas por las ecuaciones de Euler y que por tanto no son lineales. Al linearizar estas últimas se obtiene, ver [Wh], página 437, como relación de dispersión

$$\omega^2 = g\kappa \tanh(\kappa h) \quad (11)$$

que en el límite da precisamente (10).

Hay dos ideas fundamentales en el trabajo de Stokes. La primera es la existencia de una solución que representa un tren de ondas periódico pero donde la función no es sinusoidal. De hecho (8) es el desarrollo en serie de Fourier de una función adecuada $\eta(\theta)$, $\theta = \kappa x - \omega t$. Segundo la relación de dispersión (9) involucra a la amplitud, cosa que no ocurre en el caso lineal. Podemos concluir por tanto que los efectos no lineales no son meras correcciones.

Posteriormente Boussinesq (1871) y Rayleigh (1876), supusieron que la “ola solitaria” de Russell tiene una longitud de onda mucho más grande que la profundidad del canal. Esto les llevó a obtener, a partir de nuevo de las

ecuaciones de Euler, la fórmula (1) obtenida experimentalmente por aquel. Es más, demostraron que el perfil de la ola debía ser precisamente

$$\eta = a \operatorname{sech}^2(\beta(x - ct)), \quad (12)$$

con $\beta^{-2} = 4h^2(h + a)/3a$ para cualquier $a > 0$, aunque dicho perfil es en principio sólo válido si $a/h \ll 1$.

KORTEWEG Y DE VRIES

En 1895, ver [KdV], Korteweg y de Vries³ propusieron la ecuación que hoy lleva su nombre:

$$\eta_t + (c_0 + c_1\eta)\eta_x + \nu\eta_{xxx} = 0. \quad (13)$$

La función $\eta(x, t)$ mide la desviación en el punto x y en el tiempo t de la altura del fluido respecto de su posición de equilibrio. Los parámetros c_0 , c_1 y ν dependen de las constantes físicas del problema.

Observemos que si en la ecuación anterior nos olvidamos del término no lineal (*i.e.* tomamos $c_0 = c_1 = 0$) obtenemos la ecuación de Airy (4). La relación de dispersión (5) tiene una derivada que crece cuadráticamente y por tanto ondas con distintos números de ondas se propagan con velocidades distintas por lo que tienden a dispersarse. La solución (6) es un ejemplo de esa situación.

Si en cambio en la ecuación KdV (13) nos olvidamos de la tercera derivada (*i.e.* $\nu = 0$) obtenemos, tomando por ejemplo $c_0 = 0$ y $c_1 = 1$,

$$\eta_t + \eta\eta_x = 0,$$

que se conoce como la ecuación de Burgers sin viscosidad. Esta última se puede integrar a lo largo de las características y así si miramos las curvas $(x(t), t)$ donde $\eta = cte$, obtenemos rectas cuya pendiente se obtiene fácilmente a partir de $\eta_0(x) = \eta(x, 0)$. En concreto la pendiente es precisamente $1/\eta_0$. Luego si η_0 no es creciente podemos encontrar puntos que pertenecen a dos rectas distintas con lo que la solución tendría que tomar dos valores diferentes y por lo tanto

³Diederik Johannes Korteweg (1848-1941) comenzó estudios de ingeniería, pero pronto se pasó a las Matemáticas. Su tesis "Sobre la propagación de ondas en un tubo elástico", 1878, que preparó bajo la dirección de van der Waals, fue la primera tesis doctoral que se defendió en la Universidad de Amsterdam. Tres años después, Korteweg fue nombrado catedrático de Matemáticas, Mecánica y Astronomía de la Universidad de Amsterdam. Su principal contribución científica es el artículo [KdV] de 1895 escrito con su discípulo Gustav de Vries (1866-1934), quien había defendido su tesis doctoral sobre ese tema el año anterior.

Korteweg fue también el director de otra tesis histórica "Sobre los fundamentos de las Matemáticas" de L. E. J. Brouwer, de 1907. Korteweg dirigió la "Nieuw Archief voor Wiskunde" desde 1897 hasta su muerte. A su cargo estuvo la edición de las Obras Completas de Christiaan Huygens.

la solución ha dejado de existir. Se ha producido un choque. De hecho es muy fácil ver que en ese punto η_x se hace infinito y que el primer tiempo positivo en que esto ocurre es precisamente

$$T = \frac{-1}{\min \eta'_0}. \quad (14)$$



Figura 4: Diederik Johannes Korteweg

Como conclusión obtenemos que la existencia de dicha ola solitaria ha de ser consecuencia de un **equilibrio perfecto entre la dispersión provocada por el término de tercera derivada y el de concentración o choque creado por la interacción no lineal.**

Es fácil obtener la ola solitaria a partir de la ecuación (13). Para ello y por simplicidad de cálculos posteriores tomaremos $c_0 = 0$, $c_1 = 3/2$ y $\nu = 1/4$, con lo que obtenemos la ecuación⁴

$$\eta_t = \frac{1}{4}(6\eta\eta_x + \eta_{xxx}). \quad (15)$$

Buscamos “olas solitarias”, es decir, soluciones del tipo $\eta(x, t) = f(y)$ con $y = x - ct$. Substituyendo

$$-cf' = \frac{1}{4}(6ff' + f'''),$$

integrando y tras una multiplicación por f' y una nueva integración obtenemos

$$-\frac{c}{2}f^2 = \frac{1}{4}\left(f^3 + \frac{(f')^2}{2}\right) + af + b, \quad (16)$$

siendo a y b constantes cualesquiera. En particular si $a = b = 0$ se puede integrar elementalmente y obtener

$$f(y) = 2c \operatorname{sech}^2(\sqrt{c}y + \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

⁴A lo largo de estas páginas haremos distintas elecciones de dichos parámetros siempre con la idea de simplificar los cálculos algebraicos en cada situación. Es un ejercicio sencillo comprobar que la descripción del conjunto de soluciones no se ve afectada por este hecho.

que con las constantes adecuadas es la onda solitaria propuesta por Boussinesq y Rayleigh. De hecho éste fue el cálculo hecho por Korteweg y de Vries. Estos obtuvieron algo más ya que obviamente distintos valores de los parámetros dan otras soluciones. En particular es inmediato probar la existencia de soluciones periódicas que no son sinusoidales de acuerdo a la teoría de Stokes. A estas soluciones Korteweg y de Vries las llamaron ondas “cnoidales” y que como veremos más adelante se pueden escribir en términos de las funciones elípticas de Jacobi (de ahí el nombre).

SOLITONES

UN EXPERIMENTO NUMÉRICO “MENOR”

Transcurrieron unos 60 años desde las observaciones de Russell hasta que Korteweg y de Vries propusieron la ecuación que lleva su nombre. Dicha ecuación permaneció como una curiosidad científica durante otros 60 años hasta que reapareció gracias a un trabajo de Gardner y Morikawa. Sin embargo, nuestro interés se centra en unos experimentos numéricos, de Fermi, Pasta y Ulam realizados en 1955 en el computador Maniac, por entonces recientemente construido en Los Álamos.

Una de sus intenciones era probar la utilidad de la nueva y poderosa máquina en cuestiones de investigación básica. Para ello trataron de escoger un ejemplo sencillo de planteamiento, pero cuya resolución necesitara de una cantidad de cálculos imposibles de hacer con lápiz y papel. Escogieron un sistema dinámico formado por una cadena unidimensional de muelles fijada en los extremos y con una débil interacción no lineal. Es sabido que cuando esta perturbación no existe la energía permanece constante a lo largo del tiempo en cada modo de vibración. Se esperaba que la interacción no lineal entre los distintos modos diera lugar a que la energía del sistema se repartiera equitativamente entre ellos. Se trataba en concreto, de medir a qué velocidad ocurría la “equipartición de energía”. Los resultados que obtuvieron contradecían la existencia de esta última. En concreto vieron (figura 5) que para datos iniciales sencillos (sen x) la energía no se transmitía a todos los modos sino que permanecía en el primero y, en forma más débil, en los cercanos a él. Además observaron que la densidad de energía en éstos tenía un comportamiento casi periódico. Los resultados fueron una gran sorpresa, incluso para el propio Fermi que lo consideró desde el principio “a minor discovery”, según relata el propio S. M. Ulam en su autobiografía, [Ul], página 227.

El modelo discreto es fácil de describir (consultar para lo que sigue [DEGM], página 5, y [Pa] que es además una excelente referencia para muchos de los aspectos tratados en este artículo). Supongamos un sistema dinámico de N partículas idénticas, con masa la unidad (N suficientemente grande; en particular Fermi, Pasta y Ulam tomaron 64), puestos en línea con los extremos fijados y de forma que las fuerzas actúan sólo entre muelles colindantes. Si Q_n denota la desviación respecto del equilibrio de la n -ésima partícula la ecuación

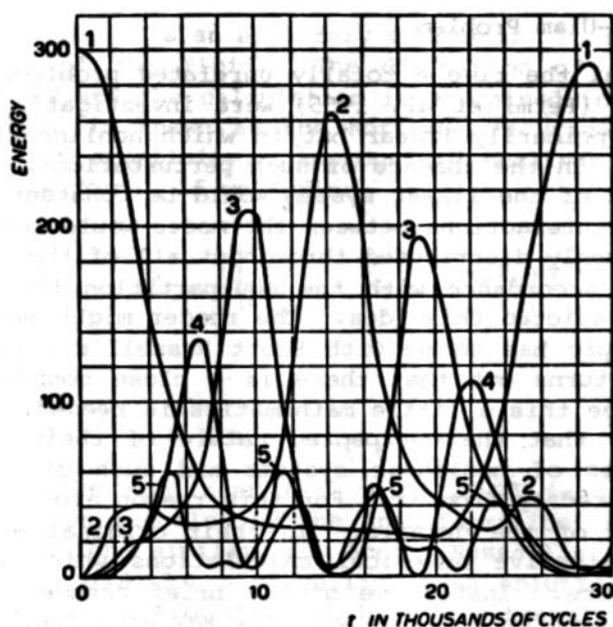


Figura 5: Resultado del experimento numérico realizado en 1955 por Fermi, Pasta y Ulam en el MANIAC, [FPU].

para ella será

$$\ddot{Q}_n = f(Q_{n+1} - Q_n) - f(Q_n - Q_{n-1}), \quad (18)$$

siendo f una función que incluye tanto la interacción lineal como un término no lineal. Fermi, Pasta y Ulam propusieron dos modelos uno cuadrático y otro cúbico

$$f(Q) = \gamma Q + \alpha Q^2,$$

$$f(Q) = \gamma Q + \beta Q^3,$$

donde γ es la constante que está determinada por la cadena y α y β son pequeñas.

