Series de productos de senos (y cosenos)

por

Antonio J. Durán, Mario Pérez y Juan Luis Varona

Resumen. En este artículo mostramos expresiones explícitas para las series

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(\pi m)^{k+2n}} \prod_{j=1}^{k} \operatorname{sen}(\pi m x_j)$$

con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k| < 1$, o

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m}}{((2m+1)\pi)^{k+1+2n}} \prod_{j=1}^{k} \operatorname{sen}((2m+1)\pi x_j/2),$$

así como algunas otras con cosenos en vez de senos, o con un parámetro adicional.

1. Introducción

Llamamos «identidad básica» a la siguiente fórmula, que se puede encontrar en [13, § 5.4.15, (20), p. 744]: para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(\pi m)^{k}} \prod_{j=1}^{k} \operatorname{sen}(\pi m x_j) = \frac{1}{2} \prod_{j=1}^{k} x_j, \tag{1}$$

si $|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k| < 1$.

Unas pocas observaciones antes de continuar:

(a) Para $k = 1$, eso es la serie de Fourier de $x/2$:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{\pi m} \operatorname{sen}(\pi m x) = \frac{1}{2}\, x, \qquad |x| < 1.$$

(b) El $(-1)^{m+1}$ se podría evitar usando $\operatorname{sen}(\pi m x) = (-1)^{m+1} \operatorname{sen}(\pi m(1-x))$. Esto se podría hacer en cualquiera de los x_j, y lo que ocurre es que la expresión sería válida en un dominio distinto; por ejemplo, con $k = 2$ tendríamos

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi m)^{2}} \prod_{j=1}^{2} \operatorname{sen}(\pi m x_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-x_1)x_2, & \text{si } |1-x_1| + |x_2| < 1, \\ \frac{1}{2}x_1(1-x_2), & \text{si } |x_1| + |1-x_2| < 1. \end{cases}$$

En la práctica, esto complica mucho las expresiones y los dominios en los que dichas expresiones son válidas, así que no nos vamos a ocupar de ello.

(c) Si escribimos (1) en la forma

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(\pi m)^{k+l}} \prod_{r=1}^{k} \operatorname{sen}(\pi m x_r) \prod_{s=1}^{l} \operatorname{sen}(\pi m y_s) = \frac{1}{2} \prod_{r=1}^{k} x_r \prod_{s=1}^{l} y_s$$

(que es válido cuando $|x_1|+\cdots+|x_k|+|y_1|+\cdots+|y_l| < 1$) y derivamos respecto de todas las variables y_s, obtenemos

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(\pi m)^{k}} \prod_{r=1}^{k} \operatorname{sen}(\pi m x_r) \prod_{s=1}^{l} \cos(\pi m y_s) = \frac{1}{2} \prod_{r=1}^{k} x_r,$$

que es [13, § 5.4.15, (21), p. 744]. Solo con este truco se pueden sumar bastantes más combinaciones trigonométricas que las que analizamos en este artículo, pero de nuevo no incidiremos más en ello.

(d) De (1) también se deduce que, para n un entero positivo,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(\pi m)^{k}} \prod_{j=1}^{k+2n} \operatorname{sen}(\pi m x_j) = 0.$$

En efecto, basta usar (1) con $k+2n$ en lugar de k y derivar $2n$ veces con respecto a una cualquiera de las variables x_j. Por supuesto, esto se podría aplicar a muchas otras series de las que aquí sumamos.

El objetivo de esta nota es dar una identidad mucho más general que (1), que proporciona una expresión explícita para las series

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(\pi m)^{k+2n}} \prod_{j=1}^{k} \operatorname{sen}(\pi m x_j)$$

con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y que de nuevo es válida si $|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k| < 1$. Dicha expresión, que resultará ser un polinomio (simétrico) en las variables x_j, se puede ver en el teorema 3. En realidad, conviene cambiar $m\pi$ por $2m\pi$ en el denominador de los sumatorios; en la serie anterior no tiene ninguna importancia pues se compensa cambiando x_j por $x_j/2$ y extrayendo una constante multiplicativa del sumatorio, pero también analizaremos series con expresiones del tipo $((2m+1)\pi)^k$ y ahí el 2 ya no se puede cargar en los x_j ni extraer una constante multiplicativa. Así pues, lo que daremos en el teorema 3 es una expresión explícita para

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m\pi)^{k+2n}} \prod_{j=1}^{k} \operatorname{sen}(2m\pi x_j/2), \tag{2}$$

con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y válida si $|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k| < 1$. (Por supuesto, en el teorema 3 escribiremos $\operatorname{sen}(m\pi x_j)$, pero aquí hemos puesto $2m\pi x_j/2$ para que se vea claro a qué nos referimos.)

Así mismo, estudiaremos las series de la forma

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^m}{(2m\pi-\mu)^{k+2n}} \prod_{j=1}^{k} \operatorname{sen}((2m\pi-\mu)x_j/2) \tag{3}$$

(teorema 8) y

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^m}{((2m+1)\pi-\mu)^{k+1+2n}} \prod_{j=1}^{k} \operatorname{sen}(((2m+1)\pi-\mu)x_j/2) \tag{4}$$

(teorema 5). En particular, (4) con $\mu = 0$ proporciona las sumas de

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{((2m+1)\pi)^{k+1+2n}} \prod_{j=1}^{k} \operatorname{sen}((2m+1)\pi x_j/2) \tag{5}$$

(corolario 6). Es interesante destacar que al sumar (2) aparecen los números de Bernoulli, mientras que en (5) aparecen los de Euler; en los casos generales con μ, en (3) aparecen los polinomios de Apostol-Bernoulli, y en (4) los de Apostol-Euler.

Por último, estudiaremos series similares con productos de cosenos. Véanse los teoremas 9 y 10 y el corolario 12. Realmente, quizás hubiera sido más natural estudiar primero lo que ocurre con las series de productos de cosenos (algunas expresiones son más sencillas y lo que ocurre con los senos se puede obtener derivando), pero nuestro interés en este tema surgió de intentar generalizar la «identidad básica» (1), y hemos querido mantener las argumentaciones a partir de allí.

Las técnicas que utilizamos en este artículo son las mismas que aparecen en [8, § 3], pero explicadas con más detalle. En realidad, el objetivo de [8] es más general y más ambicioso, lo cual no siempre permite encontrar expresiones tan «cerradas» como las que aquí obtenemos. En particular, en [8] no se analizan las series (3) o (4). Ni tampoco se muestra cómo los coeficientes de los monomios (en las variables $x_1, \ldots, x_k$) con los que se expresarán las series están relacionados con las particiones de Ramanujan (véanse las secciones 5 y 9).

Recordemos que los polinomios de Bernoulli $B_k(x)$ y los polinomios de Euler $E_k(x)$ se definen, por medio de una función generatriz, como

$$\frac{ze^{xz}}{e^z-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x)\,\frac{z^k}{k!}, \qquad \frac{2e^{xz}}{e^z+1} = \sum_{k=0}^{\infty} E_k(x)\,\frac{z^k}{k!} \tag{6}$$

(dos series que son convergentes en un entorno de $z = 0$). No es difícil demostrar usando (6) y algún cálculo con series de Taylor que $B_k(x)$ y $E_k(x)$ son polinomios mónicos de grado k. Además, se denominan números de Bernoulli a $B_k(0)$, y números de Euler a $2^k E_k(\frac{1}{2})$. Las definiciones y propiedades de estos polinomios y números se pueden ver en [7].

Los polinomios de Bernoulli y los de Euler son casos particulares de los denominados polinomios de Appell, que fueron introducidos por Appell en 1880 (véase [2])

y comparten muchas propiedades interesantes. Una familia de polinomios de Appell $A_k(x)$ se define por medio de una función generatriz

$$A(z)e^{xz} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x)\,\frac{z^k}{k!},$$

donde $A(z)$ es una función analítica en un entorno de $z = 0$. Si $A(0) \neq 0$, cada polinomio $A_k(x)$ tiene grado k (si $A(z)$ tiene un cero de multiplicidad m en $z = 0$, los polinomios $A_0(x), \ldots, A_{m-1}(x)$ son nulos y los demás $A_k(x)$ tienen grado $k-m$). Dos propiedades típicas de los polinomios de Appell son $A_k'(x) = kA_{k-1}(x)$ y la «fórmula binomial»

$$A_k(a+b) = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} A_{k-l}(a)b^l. \tag{7}$$

Los polinomios de Apostol-Bernoulli y de Apostol-Euler son también polinomios de Appell, y se definen añadiendo un parámetro λ a las funciones generatrices (6). Veremos las definiciones, y las propiedades que necesitemos, en la sección 6.

2. Unos polinomios auxiliares (senos)

Fijado $k \in \mathbb{N}$, comencemos definiendo

$$P_k(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m\pi i)^k} e^{i\pi m x}, \quad |x| < 1. \tag{8}$$

Vamos a identificar estos $P_k(x)$. En particular, aquí vemos que $P_k(x)$ es un polinomio de grado k que es una ligera variación del polinomio de Bernoulli $B_k(x)$:

Proposición 1. *Sea $k \in \mathbb{N}$. Se tiene*

$$P_k(x) = \frac{1}{k!} B_k((1+x)/2),$$

para $x \in (-1, 1)$ (y también en los extremos si $k \geq 2$).

Demostración. La fórmula de Hurwitz para los polinomios de Bernoulli dice esto:

$$B_k(x) = -k! \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{2\pi i m x}}{(2\pi i m)^k},$$

válido para $x \in (0, 1)$ si $k = 1$ y para $x \in [0, 1]$ si $k \geq 2$. Aunque hay otras maneras de demostrar esa fórmula, se prueba muy fácilmente por inducción integrando por partes sin más que usar $B_k'(x) = kB_{k-1}(x)$ (se puede ver, por ejemplo, en [11, sección 2] tomando $\lambda = 1$).

Entonces, podemos escribir (8) como

$$P_k(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m\pi i)^k}\, e^{i\pi m x} = -\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{i\pi m}}{(2m\pi i)^k} e^{i\pi 2m(x/2)}$$
$$= -\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{(2m\pi i)^k}\, e^{2\pi i m(1/2+x/2)} = \frac{1}{k!} B_k((1+x)/2),$$

válido para $(1+x)/2 \in (0,1)$, es decir, $x \in (-1,1)$ (y también en los extremos $x = \pm 1$ si $k \geq 2$). □

En particular, de ahí, y dado que los polinomios de Bernoulli son mónicos (y el polinomio k-ésimo tiene grado k), es obvio que $P_k(x)$ es un polinomio de grado k cuyo coeficiente director es $1/(2^k k!)$.