KRUSKAL Y ZABUSKY

La recurrencia o quasiperiodicidad observada por Fermi, Pasta y Ulam no pasó desapercibida. En particular a Zabusky y Kruskal quienes en un intento de explicarla pasaron al límite continuo en (18). Como resultado obtuvieron

la ecuación de KdV si la interacción es cuadrática y, en el caso cúbico, la que se conoce como ecuación de KdV modificada (mKdV)

$$u_t + \nu u_{xxx} + c_0 u^2 u_x = 0, \quad (19)$$

imponiendo condiciones iniciales

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (20)$$

periódicas. En particular para KdV tomaron $u_0 = \cos x$, y observaron que tras un lapso de tiempo se formaba un tren de ondas solitarias de distintas alturas y por tanto de distintas velocidades. Pero debido a las condiciones de frontera periódicas las más rápidas acababan capturando a las más lentas. Había entonces un tiempo de interacción para posteriormente volver aparecer la más lenta a la izquierda y la más rápida a la derecha con la misma forma y sólo con una pequeña desviación en la fase. La más lenta un poco más retrasada de lo que hubiera estado de no haber habido “colisión” y la más rápida un poco más adelantada (figuras 6 y 7). Este hecho les llamó poderosamente la atención ya que parecía como si la interacción fuera lineal siendo el efecto final prácticamente la superposición de los efectos, de tal forma que las ondas después de la colisión ni se rompían, ni se dispersaban, como si de partículas se trataran. Zabusky y Kruskal acuñaron el término **solitón** para referirse a ellas. Este fué el inicio de un nuevo campo de investigación que se ha mantenido muy activo hasta la actualidad.

Antes de adentrarnos en él conviene volver un poco a la nueva ecuación (19) que ha aparecido y que hemos llamado mKdV. En particular podemos preguntarnos si posee también soluciones que sean ondas solitarias. Por simplicidad tomaremos $\nu = 1$. Siguiendo el mismo tipo de argumentos que para KdV, llegamos de nuevo a un sistema autónomo de segundo orden que es fácil de analizar. En particular observamos que el signo de c_0 juega un papel importante. Si es positivo encontraremos en efecto ondas solitarias, que de hecho pueden integrarse explícitamente y que toman la forma de

$$u(x, t) = f_c(x - ct) \quad f_c(y) = ac \operatorname{sech}(cy), \quad (21)$$

con a sólo dependiendo de c_0 . Sin embargo si c_0 es negativo existen ondas solitarias pero que no tienden a cero en el infinito sino a dos constantes distintas según nos acerquemos a infinito por valores positivos o negativos. Este tipo de soluciones son conocidas con el nombre de **kinks**.

LEYES DE CONSERVACIÓN

Como hemos dicho en la sección anterior los solitones se habían observado numéricamente. Quedaba por tanto dar una demostración analítica de la existencia de este tipo tan especial de soluciones. Esto llevará su tiempo.

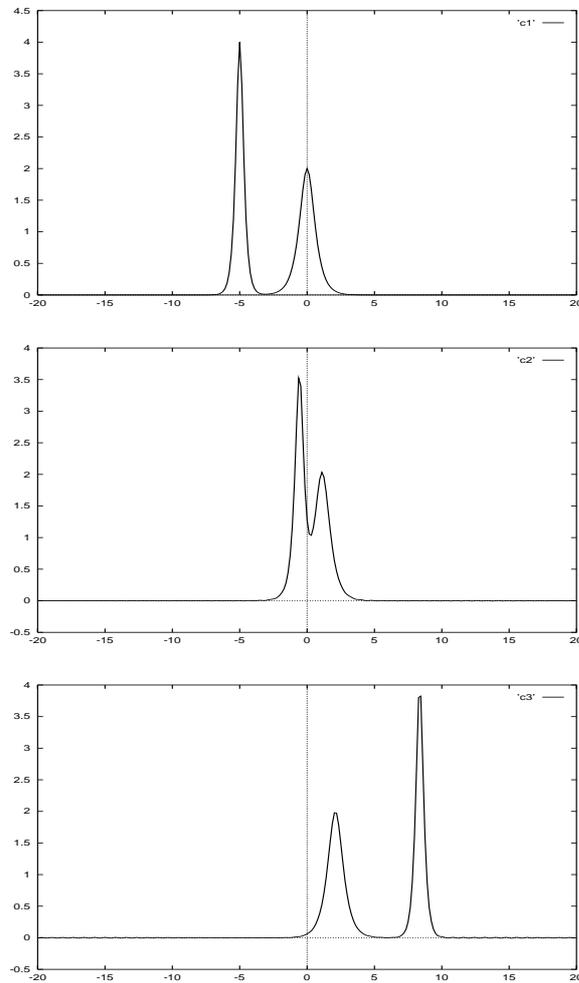


Figura 6: Integración numérica de la ecuación mKdV (19) con $\nu = 1$, $c_0 = 6$ y dato inicial

$$u_0(x) = 4\operatorname{sech} 4(x + 5) + 2\operatorname{sech} 2x$$

El solitón más rápido y alto adelanta al más bajo y lento. La secuencia en tres tiempos distintos deja patente la gran estabilidad de todo el proceso.

Un primer paso en esta dirección lo constituyó la demostración de que KdV posee infinitas leyes de conservación, hecho realmente notable y que da una primera idea de la gran estructura que posee el conjunto de soluciones.

Por una ley de conservación entendemos una ecuación del tipo

$$T_t + X_x = 0, \quad (22)$$

donde la cantidad conservada, T , y el flujo, $-X$, son funciones de x , t y u , aunque en general nos reduciremos a considerar que T y X son polinomios en u y las derivadas de u . Las leyes de conservación son útiles entre otras cosas, para obtener estimaciones a priori. Así si X tiende a cero en el infinito entonces $\int_{-\infty}^{\infty} T dx = cte$. De hecho conviene recordar que Korteweg y de Vries escribieron su ecuación precisamente en forma conservativa:

$$u_t + (3u^2 + u_{xx})_x = 0. \quad (23)$$

Con un poco de paciencia se obtiene fácilmente otras dos leyes de conservación:

$$(u^2)_t + (4u^3 + 2uu_{xx} - u_x^2)_x = 0, \quad (24)$$

y

$$\left(-u^3 + \frac{1}{2}u_x^2\right)_t + \left(-\frac{9}{2}u^4 - 3u^2u_{xx} + 6uu_x^2 + u_xu_{xxx} - \frac{1}{2}u_{xx}^2\right)_x = 0. \quad (25)$$

De hecho tomando $u = v_x$ la ecuación KdV puede escribirse en forma variacional siendo el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}v_xv_t + v_x^3 - \frac{1}{2}v_{xx}^2. \quad (26)$$

Las tres leyes de conservación obtenidas que corresponden a la conservación de la masa, del momento y de la energía, se obtienen aplicando el teorema de Noether a la invarianza de KdV por traslaciones en v , en x y en t , respectivamente. Como veremos más adelante en general no es natural esperar más cantidades que se conserven. Sin embargo es además invariante por las transformaciones de Galileo:

$$\frac{1}{6}\lambda + u(x - \lambda t, t) \quad (27)$$

es solución si u lo es. Lo que de nuevo por el teorema de Noether da otra ley de conservación. En este caso la cantidad conservada $(xu + 3tu_x^2)$, depende de x y de t .

Sorprendentemente, Kruskal y Zabusky encontraron una ley de conservación más (un polinomio de grado 4 por tanto). La razón para su búsqueda es sencilla. Como hemos dicho la colisión de dos ondas solitarias había sido observada sólo experimentalmente. Intentaron explicar dicho fenómeno razonando

por analogía a como se hace en la dinámica de gases en las que las condiciones de salto (*i.e.* para determinar la solución después que se ha producido el choque) se obtienen a partir de las cantidades físicas que se conservan en el sistema particular que se está analizando (condiciones de Rankine-Hugoniot). Miura, por indicación de Kruskal encontró las de grados 6 y 7. Las de grados 8 y 9 se obtuvieron con facilidad y Kruskal y Miura conjeturaron que habría infinitas (ver [Mi]). Parece que se corrió el rumor de que sólo habría hasta grado 9. Miura encontró la de grado 10. También se calculó, esta vez con la ayuda de un ordenador, la de grado 11 que tiene 45 términos.

LA TRANSFORMACIÓN DE MIURA

El siguiente paso lo dio de nuevo Miura, relacionando las soluciones de mKdV con las de KdV. En concreto si v resuelve la ecuación mKdV:

$$Qv = v_t - 6v^2v_x + v_{xxx} = 0, \quad (28)$$

y

$$u = -(v^2 + v_x), \quad (29)$$

entonces u resuelve la ecuación KdV

$$Pu = u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0,$$

ya que

$$Pu = -(2v + \partial/\partial x)Qv.$$

Esta transformación es análoga a la de Hopf-Cole para la ecuación de Burgers. Como dijimos en la sección 2, el signo del término no lineal en (28) es relevante. En particular con el signo opuesto (*i.e.* el positivo) la transformación (29) se convierte en $u = -(v^2 + v_x)$.