Más adelante utilizaremos de manera explícita los coeficientes de los polinomios $P_k(x)$, así que vamos a darlos. Emplearemos aquí que los polinomios de Bernoulli cumplen

$$B_k(a+b) = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} B_{k-l}(a) b^l \tag{9}$$

(véase [7, fórmula 24.4.12]), la denominada «fórmula binomial» que, como ya hemos comentado en la introducción, es una propiedad que satisface cualquier familia de polinomios de Appell.

Proposición 2. *Si para $k \in \mathbb{N}$ denotamos*

$$P_k(x) = \sum_{l=0}^{k} p_{l,k} x^l,$$

se tiene

$$p_{l,k} = \frac{-1}{2^k k!} \binom{k}{l} \big(2^{k-l} - 2\big) B_{k-l} = -\frac{2^{k-l} - 2}{2^k l!\,(k-l)!}\, B_{k-l},$$

donde B_j es el número de Bernoulli $B_j = B_j(0)$.

Demostración. Sin más que aplicar (9) y $B_j\big(\frac{1}{2}\big) = -(1 - 2^{1-j}) B_j$ (véase [7, fórmula 24.4.27]) tenemos

$$P_k(x) = \frac{1}{k!} B_k((1+x)/2) = \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} B_{k-l}\big(\tfrac{1}{2}\big) \frac{x^l}{2^l}$$
$$= -\frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \big(1 - 2^{1-k+l}\big) B_{k-l}\, \frac{x^l}{2^l},$$

y esto prueba el resultado. □

3. El resultado principal (senos)

Veremos aquí una expresión general para la serie (2), que va a ser un polinomio en las variables x_j. Para ello, vamos a manipular (2) con la ayuda de los polinomios $P_j(x)$ que hemos definido en la sección anterior. Previamente, necesitamos introducir cierta notación adicional.

Sin más que usar $\operatorname{sen}(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$, tenemos

$$\prod_{j=1}^{k} \operatorname{sen}(\pi m x_j) = \prod_{j=1}^{k} \frac{e^{i\pi m x_j} - e^{-i\pi m x_j}}{2i} = \prod_{j=1}^{k} \sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \frac{\varepsilon_j}{2i} e^{\varepsilon_j i\pi m x_j}$$
$$= \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k=\pm 1} \frac{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k}{(2i)^k} e^{i\pi m \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j x_j}.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m\pi)^{k+2n}} \prod_{j=1}^{k} \operatorname{sen}(\pi m x_j) = \frac{i^{k+2n}}{2} \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m\pi i)^{k+2n}} \prod_{j=1}^{k} \operatorname{sen}(\pi m x_j)$$
$$= \frac{i^{k+2n}}{2} \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k=\pm 1} \frac{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k}{(2i)^k} \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m\pi i)^{k+2n}} e^{i\pi m \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j x_j}$$
$$= \frac{(-1)^n}{2} \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k=\pm 1} \frac{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k}{2^k} P_{k+2n}\Big(\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j x_j\Big). \tag{10}$$

Observemos que la condición $|x| < 1$ de (8) se convierte entonces en

$$\Big|\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j x_j\Big| < 1$$

para todos los $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ posibles. Esto equivale a $\sum_{j=1}^{k} |x_j| < 1$.

Descompongamos ahora el $P_{k+2n}(x)$ final de (10) según la proposición 2, es decir, $P_{k+2n}(x) = \sum_{l=0}^{k+2n} p_{l,k+2n} x^l$. Entonces, lo que tenemos que hacer es calcular

$$\mathcal{S}_k^l(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k=\pm 1} \frac{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k}{2^k} \Big(\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j x_j\Big)^l \tag{11}$$

para $l = 0, 1, \dots, k + 2n$ (a menudo escribiremos $\mathcal{S}_k^l$ sin señalar su dependencia de los x_j).

En lo que sigue usaremos la «fórmula multinomial»

$$(y_1 + y_2 + \cdots + y_k)^l = \sum_{l_1+l_2+\cdots+l_k=l} \binom{l}{l_1, l_2, \dots, l_k} y_1^{l_1} y_2^{l_2} \cdots y_k^{l_k}$$

(en el sumatorio, los l_j son enteros no negativos, pero pueden ser 0), donde los «coeficientes multinomiales» son[1]

$$\binom{l}{l_1, l_2, \ldots, l_k} = \frac{l!}{l_1!\, l_2! \cdots l_k!}, \quad \text{con } l_1 + l_2 + \cdots + l_k = l. \tag{12}$$

Por supuesto, el valor de este coeficiente permanece invariante ante permutaciones de los l_j (implícitamente, esto se usa a menudo).