Ahora bien, mientras KdV es invariante por las transformaciones de Galileo (25) mKdV no lo es. Jugando con esta idea y la transformación de Miura, Gardner dio una demostración muy sencilla de que KdV, y como consecuencia de (28) también mKdV, tienen infinitas leyes de conservación (ver por ejemplo [Mi], página 423). Simultáneamente pero con un argumento más complicado Kruskal y Miura obtuvieron el mismo resultado. Lo importante de estas nuevas cantidades que se conservan es que implican que de existir la solución y de decaer suficientemente en el infinito sus derivadas, tienen estas últimas su norma L^2 uniformemente acotada en el tiempo. Es decir razonando por inducción en el número de derivadas

$$\sup_t \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_x^\alpha u(x, t)|^2 dx < C_\alpha, \quad (30)$$

para cualquier α . Como hemos dicho esta desigualdad no es habitual. Así si consideramos la ecuación de Korteweg–de Vries generalizada

$$u_t + u_{xxx} \pm u^p u_x = 0,$$

se obtiene (30) para $\alpha = 0, 1$ trivialmente si $p = 1, 2, 3$. Sin embargo si $p = 4, 5, 6, \dots$ sólo es cierto si $\alpha = 0$, o si $\alpha = 1$ y consideramos el signo negativo o bien una condición de pequeñez en el dato inicial (ver [Mi], página 424). La razón de esto último es que para poder concluir algo con el signo malo (*i.e.* el positivo) necesitamos poder acotar

$$\int |u|^{p+2} < c \int u_x^2,$$

bajo la condición $\int u^2 = 1$, con c suficientemente pequeña para absorber la constante que aparece en la ley de conservación.

EL MÉTODO INVERSO DE SCATTERING

La transformación de Miura resulta tener implicaciones más profundas de las que cabría esperar. En particular es el punto de partida en el desarrollo de un método de resolución exacto para el problema de valores iniciales asociado a la ecuación KdV y que se debe a Gardner, Greene, Kruskal y Miura, ver [GGKM].

Consideremos por tanto la ecuación de KdV

$$u_t + (3u^2 + u_{xx})_x = 0$$

con dato inicial

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (31)$$

del que suponemos que

$$\sum_{j=0}^4 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d^j}{dx^j} u_0(x) \right|^2 dx < \infty \quad (32)$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |u_0(x)| dx < \infty, \quad (33)$$

condiciones suficientes para poder hablar de lo que sigue.

Observemos que la transformación de Miura

$$-(v_x + v^2) = u,$$

puede verse como una ecuación de Riccati en v . Por lo tanto la transformación

$$v = \psi_x / \psi,$$

la convierte en

$$\psi_{xx} + u\psi = 0 \quad (34)$$

que es la ecuación de Schrödinger estacionaria con potencial u y nivel de energía (*i.e.* autovalor) cero. Usando las transformaciones de Galileo de KdV (27) llegamos a la ecuación

$$\psi_{xx} + (u + \lambda)\psi = 0, \quad (35)$$

para cualquier λ . Obsérvese que la variable t de $u(\cdot, t)$ aparece sólo como parámetro. El problema habitual en Mecánica Cuántica es dado el potencial u encontrar los niveles de energía λ y sus correspondientes autofunciones o funciones de onda. Es el problema directo de scattering.

Sin embargo nuestro problema es precisamente el inverso, encontrar la solución u , es decir el potencial. Físicamente supone conocer la forma o la distribución de masa de un objeto a partir de todos los sonidos que emana (*i.e.* de la energía o amplitud de cada frecuencia). Para ello necesitaremos conocer los datos completos del scattering. Estos son los siguientes. En primer lugar la información que proviene del espectro continuo, que se expresa en términos del comportamiento en el infinito de las autofunciones determinadas por un coeficiente de reflexión $a(k)$ y otro de transmisión $b(k)$:

$$\hat{\psi}(x; k) \sim \begin{cases} e^{-ikx} + b(k)e^{ikx}, & \text{si } x \rightarrow \infty \\ a(k)e^{-ikx}, & \text{si } x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (36)$$

con $\lambda > 0$ y $k = \lambda^{1/2}$. Y en segundo lugar, la información correspondiente al espectro discreto que viene dado por el comportamiento en el infinito de las autofunciones

$$\psi_n(x) \sim c_n e^{-\kappa_n x} \quad \text{si } x \rightarrow +\infty, \quad (37)$$

con $\lambda < 0$ y $\kappa_n = (-\lambda)^{1/2}$ para cada autovalor discreto $n = 1, 2, \dots, N$.

Entonces se puede probar que

$$u(x) = 2 \frac{d}{dx} K(x, x), \quad (38)$$

siendo $K(x, z)$ la solución de la ecuación de Marchenko

$$K(x, z) + F(x+z) + \int_x^\infty K(x, y)F(y+z) dy = 0 \quad (39)$$

y

$$F(X) = \sum_{n=1}^N c_n^2 e^{-\kappa_n X} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k) e^{ikX} dk. \quad (40)$$

Por tanto recuperar u requiere además resolver la ecuación integral (39), que puede escribirse como una integral de Fredholm y a su vez la solución vía una serie de Neumann.

INVARIANZA DEL ESPECTRO

Ahora bien, de todo lo dicho hasta ahora no queda claro cómo dado el dato inicial u_0 se puede obtener $u(t)$ para todo t . La primera observación relevante en esta dirección es la invarianza del espectro discreto $\kappa_n^2(t)$ a lo largo de la evolución. En efecto, tras manipulaciones sencillas pero no inmediatas se puede probar que si $u(x, t)$ satisface la ecuación de Korteweg-de Vries, entonces sorprendentemente

$$(\kappa_n^2)_t = 0. \quad (41)$$

De la misma forma se obtiene que el coeficiente $c_n(t)$ evoluciona de acuerdo a la ecuación

$$(c_n)_t - 4\kappa_n^3 c_n = 0,$$

y por tanto

$$c_n(t) = c_n(0) e^{4\kappa_n^3 t}. \quad (42)$$

Con respecto al espectro continuo basta dar la evolución de los coeficientes de reflexión y transmisión, obteniéndose

$$a(k; t) = a(k; 0), \quad (43)$$

y

$$b(k; t) = b(k; 0) e^{8ik^3 t} \quad t \geq 0. \quad (44)$$

El método de construcción de la solución es por tanto claro. Las condiciones impuestas al dato inicial (33-34) aseguran tanto la existencia y unicidad de la solución (ver [BS] y [ST]) como la resolución del problema directo de scattering. Es decir podemos determinar $\kappa_n(0)$, $c_n(0)$, $a_n(0)$ y $b_n(0)$. Después usamos (41-44) para obtener $\kappa_n(t)$, $c_n(t)$, $a_n(t)$ y $b_n(t)$. Finalmente resolvemos la ecuación de Marchenko (39) y de ahí usamos (38) para obtener la solución u .

Este procedimiento resulta ser particularmente sencillo cuando el coeficiente reflejado $b(k; 0)$ es cero. Los potenciales con esta propiedad son llamados

potenciales de Bargman. Es sencillo encontrar ejemplos explícitos, ver [Lm], página 8, siendo el más elemental

$$u_0(x) = 2 \operatorname{sech}^2 x, \quad (45)$$

conocido con el nombre de potencial de Eckart. En este caso se obtiene fácilmente que sólo hay un autovalor discreto $\kappa = \kappa_1 = 1$, con $c_1(0) = \sqrt{2}$ y autofunción

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sech} x.$$

Por tanto

$$F(X, t) = 2e^{8t-X}, \quad K(x, z; t) = L(x, t)e^{-z}, \quad (46)$$

y la ecuación de Marchenko queda reducida a

$$L + 2e^{8t-x} + 2Le^{8t} \int_x^\infty e^{-2y} dy = 0. \quad (47)$$

Fácilmente se resuelve esta última, obteniendo

$$L(x, t) = \frac{2e^{8t-x}}{1 + e^{8t-x}}.$$

Aplicando (38) obtenemos la “onda solitaria”

$$u(x, t) = 2 \operatorname{sech}^2(x - 4t).$$

SOLITÓN- N

Es evidente que este procedimiento es generalizable siempre que conozcamos potenciales cuyos coeficientes de reflexión sean cero. En particular nos va a permitir obtener una expresión analítica del solitón observado por Kruskal y Zakusky con la salvedad hecha de que estamos considerando la ecuación KdV en toda la recta real y no en el toro como ellos. En efecto, tomemos como potencial

$$u(x, 0) = u_0(x) = 6 \operatorname{sech}^2(x). \quad (48)$$

En este caso se obtienen dos autovalores discretos $\kappa_1 = 1$ y $\kappa_2 = 2$. Los coeficientes normalizados son $c_1(0) = \sqrt{6}$ y $c_2(0) = 2\sqrt{3}$, con lo que F toma la forma de una combinación lineal de funciones en variables separadas

$$F(X, t) = 6e^{8t-X} + 12e^{64t-2X}. \quad (49)$$

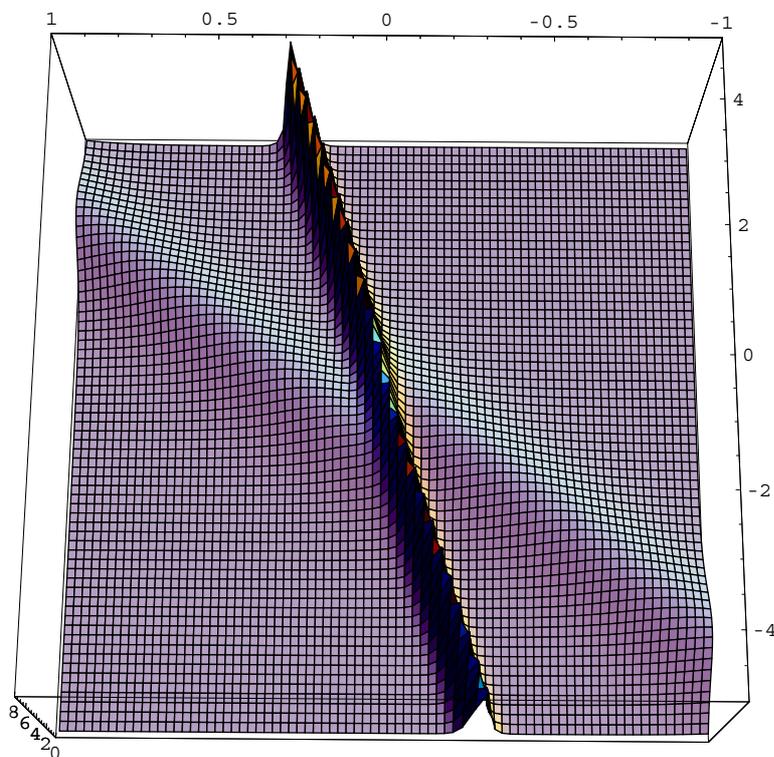


Figura 7: Gráfica realizada con *Mathematica* © de la superficie dada por la fórmula (50) con $-1 < t < 1$ y $-5 < x < 5$:

$$u(x, t) = 8 \frac{3 + 4\cosh(2x - 8t) + \cosh(4x - 64t)}{(3\cosh(x - 28t) + \cosh(3x - 36t))^2}$$

que representa la interacción elástica de dos solitones. Obsérvese cómo después de la colisión mantienen su forma, retrasándose una y adelantándose la otra respecto de la posición que deberían tener.

Lo que sugiere a su vez buscar soluciones de K en la forma

$$K(x, z; t) = L_1(x, t)e^{-z} + L_2(x, t)e^{-2z},$$

reduciéndose la ecuación integral de Marchenko a un sistema lineal 2×2 . Finalmente obtenemos la solución exacta

$$u(x, t) = 8 \frac{3 + 4\cosh(2x - 8t) + \cosh(4x - 64t)}{(3\cosh(x - 28t) + \cosh(3x - 36t))^2}, \quad (50)$$

que es el solitón formado por dos olas (figura 7).

Obsérvese que para tiempos muy negativos el perfil de u viene determinado primero por una ola con fase $x - 16t$ y amplitud 8 y después otra ola de fase $x - 4t$ y amplitud 2. Como vemos la más alta (y también más estrecha) va más rápida que la más baja, cazando a esta última precisamente alrededor de $t = 0$. Sin embargo en tiempos muy positivos encontramos las mismas olas pero en orden invertido y con un salto en la fase de $\pm 1/2 \log 3$.

La forma de generar un solitón con N olas, o solitón- N , es considerar un potencial con N autovalores y tal que los coeficientes de reflexión sean nulos. Este es el caso si tomamos

$$u(x, 0) = u_0(x) = N(N + 1) \operatorname{sech}^2(x).$$

La correspondiente ecuación para F toma la forma de una combinación lineal de N términos de funciones de variables separadas y K se obtiene por tanto de resolver un sistema lineal de $N \times N$.

Hemos reducido el resolver la ecuación no lineal de KdV a resolver una cantidad numerable de sistemas lineales. Lo cuál es verdaderamente notable y que justifica el nombre de transformada de Fourier no lineal a la transformada de scattering que acabamos de esbozar. Sólo hay una objeción que poner. Este método no funciona cuando las condiciones iniciales son periódicas. En efecto, en el método anterior para determinar c_n y b_k necesitábamos saber a priori la solución $u(t)$ en el infinito para cualquier t , tomando el valor cero en nuestro caso. Es esta información la que se pierde en el caso periódico.

Cabe preguntarse si no habría un método más directo. En concreto recordemos que la existencia de una onda solitaria se deducía de forma sencilla de resolver una ecuación diferencial ordinaria estacionaria

$$-cf = \frac{1}{4}(3f^2 + f'') + a, \quad (51)$$

con a y c parámetros libres. Además la existencia de ondas (olas) periódicas en este caso era igual de sencillo (la onda cnoidal de Korteweg y de Vries).

Si intentamos el mismo procedimiento para encontrar el solitón-2, obviamente no bastará una ecuación de segundo orden ya que ahora tenemos dos velocidades c_1 y c_2 . Por otro lado no está en absoluto claro que exista dicha ecuación ordinaria. Un punto de vista más prometedor es caracterizar la onda solitaria y, por extensión el solitón-N, usando un método variacional. Es decir, ver dichas soluciones como puntos críticos de las diferentes integrales de la evolución

$$I_N = \int_{-\infty}^{\infty} T_N(x, t) dx, \quad T_1 = u, \quad T_2 = (1/2)u^2, \dots, \quad (52)$$

bajo ciertas condiciones sobre I_1, \dots, I_{N-1} . Este procedimiento, introducido formalmente por Kruskal y Zabusky, fue el utilizado por Lax para obtener (de hecho fue la primera prueba conocida, ver [Lx]) la expresión analítica del solitón-2. Así Lax extremiza I_4 bajo la condición de que I_3 e I_2 permanezcan fijas:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta}{\delta u} (I_4 + aI_3 + bI_2) \\ &= \frac{1}{10} u_{xxxx} - uu_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 + u^3 + a(u^2 - \frac{1}{3} u_{xx}) + bu. \end{aligned} \quad (53)$$

Lax probó que esta ecuación se puede reducir a una de segundo orden que, a su vez, se puede analizar con cuidado y en particular estudiar su comportamiento asintótico. El problema para el solitón-N , $N > 2$, se volvía inabordable.

MÉTODOS INVERSOS MÁS GENERALES

En el mismo artículo, Lax generaliza la propiedad isoespectral de la KdV a otras ecuaciones no lineales. Por un método algebraico sencillo construye ecuaciones de evolución no lineales a las que se les puede asociar un operador lineal cuyo espectro queda invariante por el flujo. En el caso particular de la KdV da lugar a una familia infinita de ecuaciones que se conoce como “jerarquía de la KdV”.

De hecho el método de Lax es abstracto. Así Zakharov y Shabat extendiéndolo a sistemas consiguen asociar un operador de scattering a la ecuación

$$\begin{aligned} iu_t + u_{xx} \pm |u|^2 u &= 0 \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) &= u_0(x). \end{aligned} \quad (54)$$

A esta ecuación se la conoce en la literatura como no lineal (cúbica) de Schrödinger, y abreviadamente NLS. Constituye junto con KdV, mKdV y la que se conoce como ecuación de sineGordon ($u_{tt} - u_{xx} = \text{senu}$) el conjunto

principal de ecuaciones canónicas de medios dispersivos no lineales unidimensionales (ver [Wh], capítulo 17). El método de Zakharov y Shabat fue generalizado por Ablowitz, Kaup, Newell y Segur (ver por ejemplo [AS], página 8). Su idea principal es escribir la ecuación estacionaria de Schrödinger (34) en un sistema lineal de dos ecuaciones de orden 1. La matriz correspondiente viene dada por

$$\begin{pmatrix} \partial_x & q \\ -1 & \partial_x \end{pmatrix}.$$

La generalización consiste en considerar el problema (ψ es un vector del plano)

$$\begin{pmatrix} \partial_x & q \\ r & \partial_x \end{pmatrix} \psi = -i\lambda\psi, \quad (55)$$

con lo que obtienen sistemas de ecuaciones de evolución en q y en r . Para distintos valores de los parámetros y distintas elecciones de r como función de q se van obteniendo KdV, mKdV, la cúbica de Schrödinger, etc ...

SOLITONES Y CURVAS ALGEBRAICAS

MÉTODO DE HIROTA

En la sección anterior conseguimos por fin expresar analíticamente, aunque sea sólo para el caso de la recta, lo que Kruskal y Zabusky habían observado numéricamente (nunca insistiremos demasiado en recordar que los hechos ocurrieron en ese orden). Sin embargo el caso periódico sigue fuera de nuestro alcance. Un nuevo paso en esa dirección corrió a cargo de Hirota. El punto de partida es una observación debida a diferentes autores. Recordemos que en el método inverso de scattering que expusimos en la sección 4, el potencial se obtiene por la fórmula (38) $q(x) = \frac{d}{dx}K(x, x)$. De hecho esbozamos la manera de obtener K en el caso del solitón-N. En concreto $K(x, x)$ aparece como la derivada del logaritmo de un determinante $N \times N$, con lo que

$$q(x) = 2 \frac{d^2}{dx^2} \log \Delta,$$

siendo Δ dicho determinante. Hirota plantea entonces la sustitución

$$u(x, t) = 2 \frac{d^2}{dx^2} \log F(x, t),$$

en la ecuación KdV ($u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$) obteniendo,

$$F_{xt}F - F_xF_t + F_{xxxx}F - 4F_{xxx}F_x + 3F_{xx}^2 = 0. \quad (56)$$

Obsérvese que la ecuación anterior es de hecho una forma cuadrática, lo que sugiere la existencia de una forma bilineal y por tanto la posibilidad de factorización. Para ello Hirota desarrolla un nuevo cálculo a partir de los operadores

$$D_x^m D_t^n a \cdot b = (\partial_x - \partial_{x'})^m (\partial_t - \partial_{t'})^n a(x, t) b(x', t')|_{(x', t')=(x, t)}.$$

Con ellos la ecuación (56) se escribe

$$(D_x D_t + D_x^4) F \cdot F = 0.$$

El cálculo con estos operadores es particularmente sencillo para funciones de la forma $\exp(kx - \omega t)$. En particular

$$D_x^m D_t^n e^{k_1 x - \omega_1 t} \cdot e^{k_2 x - \omega_2 t} = (k_1 - k_2)^m (-\omega_1 + \omega_2)^n e^{(k_1 x + k_2 x) - (\omega_1 + \omega_2) t}.$$

Esto permite obtener fácilmente las soluciones correspondientes al solitón-1 y al solitón-2. A partir de ahí los cálculos son engorrosos, pero es fácil obtener una posible ley de recurrencia que después se demuestra que es correcta por inducción. Esta es

$$F_N = \sum_{\mu^*} \exp \left(\sum_{i=1}^N \mu_i \eta_i + \sum_{1 \leq i < j} \mu_i \eta_j A_{ij} \right) \tag{57}$$

siendo $\mu^* = (\mu_i)_{i=1, \dots, N}$, con $\mu_i = 0, 1$; $\eta_i = k_i x - k_i^3 t + \eta_i^{(0)}$ y A_{ij} los desfases de los solitones

$$\exp(A_{ij}) = \left(\frac{k_i - k_j}{k_i + k_j} \right)^2. \tag{58}$$

LA FUNCIÓN \mathcal{P} Y LA FUNCIÓN Θ

Posteriormente Hirota extendió el procedimiento esbozado anteriormente a la ecuación mKdV, a la de sineGordon y a la de Schrödinger no lineal, que como ya hemos dicho, son ecuaciones canónicas y que se pueden integrar exactamente.