Así pues, con (11) podemos hacer lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_k^l &= \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k=\pm 1} \frac{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k}{2^k} \Big(\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j x_j \Big)^l \\
&= \frac{1}{2^k} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k=\pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k \sum_{l_1+\cdots+l_k=l} \binom{l}{l_1, \ldots, l_k} \varepsilon_1^{l_1} \cdots \varepsilon_k^{l_k} x_1^{l_1} \cdots x_k^{l_k} \\
&= \frac{1}{2^k} \sum_{l_1+\cdots+l_k=l} \binom{l}{l_1, \ldots, l_k} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k=\pm 1} \varepsilon_1^{l_1+1} \cdots \varepsilon_k^{l_k+1} x_1^{l_1} \cdots x_k^{l_k} \\
&= \frac{1}{2^k} \sum_{l_1+\cdots+l_k=l} \binom{l}{l_1, \ldots, l_k} \prod_{j=1}^{k} \Big(\sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_j^{l_j+1} \Big) x_1^{l_1} \cdots x_k^{l_k}.
\end{aligned}$$

Si alguno de los l_j es par, $\sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_j^{l_j+1} = 1 - 1 = 0$, y el correspondiente sumando en $\sum_{l_1+\cdots+l_k=l}$ es nulo. Si todos los l_j son impares, $\sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_j^{l_j+1} = 1 + 1 = 2$ para todo j y, en consecuencia,

$$\mathcal{S}_k^l(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\substack{l_1+\cdots+l_k=l \\ l_j \text{ impares}}} \binom{l}{l_1, \ldots, l_k} x_1^{l_1} \cdots x_k^{l_k}. \tag{13}$$

Hay dos casos en los que es fácil identificar que estos $\mathcal{S}_k^l$ son nulos:

- Si $l < k$, y como estamos tomando los $l_j \geq 0$ y de modo que $l_1 + \cdots + l_k = l$, siempre algún l_j tiene que ser 0 (que es par), luego $\mathcal{S}_k^l = 0$.
- Al sumar k números l_j impares, su suma tiene la misma paridad que k. En consecuencia, $\mathcal{S}_k^l = 0$ cuando $l - k$ es impar.

Aplicando esas dos observaciones, (10) queda así:

Teorema 3. *Sean $k \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Así mismo, sean $\mathcal{S}_k^l(x_1, \ldots, x_k)$ los polinomios que aparecen en* (13)*, $p_{l,k}$ los coeficientes dados en la proposición 2 y B_l los*

[1]Cuando $k = 1$, el único coeficiente multinomial válido que hay es $\binom{l}{l} = 1$, así que no hay confusión ente coeficiente binomial y multinomial: coinciden cuando existen ambos. Para $a < l$, la notación $\binom{l}{a}$ no significa nada como coeficiente multinomial; pero, si quisiéremos escribirlo con notación de coeficiente multinomial podríamos hacerlo, ya que $\binom{l}{a} = \frac{l!}{a!\,(l-a)!} = \binom{l}{a, l-a}$.

números de Bernoulli. Entonces,

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m\pi)^{k+2n}}\prod_{j=1}^{k}\operatorname{sen}(m\pi x_j) &= \frac{(-1)^n}{2}\sum_{s=0}^{n}p_{k+2s,k+2n}\mathcal{S}_k^{k+2s}(x_1,\dots,x_k)\\ &= \frac{(-1)^n}{2}\sum_{s=0}^{n}\frac{B_{2n-2s}(\frac{1}{2})}{2^{k+2s}(k+2s)!\,(2n-2s)!}\mathcal{S}_k^{k+2s}(x_1,\dots,x_k) \qquad (14)\\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2^{k+2n+1}}\sum_{s=0}^{n}\frac{(2^{2n-2s}-2)B_{2n-2s}}{(k+2s)!\,(2n-2s)!}\,\mathcal{S}_k^{k+2s}(x_1,\dots,x_k)\end{aligned}$$

si $|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|<1$.

4. CÁLCULO EXPLÍCITO DE LOS CASOS $n=0,1,2,3,4$ (SENOS)

Vamos a analizar con detalle los valores de n «pequeños». En lugar de aplicar directamente la fórmula (14) del teorema 3, veremos, en estos casos particulares, cómo se razona partiendo de las expresiones anteriores; realmente, fue el análisis previo de estos casos lo que nos permitió vislumbrar el teorema general.

4.1. CASO $n=0$ (IDENTIDAD BÁSICA)

Si en (10) o (14) tenemos $n=0$ (caso de la «identidad básica» escrita como en (2)), el único l en (11) que no es $<k$ es $l=k$; en otras palabras, el miembro de la derecha de (14) se reduce a un único sumando. El correspondiente coeficiente multinomial es $\binom{l}{l_1,l_2,\dots,l_k}=\binom{k}{1,1,\dots,1}=k!$, y

$$\mathcal{S}_k^k = k!\,x_1\cdots x_k.$$

Por lo tanto (recordemos que el coeficiente director de $P_k(x)$ es $p_{k,k}=1/k!$, según vimos en la proposición 2),

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m\pi)^{k}}\prod_{j=1}^{k}\operatorname{sen}(m\pi x_j) &= \frac{1}{2}\,p_{k,k}\sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k=\pm1}\frac{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_k}{2^k}\Bigl(\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j x_j\Bigr)^k\\ &= \frac{1}{2}\,p_{k,k}\mathcal{S}_k^k = \frac{1}{2}\frac{1}{2^k k!}\,k!\,x_1\cdots x_k = \frac{1}{2^{k+1}}\prod_{j=1}^{k}x_j\end{aligned}$$

y hemos probado la «identidad básica».

4.2. CASO $n=1$

Remontándonos a (11), l llega hasta $k+2$, y todos los $\mathcal{S}_k^l$ con $l<k$ son nulos. En el caso $l=k+1$, también $\mathcal{S}_k^{k+1}=0$, pues no hay forma de escribir $l=k+1$ como suma de k números l_j impares. Así pues, hay que analizar los casos $l=k$ y

$l = k+2$. Por supuesto, estos son los dos sumandos que aparecen en el miembro de la derecha de (14), $\mathcal{S}_k^k$ y $\mathcal{S}_k^{k+2}$.

Ya hemos visto en el caso $n = 0$ que $\mathcal{S}_k^k = k!\, x_1 \cdots x_k$. Para $l = k+2$, la forma de obtener l sumandos l_j impares es tomando todos ellos iguales a 1 salvo uno de ellos que sea 3; y todos los correspondientes coeficientes multinomiales en (12) son $(k+2)!/3!$. Además, si en el término de la derecha de (13) sacamos $x_1 \cdots x_k$ factor común, lo que tenemos es

$$\mathcal{S}_k^{k+2} = \frac{(k+2)!}{3!}\, x_1 \cdots x_k \Big(\sum_{j=1}^{k} x_j^2 \Big).$$

Usando (10) con $n = 1$ (los dos únicos coeficientes de $P_{k+2n}(x)$ que interesan son $p_{k,k+2}$ y $p_{k+2,k+2}$), tenemos ahora

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m\pi)^{k+2}} \prod_{j=1}^{k} \operatorname{sen}(m\pi x_j) &= \frac{(-1)^1}{2} \Big(p_{k,k+2}\mathcal{S}_k^k + p_{k+2,k+2}\mathcal{S}_k^{k+2} \Big) \\
&= \frac{-1}{2} \Bigg(p_{k,k+2} k!\, x_1 \cdots x_k + p_{k+2,k+2} \frac{(k+2)!}{3!}\, x_1 \cdots x_k \Big(\sum_{j=1}^{k} x_j^2 \Big) \Bigg) \\
&= \frac{-1}{2} \Big(\prod_{j=1}^{k} x_j \Big) \Bigg(p_{k,k+2} k! + p_{k+2,k+2} \frac{(k+2)!}{3!} \Big(\sum_{j=1}^{k} x_j^2 \Big) \Bigg).
\end{aligned}$$

Según la proposición 2, y teniendo en cuenta que $B_2 = 1/6$ y $B_0 = 1$,

$$\begin{aligned}
p_{k,k+2} &= \frac{-1}{(k+2)!} \binom{k+2}{k} \frac{2^2-2}{2^{k+2}} B_2 = \frac{-1}{k!\,2!} \frac{2}{2^{k+2}6} = \frac{-1}{6 \cdot 2^{k+2} k!}, \\
p_{k+2,k+2} &= \frac{-1}{(k+2)!} \binom{k+2}{k+2} \frac{2^0-2}{2^{k+2}} B_0 = \frac{1}{2^{k+2}(k+2)!},
\end{aligned}$$

llegamos a

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m\pi)^{k+2}} \prod_{j=1}^{k} \operatorname{sen}(m\pi x_j) &= \frac{1}{2} \Big(\prod_{j=1}^{k} x_j \Big) \Bigg(\frac{1}{6 \cdot 2^{k+2}} - \frac{1}{6 \cdot 2^{k+2}} \Big(\sum_{j=1}^{k} x_j^2 \Big) \Bigg) \\
&= \frac{1}{6 \cdot 2^{k+3}} \Bigg(1 - \sum_{j=1}^{k} x_j^2 \Bigg) \prod_{i=1}^{k} x_j.
\end{aligned}$$

4.3. Caso $n = 2$

En este caso, en (10) aparece P_{k+4} y, con los mismos argumentos de paridad que hemos manejado hasta ahora, son tres los $\mathcal{S}_k^l$ (con $l \leq k+4$) que hay que tener en cuenta, $\mathcal{S}_k^k$, $\mathcal{S}_k^{k+2}$ y $\mathcal{S}_k^{k+4}$ (todos los demás se anulan); a su vez, los correspondientes coeficientes de P_{k+4} que hay que usar en (10) son $p_{k,k+4}$, $p_{k+2,k+4}$ y $p_{k+4,k+4}$. Así,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m\pi)^{k+4}} \prod_{j=1}^{k} \operatorname{sen}(m\pi x_j) = \frac{(-1)^2}{2} \Big(p_{k,k+4}\mathcal{S}_k^k + p_{k+2,k+4}\mathcal{S}_k^{k+2} + p_{k+4,k+4}\mathcal{S}_k^{k+4} \Big),$$

que obviamente es la primera línea de (14). Ya conocemos $\mathcal{S}_k^k$ y $\mathcal{S}_k^{k+2}$; analicemos $\mathcal{S}_k^{k+4}$. Ahora hay dos tipos de coeficientes multinomiales $\binom{k+4}{l_1,l_2,\dots,l_k}$ con l_j impares (y cuya suma sea $k+4$): (a) que un l_j valga 5 y todos los demás valgan 1; (b) que dos l_j valgan 3 y todos los demás valgan 1. Respectivamente, se tiene

$$\binom{k+4}{5,1,1,\dots,1} = \frac{(k+4)!}{5!}, \qquad \binom{k+4}{3,3,1,\dots,1} = \frac{(k+4)!}{3!\,3!}$$