Sin embargo, para nuestros propósitos es conveniente volver a la deducción inicial que hicimos de la onda viajera observada por Russell y que ahora estamos llamando solitón-1. Recordemos la ecuación (16)

$$-\frac{c}{2} f^2 = \frac{1}{4} \left(f^3 + \frac{(f')^2}{2} \right) + af + b,$$

donde a , b , y c son constantes cualesquiera. Como dijimos esta ecuación se puede integrar en términos de funciones elípticas, obteniendo por un lado la

onda solitaria con $a = 0 = b$ y soluciones periódicas para otros valores de los parámetros (la onda cnoidal de Korteweg y de Vries). Para ello es más conveniente reescribir

$$f = -2f_1 + \frac{c}{12}$$

lo que nos da

$$(f')^2 = 4f_1^3 - g_2f_1 - g_3, \quad (59)$$

con lo que f_1 es la función inversa de la integral

$$\int_{\omega}^{\infty} \frac{df_1}{\sqrt{4f_1^3 - g_2f_1 - g_3}} = \int_{\omega}^{\infty} \frac{df_1}{\sqrt{4(f_1 - e_1)(f_1 - e_2)(f_1 - e_3)}}.$$

Obsérvese que hay dos casos singulares $a = 0, b = 0, c \neq 0$ que como ya vimos nos da la onda solitaria, y $a = 0, b = 0, c = 0$ que se integra inmediatamente: $-2/(x + \alpha)^2$. En los casos restantes conviene extenderla al campo complejo obteniéndose una función bien conocida. Se trata, ver por ejemplo [PA], de la función doblemente periódica $\mathcal{P}(z)$ de Weierstrass

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n} \left(\frac{1}{(z - \Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2} \right) \quad \Omega = m\omega_1 + n\omega_2, \quad (60)$$

con ω_1 y ω_2 los dos periodos, $\mathcal{P}(\omega_1/2) = e_1$, $\mathcal{P}(\omega_1/2 + \omega_2/2) = e_2$, $\mathcal{P}(\omega_2/2) = e_3$, $g_2 = 60 \sum \frac{1}{\Omega^4}$, y $g_3 = 140 \sum \frac{1}{\Omega^6}$. La curva del plano de fases $(f_1, f_1') = (\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ es la cúbica no singular $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$.

Por tanto

$$u(x, t) = -2\mathcal{P}(x - ct + x_0; \omega_1, \omega_2) + \frac{c}{12}. \quad (61)$$

En particular si $\omega_1 = \tau$ y $\omega_2 = 1$ con $\tau = ri$, $r > 0$, la solución que se obtiene es periódica y real. Se trata de la onda cnoidal.

La ventaja de esta conexión es que es muy fácil determinar en este caso quien es la función F de Hirota. Se trata de la función Θ de Jacobi

$$\Theta(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z), \quad (62)$$

ya que

$$\mathcal{P}(z; \tau) = -\frac{d^2}{dz^2} \log \Theta \left(z + \frac{1+z}{2}; \tau \right) + cte. \quad (63)$$

El hecho realmente sorprendente, y en absoluto obvio (ver [KN], [No]), es que la forma de obtener el solitón-N, $N > 1$, es considerar curvas hiperelípticas

$$Y^2 = (X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_{2g+2}) \quad (64)$$

siendo g el género y $Q = \{a_1, a_2, \dots, a_{2g+2}\}$ el conjunto de puntos de Weierstrass. Entonces

$$u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \Theta(xU + tW + z) + c_0, \quad (65)$$

siendo Θ en este caso la función de Jacobi asociada a la curva (64):

$$\Theta(z; \Omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp(\pi i n \cdot \Omega \cdot n + 2\pi i n \cdot z), \quad (66)$$

con Ω la matriz de periodos. En (65) U , W y c_0 son constantes que dependen de la curva (64) y del punto de Weierstrass elegido en ella.

Cabe preguntarse si el método inverso de scattering que según vimos en la sección 2, fue muy fructífero a la hora de determinar el solitón-N de la recta, puede ser usado a su vez en el caso periódico. Una primera salvedad es que el problema directo de scattering en el caso de que el potencial sea periódico es más delicado, aunque bien conocido. En concreto el espectro para la ecuación estacionaria de Schrödinger (9) con q un potencial periódico viene dado por bandas. Los potenciales en la recta con coeficiente de reflexión nulo y un número finito de autovalores discretos, son sustituidos en el contexto periódico por potenciales cuyo espectro lo forman un número finito de bandas. Cada una de estas bandas da lugar a un toro de los que forman la superficie de Riemann (64). Resolver la ecuación periódica para datos generales requiere estudiar potenciales cuyo espectro lo forma un número infinito de bandas. La solución vendrá dada en principio (esto no es obvio evidentemente, ver [McKT]) como una serie infinito dimensional.

Como dijimos en el caso de la recta el problema de extender el método inverso de scattering al caso periódico reside principalmente en obtener del dato inicial los datos de scattering necesarios para, después de dejarlos evolucionar en el tiempo, recuperar a partir de ellos la solución. Se puede decir como conclusión, ver [Ne], página 101 y siguientes, que la superficie de Riemann dada por la curva hiperelíptica (65) juega el mismo papel para el solitón-N periódico que el espectro discreto jugaba en los potenciales sin coeficiente de reflexión en el solitón-N de la recta.

EL PROBLEMA DE VALORES INICIALES. LA CUESTIÓN DE LA REGULARIDAD

Hasta ahora los métodos que hemos utilizado han sido algebraicos. Esto es fácil de entender puesto que nuestro hilo conductor ha sido el encontrar soluciones

explícitas o exactas de la ecuación KdV. Así con distintas transformaciones el problema se reducía a uno de Álgebra Lineal; resolver un sistema lineal de ecuaciones $N \times N$ con N finito. Observemos también que no han aparecido casi espacios de funciones. Sólo en la sección 4, y más bien por motivos académicos, impusimos condiciones de tamaño y regularidad en el potencial/dato inicial. Sin embargo no hacían falta para nuestros propósitos, ya que éstos se reducían a encontrar el solitón- N , lo cuál hicimos explícitamente.

Por otro lado, la propia motivación inicial del problema, a saber una cuestión sobre el comportamiento de una superficie de agua en un canal estrecho y de poca profundidad bajo ciertas condiciones iniciales, sugiere que tenemos que ser capaces de medir errores y perturbaciones. La primera pregunta es además, no conviene olvidarlo, hasta que punto el modelo propuesto por Korteweg y de Vries es coherente. Es decir, da lugar a la existencia de una solución única para una amplia gama de situaciones y que ésta es estable a posibles errores. Es lo que nos proponemos analizar en esta sección. Una respuesta particular a esta cuestión se reduce a estudiar la estabilidad sólo de las soluciones particulares que hemos encontrado. Nuestro análisis es sobre datos generales.

MÉTODO DE ENERGÍA

Como ya dijimos en la sección 4, Bona-Scott y Saut-Temam imponen la condición

$$\sum_{j=0}^4 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d^j}{dx^j} u_0(x) \right|^2 dx < \infty. \quad (67)$$

Al espacio de las funciones que verifican (67) le llamaremos el espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ con $s = 4$, y usaremos la notación $\|u_0\|_s$ para referirnos a su norma. Bona y Scott probaron que existe una única solución de la ecuación de KdV

$$\begin{aligned} u_t + u_{xxx} \pm uu_x &= 0 & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (68)$$

de forma que $u(t)$ verifica (67) para todo T habiendo dependencia continua de la solución respecto del dato inicial. Su prueba se basa en lo que se conoce como el método de energía. En pocas palabras se reduce a lo siguiente. Se diferencia la ecuación (67) j veces respecto de x obteniendo una nueva ecuación en la variable $\omega = \frac{\partial^j}{\partial x^j} u$ que por la regla de Leibnitz tiene la propiedad de que el coeficiente de u_x (que es el difícil de tratar) es lineal en ω . En esta nueva ecuación se multiplica por ω y se integra por partes asumiendo suficiente decaída en el infinito. La principal observación es que el término ω_{xxx} desaparece en esta integración por partes. Se obtiene entonces

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_j \leq C_j \|u_x(t)\|_{L^\infty} \|u(t)\|_j, \quad (69)$$

y como trivialmente

$$\sup_x |u_x(x, \tau)| \leq C \|u(\tau)\|_2, \quad (70)$$

obtenemos

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_j \leq C_j \|u(t)\|_j^2.$$

Es decir

$$\|u(t)\|_j \leq e^{-\frac{\|u(0)\|_j}{1 - ct\|u(0)\|_j}}.$$

Tomando $T = T(\|u_0\|_2^{-2})$, *cf.* con (14), suficientemente pequeño obtenemos la estimación a priori

$$\sup_{|t| < T} \|u\|_j \leq C \|u_0\|_j \quad j \geq 2.$$

Para construir la solución se utiliza lo que se conoce como el método de viscosidad artificial, aunque en el problema que tratamos es bastante natural. Se añade a la ecuación (68) el término de viscosidad $-\epsilon u_{xx}$. La ecuación correspondiente se resuelve fácilmente utilizando la iteración de Picard-Lindelof en la fórmula de variación de las constantes y las propiedades de regularización del semigrupo del calor generado por $\epsilon \partial_{xx}$. Estas últimas dependen evidentemente de ϵ , pero dado que la estimación a priori también se obtiene para el nuevo problema y no depende de ϵ podemos pasar al límite.

Conviene hacer algunas observaciones. La primera es que el resultado por ahora es local. La segunda es que la dispersión provocada por u_{xxx} no juega ningún papel en el argumento ya que desaparece en la integración por partes. De hecho el mismo argumento funciona para la ecuación de Burgers que analizamos en la sección 1. En este caso nos apareció también la cantidad $\sup_x |u_x(x, \tau)|$, hasta el punto que era ésta la que medía el tiempo máximo de existencia, lo que a su vez nos dice que el argumento anterior es óptimo y necesariamente local en el tiempo.