(por supuesto, el 5 no tiene por qué estar en la primera posición del primer caso, ni tampoco los dos 3 del segundo caso). Los correspondientes $x_1^{l_1}\cdots x_k^{l_k}$ en (13) son

$$x_1^5 x_2 x_3 \cdots x_k, \qquad x_1^3 x_2^3 x_3 \cdots x_k$$

y todas sus simetrías. Así pues, extrayendo $x_1\cdots x_k$ factor común, obtenemos

$$\mathcal{S}_k^{k+4} = \Big(\prod_{j=1}^k x_j\Big)\Big(\frac{(k+4)!}{5!}\sum_{j=1}^k x_j^4 + \frac{(k+4)!}{3!\,3!}\sum_{j_1<j_2} x_{j_1}^2 x_{j_2}^2\Big).$$

Ahora, dado que $B_4 = -1/30$, $B_2 = 1/6$, $B_0 = 1$, la proposición 2 nos dice que

$$\begin{aligned}
p_{k,k+4} &= \frac{-1}{(k+4)!}\binom{k+4}{k}\frac{2^4-2}{2^{k+4}}B_4 = \frac{1}{k!\,4!}\frac{14}{2^{k+4}\cdot 30} = \frac{7}{15\cdot 4!\,2^{k+4}k!},\\
p_{k+2,k+4} &= \frac{-1}{(k+4)!}\binom{k+4}{k+2}\frac{2^2-2}{2^{k+4}}B_2 = \frac{-1}{(k+2)!\,2!}\frac{2}{2^{k+4}\cdot 6} = \frac{-1}{6\cdot 2^{k+4}(k+2)!},\\
p_{k+4,k+4} &= \frac{-1}{(k+4)!}\binom{k+4}{k+4}\frac{2^0-2}{2^{k+4}}B_0 = \frac{1}{2^{k+4}(k+4)!}.
\end{aligned}$$

Con todo esto,

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^\infty \frac{(-1)^{m+1}}{(2m\pi)^{k+4}}\prod_{j=1}^k \operatorname{sen}(m\pi x_j)\\
&\quad= \frac{1}{2\cdot 2^{k+4}}\Big(\prod_{j=1}^k x_j\Big)\Big(\frac{7}{15\cdot 4!\,k!}\,k! + \frac{-1}{6(k+2)!}\frac{(k+2)!}{3!}\sum_{j=1}^k x_j^2\\
&\qquad\qquad + \frac{1}{(k+4)!}\Big(\frac{(k+4)!}{5!}\sum_{j=1}^k x_j^4 + \frac{(k+4)!}{3!\,3!}\sum_{j_1<j_2} x_{j_1}^2 x_{j_2}^2\Big)\Big)\\
&\quad= \frac{1}{2\cdot 2^{k+4}}\Big(\prod_{j=1}^k x_j\Big)\Big(\frac{7}{360} - \frac{1}{36}\sum_{j=1}^k x_j^2 + \frac{1}{120}\sum_{j=1}^k x_j^4 + \frac{1}{36}\sum_{j_1<j_2} x_{j_1}^2 x_{j_2}^2\Big)\\
&\quad= \frac{1}{360\cdot 2^{k+5}}\Big(1 - 10\sum_{j=1}^k x_j^2 + 3\sum_{j=1}^k x_j^4 + 10\sum_{j_1<j_2} x_{j_1}^2 x_{j_2}^2\Big)\prod_{j=1}^k x_j.
\end{aligned}$$

Nota 1. Conviene aclarar que, si $k = 1$, el coeficiente multinomial $\binom{k+4}{3,3,1,\dots,1}$ no existe, pues en la parte de abajo del coeficiente multinomial tiene que haber $k = 1$ números. Del mismo modo, en $\mathcal{S}_1^{1+4}$ tampoco tiene sentido el sumatorio $\sum_{j_1,j_2}$ con los $x_{j_1}^2 x_{j_2}^2$ con dos variables distintas, dado que con $k = 1$ solo existe una variable x_1; así pues, ese sumatorio tiene cero sumandos y no aparece.

4.4. Caso $n = 3$

En este caso, lo que tenemos es

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m\pi)^{k+6}} \prod_{j=1}^{k} \operatorname{sen}(m\pi x_j)$$
$$= \frac{(-1)^3}{2}\Big(p_{k,k+6}\mathcal{S}_k^k + p_{k+2,k+6}\mathcal{S}_k^{k+2} + p_{k+4,k+6}\mathcal{S}_k^{k+4} + p_{k+6,k+6}\mathcal{S}_k^{k+6}\Big).$$

Ya conocemos $\mathcal{S}_k^k$, $\mathcal{S}_k^{k+2}$ y $\mathcal{S}_k^{k+4}$, así como (por la proposición 2) los $p_{l,k+6}$. Analicemos $\mathcal{S}_k^{k+6}$. Ahora resulta que hay más tipos de coeficientes multinomiales (12) con los l_j impares y cuya suma es $l = k + 6$:

$$\binom{k+6}{7,1,\dots,1} = \frac{(k+6)!}{7!},\ \binom{k+6}{5,3,1,\dots,1} = \frac{(k+6)!}{5!\,3!},\ \binom{k+6}{3,3,3,1,\dots,1} = \frac{(k+6)!}{3!\,3!\,3!}.$$

Con esto, y razonando como en el caso $n = 2$,

$$\mathcal{S}_k^{k+6} = \Big(\prod_{j=1}^{k} x_j\Big)\Bigg(\frac{(k+6)!}{7!}\sum_{j=1}^{k} x_j^6$$
$$+ \frac{(k+6)!}{5!\,3!}\sum_{\substack{j_1,j_2\\ \text{distintos}}} x_{j_1}^4 x_{j_2}^2 + \frac{(k+6)!}{3!\,3!\,3!}\sum_{j_1<j_2<j_3} x_{j_1}^2 x_{j_2}^2 x_{j_3}^2\Bigg).$$

Usemos ahora $B_6 = 1/42$, $B_4 = -1/30$, $B_2 = 1/6$, $B_0 = 1$ y la proposición 2, con lo cual

$$p_{k,k+6} = \frac{-1}{(k+6)!}\binom{k+6}{k}\frac{2^6-2}{2^{k+6}}B_6 = \frac{-1}{k!\,6!}\frac{62}{42\cdot 2^{k+6}} = \frac{-31}{21\cdot 6!\,2^{k+6}k!},$$
$$p_{k+2,k+6} = \frac{-1}{(k+6)!}\binom{k+6}{k+2}\frac{2^4-2}{2^{k+6}}B_4 = \frac{1}{(k+2)!\,4!}\frac{14}{30\cdot 2^{k+6}} = \frac{7}{15\cdot 4!\,2^{k+6}(k+2)!},$$
$$p_{k+4,k+6} = \frac{-1}{(k+6)!}\binom{k+6}{k+4}\frac{2^2-2}{2^{k+6}}B_2 = \frac{-1}{(k+4)!\,2!}\frac{2}{6\cdot 2^{k+6}} = \frac{-1}{6\cdot 2^{k+6}(k+4)!},$$
$$p_{k+6,k+6} = \frac{-1}{(k+6)!}\binom{k+6}{k+6}\frac{2^0-2}{2^{k+6}}B_0 = \frac{1}{2^{k+6}(k+6)!}.$$

A partir de aquí,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m\pi)^{k+6}} \prod_{j=1}^{k} \operatorname{sen}(m\pi x_j) \\
&\quad = \frac{-1}{2\cdot 2^{k+6}} \Big(\prod_{j=1}^{k} x_j\Big)\Bigg(\frac{-31}{21\cdot 6!\,k!}\,k! + \frac{7}{15\cdot 4!\,(k+2)!}\,\frac{(k+2)!}{3!}\sum_{j=1}^{k} x_j^2 \\
&\qquad + \frac{-1}{6(k+4)!}\Big(\frac{(k+4)!}{5!}\sum_{j=1}^{k} x_j^4 + \frac{(k+4)!}{3!\,3!}\sum_{j_1<j_2} x_{j_1}^2 x_{j_2}^2\Big) \\
&\qquad + \frac{1}{(k+6)!}\Big(\frac{(k+6)!}{7!}\sum_{j=1}^{k} x_j^6 \\
&\qquad\quad + \frac{(k+6)!}{5!\,3!}\sum_{\substack{j_1,j_2\\ \text{distintos}}} x_{j_1}^4 x_{j_2}^2 + \frac{(k+6)!}{3!\,3!\,3!}\sum_{j_1<j_2<j_3} x_{j_1}^2 x_{j_2}^2 x_{j_3}^2\Big)\Bigg) \\
&\quad = \frac{1}{3\cdot 7!\,2^{k+7}}\Bigg(31 - 49\sum_{j=1}^{k} x_j^2 + 21\sum_{j=1}^{k} x_j^4 + 70\sum_{j_1<j_2} x_{j_1}^2 x_{j_2}^2 \\
&\qquad - 3\sum_{j=1}^{k} x_j^6 - 21\sum_{\substack{j_1,j_2\\ \text{distintos}}} x_{j_1}^4 x_{j_2}^2 - 70\sum_{j_1<j_2<j_3} x_{j_1}^2 x_{j_2}^2 x_{j_3}^2\Bigg)\prod_{j=1}^{k} x_j.
\end{aligned}
$$

Nota 2. Recordemos que cuando k es «pequeño», digamos $k=2$, expresiones como $\binom{k+6}{3,3,3,1,\ldots,1}$ no existen, pues «abajo» del coeficiente multinomial tiene que haber $k=2$ números. Del mismo modo, tampoco tiene sentido $x_{j_1}^2 x_{j_2}^2 x_{j_3}^2$ con tres variables distintas, dado que con $k=2$ solo existen las variables x_1 y x_2; así pues, el sumatorio $\sum_{j_1,j_2,j_3}$ no existe en ese caso. Si $k=1$, son unos cuantos más los coeficientes multinomiales y sumatorios que no existen, claro.