Finalmente conviene observar que este método funciona también para ecuaciones no lineales de la forma

$$\begin{aligned} u_t + u_{xxx} \pm u^p u_x &= 0 & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (71)$$

con $p = 1, 2, \dots$, y en particular para la mKdV.

La forma de pasar del resultado local al global es la siguiente. Como hemos visto, el tiempo de existencia T tiene la forma $T = T(\|u_0\|_2)$. Dado que la ecuación KdV (aquí la dispersión sí juega un papel crucial) tiene leyes de conservación que implican la acotación de $\|u(t)\|_2$ para todo t , basta repetir el argumento con $u(T/2)$ en vez de $u(0) = u_0$ para construir la solución hasta $3T/2$ y así sucesivamente. Este procedimiento es válido para la mKdV (*i.e.* $p = 2$ en (70)) pero no para otros p ya que las únicas leyes de conservación que se tienen en esos casos involucran a u y a u_x .

Dos preguntas naturales son las siguientes. Por un lado, qué ocurre si exigimos al dato inicial menos regularidad. Por ejemplo, que esté en L^2 (*i.e.* $j=0$ en (67)) o que esté en H^1 , espacios muy naturales ambos porque son los asociados a las leyes de conservación habituales. La segunda cuestión es sobre la generalización de la ecuación a otros p . En concreto, ¿existe solución global si $p = 3, 4, \dots$?

ESPACIOS DE SOBOLEV

Para empezar hablar de estas cuestiones necesitamos dar una definición más útil de los espacios de Sobolev. Ello se hace por medio de la transformada de Fourier

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx,$$

que como es sabido convierte derivación en multiplicación y es a su vez, gracias al teorema de Plancherel, una isometría en L^2 :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi. \quad (72)$$

Entonces es fácil ver que H^s se puede definir de manera equivalente como el conjunto de funciones tales que

$$\|f\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi. \quad (73)$$

La ventaja de esta nueva definición es que ahora s es un número real cualquiera y no necesariamente un número natural. Así un función que decaiga en el infinito y que sea regular salvo en un punto en el que tiene un salto pertenece a H^s con $s > 1/2$. Otro ejemplo característico y que nos aparecerá más adelante es

$$f_N(x) = e^{iNx} \varphi(x), \quad |N| > 1,$$

siendo φ una función “buena” como por ejemplo $\varphi = e^{-x^2}$. En este caso $\|f_N\|_s \sim N^s$. Con esta nueva definición de H^s el argumento de Bona-Scott y Saut-Temam se puede apurar, *cf.* la desigualdad (70), hasta $s > 3/2$.

Un ingrediente más para intentar entender qué relación existe entre el parámetro s y la ecuación (67) es un sencillo argumento de escala. La ecuación (71) es invariante por el cambio de escala

$$v(x, t) = \lambda^{2/p} u(\lambda x, \lambda^3 t), \tag{74}$$

ya que si u es solución entonces v definida en (74) también lo es. Por otro lado si en (73) conservamos la homogeneidad, sustituyendo el término $(1 + |\xi|^2)^s$ por $|\xi|^{2s}$ (este cambio sólo afecta a las frecuencias ξ pequeñas y por tanto no afecta a la regularidad de f) calculando $\|v\|_s$ en términos de la de $\|u\|_s$ se concluye que ambas coinciden si $s = s(p) = \frac{p-4}{2p}$. Por esta razón a $s(p)$ se le conoce como el exponente crítico asociado a p . De la misma forma si $s > s(p)$ el problema se dice que es subcrítico. En este contexto $p = 4$ juega un papel importante ya que es el exponente crítico para datos en L^2 (*i.e.* $s = 0$).

Tras trabajos fundamentales de Kato, Kruzhkov y Faminskii, y Ginibre y Tsutsumi, en colaboración con C. Kenig y G. Ponce en [KPV1] probamos que el problema (71) está localmente bien propuesto si

$$s > 3/4, \quad p = 1 \quad (KdV), \tag{75}$$

$$s \geq 1/4, \quad p = 2 \quad (mKdV), \tag{76}$$

$$s > 1/12, \quad p = 3,$$

$$s \geq s(p) = \frac{p-4}{2p} \quad p \geq 4 \quad (\text{dato inicial pequeño}). \tag{77}$$

Estos resultados son globales si $s \geq 1$ por la existencia de una ley de conservación.

Una de las ideas de este artículo consiste en olvidar el método de energía y reducirse a un argumento de iteración de Picard para resolver la ecuación integral equivalente

$$u(t) = e^{t\partial_x^3} u_0 \pm \int_0^t e^{(t-\tau)\partial_x^3} u^p(\tau) u_x(\tau) d\tau, \tag{78}$$

siendo $e^{t\partial_x^3} u_0$ la solución del problema lineal asociado (4) que en tiempo $t = 0$ toma el valor u_0 . Para resolver (78) se necesita encontrar una bola de un

espacio de funciones adecuado en el que utilizar el teorema de la aplicación contractiva. En otras palabras obtener estimaciones en x y en t para los dos sumandos del miembro de la derecha de la ecuación (78). Esto conecta con una rama del Análisis Armónico que se ha desarrollado desde finales de los años 60 y que se conoce genéricamente como la teoría de Integrales Oscilatorias. Un ejemplo de “integral oscilatoria” es (6), y un ejemplo de estimación relevante es

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \sup_t |e^{t\partial_x^3} u_0|^4 dx \right)^{1/4} < c \|u_0\|_{1/4}. \quad (79)$$

NUEVOS ESPACIOS DE FUNCIONES

En el caso periódico el método anterior fracasa, ya que parte de las estimaciones clave son falsas. Bourgain en [Bo] propone una forma de sortear esta dificultad introduciendo unos espacios de funciones más ajustados al operador lineal asociado. Como queremos resolver la ecuación para funciones periódicas en x pero no en t conviene escribir éstas en una integral-serie de Fourier

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \sum_k \hat{a}_k(\tau) e^{ikx + it\tau} d\tau.$$

Bourgain considera el espacio $X_{s,b}$ de funciones tales que

$$\|u\|_{X_{s,b}}^2 = \sum_k \int_{\mathbb{R}} |\hat{a}_k(\tau)|^2 (1 + |k - \tau^3|)^{2b} (1 + |\xi|)^{2s} d\tau < \infty. \quad (80)$$

El parámetro b típicamente verifica $1/2 < b < 1$, y el parámetro s mide lo mismo que en el caso de los espacios de Sobolev (*i.e.* regularidad espacial). La razón de que aparezca el peso $k - \tau^3$ es clara. Es el que se obtiene al calcular $\partial_t + \partial_{xxx}$ dentro de la suma-integral (80). Bourgain prueba entonces que el problema de valores iniciales está localmente bien propuesto si

$$s \geq 0 \quad p = 1 \quad (\text{KdV}) \text{ en el toro y en la recta,} \quad (81)$$

$$s \geq 1/2 \quad p = 2 \quad (\text{mKdV}) \text{ en el toro.} \quad (82)$$

De nuevo el resultado es global para $p = 1$ por la ley de conservación. De hecho mirando con cuidado la demostración se ve que en este caso se puede incluso bajar de $s = 0$ obteniéndose fácilmente $s \geq -1/2$. En la recta se puede ir más lejos pero sólo en el caso de KdV. En [KPV2] se prueba

$$s > -3/4 \quad p = 1 \text{ (KdV) en } \mathbb{R}. \quad (83)$$

Este último resultado está más acorde con (76) ya que la transformación de Miura (29) involucra una derivada.

INESTABILIDAD. FLUJOS DE CURVAS ALABEADAS

Cabe preguntarse si los resultados anteriores son óptimos. Fijaremos nuestra atención en las ecuaciones de KdV (13) y de mKdV (19) ambas en la recta real. Recordemos que en el caso de mKdV se tienen resultados para $s \geq 1/4$ viniendo la obstrucción en la demostración precisamente de la desigualdad (79) que es óptima. El mismo tipo de obstrucción aparece en otra ecuación canónica de la que ya hemos hablado, la cúbica de Schrödinger (NLS):

$$\begin{aligned} iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u &= 0 & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) &= u_0(x). \end{aligned} \quad (84)$$

Esta ecuación tiene la invarianza por escala $\lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)$, por lo que razonando como hicimos en la sección anterior se concluye que $s = -1/2$ es el exponente crítico. Se sabe resolver el problema de valores iniciales si $s \geq 0$. El tipo de datos que genera problemas es de la forma

$$u_{0,N}(x) = e^{iNx} \varphi(x) \quad N > 1, \quad (85)$$

siendo φ una función buena, como por ejemplo

$$\varphi = e^{-x^2}. \quad (86)$$

Otro ejemplo más interesante para nuestros propósitos es el que genera el solitón-1 para NLS y que coincide con el de mKdV dado en (21):

$$\varphi = c \operatorname{sech}(cx), \quad c \in \mathbb{R}. \quad (87)$$

En el caso de mKdV se toma la parte real en (85).

La ecuación (84) es invariante por lo que se conocen como transformaciones de Galileo. En concreto nos permiten escribir la solución u_N con dato el dado en (85), en términos de la que tiene por dato φ y que llamaremos u :

$$u_N(x, t) = e^{-itN^2 + iNx} u(x - 2Nt, t). \quad (88)$$

Esta familia de transformaciones introduce una nueva variante, ya que si la usamos en vez de la familia asociada a las dilataciones dada en (74), encontramos un nuevo exponente crítico. En efecto si tomamos $u_{0,N}$ como en (85) la norma en H^s de $u_{0,N}$ es independiente de N sólo si $s = 0$. De hecho, dado que si se verifica (87) la solución es el solitón-1 de (84), conocemos en forma explícita la solución en este caso. Es un ejercicio relativamente sencillo demostrar, jugando con el parámetro N y el que proviene del cambio de escala c , que si $s < 0$ no hay dependencia continua uniforme en el tamaño del dato inicial y por tanto cierta inestabilidad aparece si no hay la regularidad necesaria.

Pero nuestra motivación inicial eran KdV y mKdV. Desgraciadamente en mKdV no existen transformaciones análogas a las de NLS, por lo que el argumento anterior parece abocado al fracaso. Sorprendentemente esto no es así. La conexión va a venir a través de la ecuación que, siguiendo a B. Dahlberg, llamaremos KdV geométrica:

$$u_t - u_{xxx} - \frac{3}{2}|u|^2 u_x = 0. \quad (89)$$

Como vemos coincide con mKdV si las soluciones son reales, y de hecho el resultado de existencia local $s \geq 1/4$ también se aplica en este caso.

EL HILO DE TORBELLINO

Al igual que NLS, la ecuación (89) se puede obtener por el método AKNS que vimos al final de la sección 4 ([AS], página 13), tomando $r = \pm \bar{q}$ en vez de $r = \pm q$. De la misma forma el calificativo “geométrico” es aplicable a ambas ecuaciones. Concretamente NLS está asociada con la ecuación del “hilo de torbellino” (traducción del inglés de “vortex filament”, ver por ejemplo [Sa], secciones 22.3, 23.6 y 27.3). Por hilo de torbellino entendemos un tubo de vorticidad de sección infinitesimal. En 1906 Da Rios, en su “tesina” dirigida por Levi-Civita (ver [Ri]), modeliza la dinámica de un hilo de torbellino aislado por medio de una familia de curvas $\gamma(s, t)$ en \mathbb{R}^3 . Un hilo que no esté perfectamente recto se ve afectado por el movimiento del fluido, movimiento provocado por la propia vorticidad del filamento. Como consecuencia el hilo se mueve a su vez de una forma consistente (ver [Lm], cap. 7 para lo que sigue). La ecuación que Da Rios propuso y que después fue redescubierta por otros autores es la siguiente:

$$\gamma_t = \gamma_s \times \gamma_{ss}, \quad (90)$$

siendo s la parametrización respecto del arco y t la variable temporal. Un primer hecho notable de esta ecuación es que preserva la parametrización de arco. Es decir $|\gamma_s(s, t)| = |\gamma_s(s, 0)|$ para todo tiempo. Otra forma análoga de escribir (90) se obtiene utilizando el triedro de Frenet con lo que la ecuación se convierte en

$$\gamma_t = \kappa B, \quad (91)$$

siendo κ la curvatura y B la binormal.

Un segundo hecho notable de esta ecuación fue descubierto por Hasimoto quien observó que si k y τ son la curvatura y la torsión respectivamente de γ y

$$\psi(s, t) = k(s, t) e^{i \int^s \tau(u, t) du} \quad (92)$$

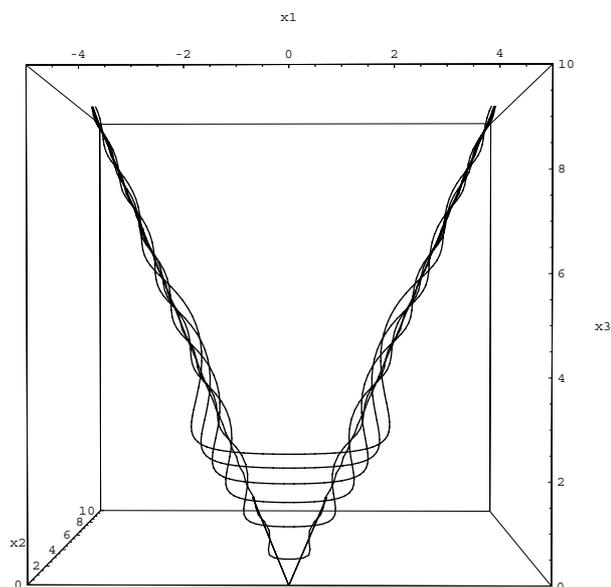


Figura 8: Representación gráfica utilizando *Mathematica* © de la evolución en varios tiempos distintos de un hilo de torbellino empezando en $t = 10^{-4}$ en el que se observa claramente la formación de una singularidad en forma de esquina. Esta última se produce en tiempo cero, siendo el flujo uniformemente continuo en intervalos finitos de tiempo.

entonces ψ es solución de NLS:

$$-i\psi_t = \psi_{ss} + 1/2(|\psi|^2\psi + A(t)), \quad (93)$$

siendo $A(t)$ una función cualquiera que se elimina con un cambio de variable sencillo. De esta forma Hasimoto dio soluciones explícitas de la ecuación (90). En particular los solitones-1 están relacionados con las curvas elásticas en el sentido de Bernoulli (ver [LS]).

Recordemos que (93) es invariante por las transformaciones de Galileo (88). Una cuestión natural es entender dichas transformaciones en el contexto del hilo de torbellino (90). Recientemente, ver [GRV], y en colaboración con S. Gutiérrez y J. Rivas hemos abordado esta cuestión. Una forma de hacerlo es trabajar con las ecuaciones intrínsecas en términos de la curvatura y la

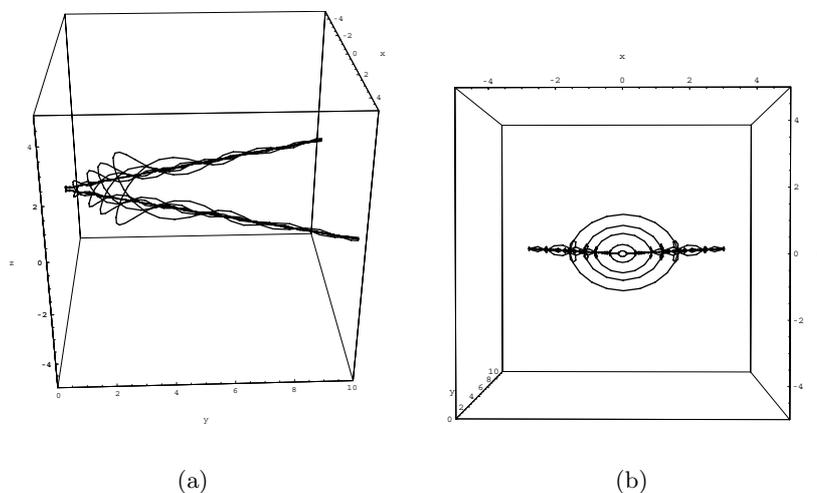


Figura 9: Otra perspectiva de la figura (8) anterior con la prolongación a tiempos negativos (a) y una de sus proyecciones (b). Obsérvese la apariencia autosemejante de la figura.

torsión. Estas fueron encontradas también por Da Rios y son las siguientes:

$$\begin{aligned} k_t(s, t) &= -(k\tau)_s - k_s\tau \\ \tau_t(s, t) &= \left(\frac{k_{ss} - k\tau^2}{k} \right)_s + k_s k. \end{aligned} \quad (94)$$

Es inmediato comprobar que si (k, τ) es solución del sistema (94)

$$k_N(s, t) = k_N(s - 2Nt) \quad \tau_N(s, t) = \tau(s - 2Nt) + N, \quad (95)$$

es también una solución de dicho sistema. Es fácil imaginar que cualquier solución invariante respecto de estas transformaciones ha de jugar un papel relevante en el estudio de (90). Si han de ser invariantes han de verificar

$$(k_N, \tau_N) = (k, \tau) \quad \text{para todo } N.$$

Un sencillo cálculo determina que las únicas soluciones salvo traslaciones en la variable espacial son

$$(k, \tau) = \left(\frac{k_0}{\sqrt{t}}, \frac{s}{2t} \right) \quad t > 0,$$

siendo k_0 un número real cualquiera. Como consecuencia si

$$\gamma_{k_0}(s, t) = \sqrt{t} G_{k_0} \left(\frac{s}{\sqrt{t}} \right)$$

con G_{k_0} la curva de curvatura constante $k(s) = k_0$ y torsión $\tau(s) = s/2$, hemos obtenido una solución particular de (90). Como vemos esta solución es de una gran simetría ya que no es solo invariante respecto de las transformaciones dadas en (95) sino que también es autosemejante respecto del cambio de escala. En [GRV] probamos que γ_{k_0} converge uniformemente cuando el tiempo tiende a cero a una curva formada por dos semirrectas unidas por un vértice (figura (8)). Además la solución se puede prolongar para tiempo negativo, ver figura (9, a). Como la curva G es infinitamente regular al ser solución de un sistema de Frenet con coeficientes regulares, concluimos que hay soluciones regulares de (90) que desarrollan singularidades en tiempo finito. Estas singularidades en forma de esquina juegan un papel relevante en el fenómeno de reconexión en helio superfluido, ver [Sc], y aparecen también en modelos matemáticos utilizados en el diseño de válvulas para la arteria aorta, ver [PM]. El comportamiento de la solución que se espera en estos contextos es autosemejante como el que sugiere la figura 9b.

Parece una cuestión razonable preguntarse si habrá flujos de curvas análogos asociados a otras ecuaciones que admitan solitones. Esta pregunta fue contestada afirmativamente por Lamb. La expresión (91) conecta el flujo del hilo de torbellino con el movimiento helicoidal (κB). Si en lugar de este movimiento rígido tomamos el de las traslaciones y hacemos la misma transformación de Hasimoto (92), la ecuación que se obtiene es precisamente la KdV geométrica

$$\psi_t = \psi_{sss} + 3/2|\psi|^2\psi_s, \quad (96)$$

y que en el caso de que la curva sea plana ($\tau = 0$) se convierte en la μ KdV! usual.

La siguiente observación es que aunque (96) no es invariante por las transformaciones de Galileo, si tomamos como dato inicial precisamente el que verifica (85) y (87) la solución se puede escribir explícitamente, tomando la forma

$$u(x, t) = 2c e^{-it(3Nc^2 - N^3)} e^{ixN} \operatorname{sech}(c(x - tc^2 + 3tN^2)) \quad N \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (97)$$

Como vemos se trata de una familia biparamétrica. El parámetro c es el habitual que relaciona la amplitud con la velocidad del solitón y que viene dado simplemente por la invarianza por escala de la ecuación (96). Por tanto la novedad viene del parámetro N . Nótese que cuanto más grande es este último,

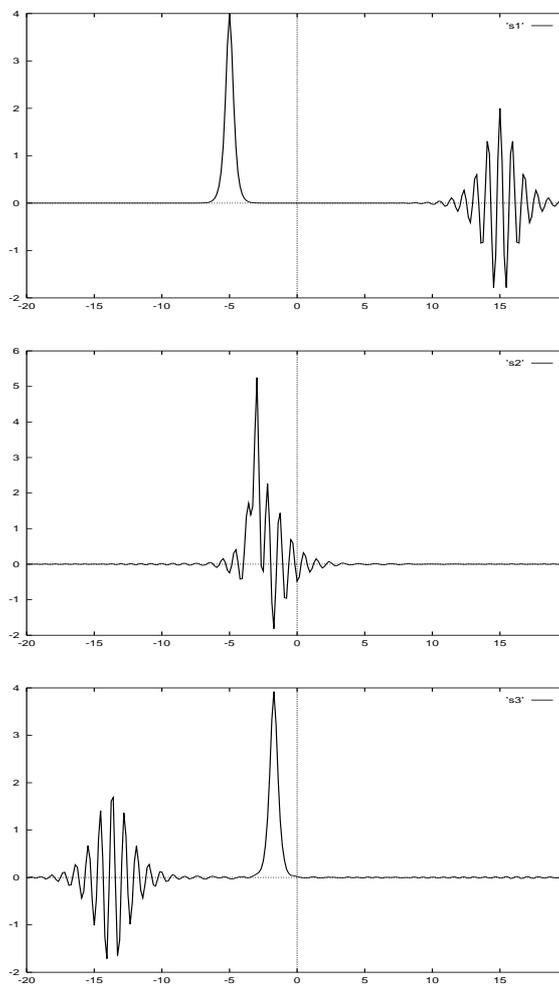


Figura 10: Interacción de un solitón de Wadati que se desplaza hacia la izquierda y una ola solitaria de Russell que se desplaza hacia la derecha.

el término de dispersión creado por la tercera derivada espacial es mayor. Esto provoca una tendencia a viajar a la izquierda, cosa que se produce siempre que $c^2 - 3N^2 < 0$. Jugando de nuevo con ambos parámetros como dijimos en el caso de la cúbica de Schrödinger, se demuestra que si $s < 1/4$, *cf.* con (76), no hay dependencia continua uniforme y por tanto aparece el mismo tipo de inestabilidad si no hay regularidad suficiente.

Hay un inconveniente con las soluciones exactas dadas en (97), y es que no son reales. En principio, parece poco probable que se pueda encontrar una familia de soluciones reales de propiedades parecidas, ya que el equilibrio entre dispersión y los efectos no lineales parece en este caso mucho más complicado. Compárese la buena estructura del término $u\bar{u}u$ con respecto a la de uuu desde el punto de vista las exponenciales imaginarias que aparecen en (97). Sin embargo si algo hemos intentado transmitir en esta páginas, es precisamente la gran estructura que poseen estas ecuaciones. En [Wa] M. Wadati encontró que si

$$u(x, t) = 2\partial_x \tan^{-1} \left(\frac{c \operatorname{sen}(Nx + \delta t)}{N \operatorname{cosh}(cx + \gamma t)} \right), \quad (98)$$

siendo $\gamma = c(3N^2 - c^2)$ y $\delta = N(N^2 - 3c^2)$, entonces $u(x, t)$ es solución de la mKdV:

$$u_t + u_{xxx} + 6u^2u_x = 0. \quad (99)$$

Obsérvese que si en la familia anterior tomamos N grande y $c = 1$ entonces $u(x, 0) \sim 2 \cos(2Nx) \operatorname{sech} x$ (figuras 3 y 10) y por tanto es similar a la parte real de (97). Con esta familia biparamétrica de soluciones se obtiene para mKdV la misma inestabilidad, si $s < 1/4$, que para la KdV geométrica (96). Evidentemente podríamos haber utilizado este contraejemplo en ambos casos, pero mientras la comprobación de que (97) es solución es relativamente sencilla, la de (98) requiere cierta paciencia.

Estas ideas llevadas a la ecuación KdV dan también un resultado negativo si $s < -3/4$, (*cf.* con (83)), aunque el resultado no es del todo satisfactorio ya que los contraejemplos son soluciones complejas. Saber si efectivamente datos muy oscilantes dan lugar a ondas/olas que reflejan una cierta inestabilidad parece una pregunta interesante. ¿Cuál sería el experimento que Scott Russell hubiera hecho al respecto?

AGRADECIMIENTOS

Es un placer agradecer a G. González, G. Ponce y F. Vadillo sus observaciones sobre distintos aspectos de este artículo, y a C. Gorría, S. Gutiérrez y J. Rivas su inestimable ayuda con las gráficas.

REFERENCIAS

- [AS] ABLOWITZ, M.J., SEGUR, H., *Solitons and the Inverse Scattering Transform*. SIAM Studies in Applied Mathematics, 1981.
- [BS] BONA, J., SMITH, R., The initial-value problem for the Korteweg–de Vries equation. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 278 (1974) 555–604.
- [Bo] BOURGAIN J., Fourier restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. *Geometric and Functional Anal.*, 3 (1993) 107-156, 209-262
- [DEGM] DOOD, R.K., EILBECK, J.C., GIBBON, J.D., MORRIS, H.C., *Solitons and Nonlinear Wave Equations*. London Acad. Press, 1982.
- [DJ] DRAZIN, P.G., JOHNSON, R.S., *Solitons: an introduction*. Cambridge texts in Applied Mathematics, 1989.
- [FPU] FERMI, E., PASTA, J., ULAM, S.M., Studies in nonlinear problems. *Tech. Report, LA-1940, Los Alamos Sci. Lab.*, 1955.
- [GGKM] GARDNER, C.S., GREENE, J.M., KRUSKAL, M. D., MIURA, R. M., Method for solving the Korteweg–de Vries equation. *Phys. Rev. Lett.*, 19 (1967) 1095–1097.
- [GRV] GUTIÉRREZ, S., RIVAS, J., VEGA, L., Formation of singularities and similarity solutions in the motion of a vortex filament under LIA. *Pre-publicación*.
- [KdV] KORTEWEG, D. J., DE VRIES, G., On the change of forma of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Phil. Mag.*, (5) 39 (1895).
- [KPV1] KENIG, C. E., PONCE G. Y VEGA, L., Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg–de Vries equation via the contraction principle. *Comm. Pure Appl. Math.*, 46 (1993) 527-620.
- [KPV2] KENIG, C. E., PONCE G., Y VEGA, L., A bilinear estimate with applications to the KdV equation. *Journal Amer. Math. Soc.*, 9 (1996) 573-603.
- [KN] KRICHEVER I.M., NOVIKOV, S.P., Holomorphic bundles and nonlinear equations. *Physica D*, 3 (1981) 267–293.

- [Lm] LAMB, G.L., *Elements of soliton theory*. John Wiley & Sons, Nueva York, 1980.
- [LS] LANGER, J., SINGER, D. A., The total squared curvature of closed curves. *Jour. of Diff. Geom.*, 20 (1984) 512–520.
- [Lx] LAX, P., Integrals of nonlinear evolution equations of evolution and solitary waves. *Comm. in Pure and Appl. Math.*, 21 (1968) 467–490.
- [McKT] MCKEAN, H.P., TRUBOWITZ, E., Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of infinitely many branch points. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 29 (1976) 143–226.
- [Mi] MIURA, R.M., The Korteweg–de Vries equation, a survey of results. *SIAM Rev.*, 18 (1976) 412–459.
- [Ne] A.C. NEWELL, *Solitons in Mathematics and Physics*. SIAM, 1985.
- [No] NOVIKOV, S. P., A method for solving the periodic problem for the KdV equation and its generalizations. *Topics in Current Physics*, Editores Bullogh, R., Caudrey, P., (1980) 325–338.
- [Pa] PALAIS, R. S., The symmetries of solitons *Bulletin A.M.S.*, 34, 4 (1997) 339–403.
- [PA] PUIG ADAM, P. *Curso teórico práctico de Ecuaciones Diferenciales aplicado a la Física y la Técnica*. Biblioteca Matemática, S.L., Madrid, 1975.
- [PM] PESKIN, C. S., MCQUEEN, M., Mechanical equilibrium determines the fractal fiber architecture of aortic heart valve leaflets. *Amer. J. of Physiology*, 266 (1994) H319–H328.
- [Ri] RICCA, R. L., The contributions of Da Rios and Levi-Civita to asymptotic potential theory and vortex filament dynamics. *Fluid Dynamics Research*, 18 (1996) 245–268.
- [Ru] RUSSELL, J. S., Report on waves. *Rep. 14th Meet. Brit. Assoc. Adv. Sci., York* (1844) 311–390.
- [Sa] SANTALÓ, L. A., *Vectores y Tensores con sus aplicaciones*. Editorial Universitaria de Buenos Aires, Buenos Aires, 1985.
- [Sc] SCHWARZ, K. W., Three-dimensional vortex dynamics in superfluid ^4He : Line-line and line-boundary interactions. *Phys. Rev. B*, 31 (1985) 5782–5804.

- [ST] SAUT, J. C., TEMAM Remarks on the Korteweg–de Vries equation. *Israel J. of Math.*, 24 (1976) 78–87.
- [Ul] ULAM, S. M., *Adventures of a mathematician*. C. Scribner’s sons, Nueva York, 1983.
- [Ur] URSELL, F., The long-wave paradox in the theory of gravity waves. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 49 (1953) 685–694.
- [Wa] WADATI, M., The modified Korteweg–de Vries equation. *J. Phys. Soc. Japan*, 34 (1973) 1289–1296.
- [Wh] WHITHAM, G.B., *Linear and Nonlinear Waves*. John Wiley & Son, Nueva York, 1974.
- [ZK] ZABUSKY, N.J., KRUSKAL, M.D., Interactions of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.*, 15 (1967) 240–243.
- [ZS] ZAKHAROV, V.E., SHABAT, A.B., Exact theory of two-dimensional selffocusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Sov. Phys. JETP*, 34 (1972) 62–69.

Luis Vega
Departamento de Matemáticas
Universidad del País Vasco
Apartado 644, 48080 Bilbao
correo electrónico: mtpvegol@lg.ehu.es