4.5. Esbozo del caso $n=4$

En este caso, la novedad es $\mathcal{S}_k^{k+8}$. Observemos simplemente que los coeficientes multinomiales que intervienen ahora con $l=k+8$ son

$$
\binom{k+8}{9,1,\ldots,1} = \frac{(k+8)!}{9!},\quad \binom{k+8}{7,3,1,\ldots,1} = \frac{(k+8)!}{7!\,3!},\quad \binom{k+8}{5,5,1,\ldots,1} = \frac{(k+8)!}{5!\,5!},
$$
$$
\binom{k+8}{5,3,3,1,\ldots,1} = \frac{(k+8)!}{5!\,3!\,3!},\quad \binom{k+8}{3,3,3,3,1,\ldots,1} = \frac{(k+8)!}{3!\,3!\,3!\,3!}.
$$

Con eso, el proceso para llegar a la fórmula explícita de (14) sería totalmente similar al del caso $n=3$.

Nota 3. De nuevo conviene observar que cuando $k=1$, 2 o 3, algunos de estos coeficientes multinomiales no existen, pues «abajo» del coeficiente multinomial tiene que

haber exactamente k números. Y tampoco existen los correspondientes sumatorios en los que deberían aparecer más de k variables.

5. Los sumandos de $\mathcal{S}_k^{k+2s}(x_1,\dots,x_k)$

Realmente, ya tenemos una fórmula general en (14). Los $p_{k+2s,k+2n}$ están identificados en la proposición 2, y los $\mathcal{S}_k^{k+2s}$ en (13). Lo que vamos a hacer ahora es desentrañar la estructura en sumandos de los $\mathcal{S}_k^{k+2s}$.

Obsérvese en $\mathcal{S}_k^{k+6}$ que, cuando aparecen variables x_j multiplicadas, hay que tener en cuenta si los exponentes son distintos o no. En $\sum_{j_1,j_2} x_{j_1}^4 x_{j_2}^2$ los exponentes son distintos, luego tienen que aparecer, por ejemplo, tanto el sumando $x_1^4x_2^2$ como el $x_1^2x_2^4$, y por eso solo exigimos $j_1 \neq j_2$; en cambio, los exponentes en $\sum_{j_1,j_2,j_3} x_{j_1}^2 x_{j_2}^2 x_{j_3}^2$ son los tres el mismo, así que, por ejemplo, solo tiene que estar el sumando $x_1^2x_2^2x_3^2$, no $x_2^2x_1^2x_3^2$ o similares (eso está en la esencia de lo que cuentan los coeficientes multinomiales), y por eso hay que exigir $j_1 < j_2 < j_3$. Ya en el caso $\mathcal{S}_k^{k+8}$ va a haber sumatorios con exponentes de tipo $\sum_{j_1,j_2,j_3} x_{j_1}^4 x_{j_2}^2 x_{j_3}^2$, y aquí habría que mezclar ambas cosas: $j_2 < j_3$, $j_1 \neq j_2$, $j_1 \neq j_3$. Por supuesto, la casuística es mayor cuando mayor el n en $\mathcal{S}_k^{k+2n}$.

Nuestro objetivo ahora es, partiendo de (13), analizar cuántos tipos de sumandos aparecen en cada $\mathcal{S}_k^{k+2s}$, es decir, cuántos coeficientes multinomiales hay de la forma

$$\binom{k+2s}{l_1,l_2,\dots,l_k} \text{ con } l_1+l_2+\cdots+l_k = k+2s \text{ y } l_j \text{ impar para todo } j, \tag{15}$$

donde el orden de los l_j no se tiene en cuenta; cada uno de estos coeficientes multinomiales será factor común de una suma simétrica de monomios en $\mathcal{S}_k^{k+2s}$. Lo llamaremos «número de sumandos en la descomposición de $\mathcal{S}_k^{k+2s}$», y usaremos la notación $\operatorname{nsd}(\mathcal{S}_k^{k+2s})$. En la sección anterior hemos visto que (si k no es muy «pequeño»)

$$\operatorname{nsd}(\mathcal{S}_k^{k}) = 1,\quad \operatorname{nsd}(\mathcal{S}_k^{k+2}) = 1,\quad \operatorname{nsd}(\mathcal{S}_k^{k+4}) = 2,\quad \operatorname{nsd}(\mathcal{S}_k^{k+6}) = 3,\quad \operatorname{nsd}(\mathcal{S}_k^{k+8}) = 5.$$

Tal como veíamos en las notas 1, 2 y 3, si k era «pequeño» estos números podían ser menores, pues algunos sumandos podían no existir. En concreto, y por ejemplo, mostrábamos que

$$\operatorname{nsd}(\mathcal{S}_1^{1+4}) = 1,\quad \operatorname{nsd}(\mathcal{S}_2^{2+6}) = 2,\quad \operatorname{nsd}(\mathcal{S}_3^{3+8}) = 3.$$

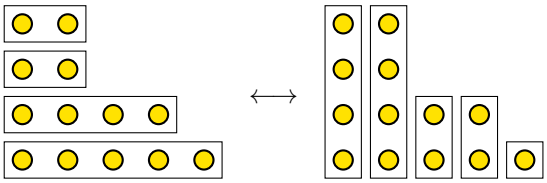
¿Cómo evaluar $\operatorname{nsd}(\mathcal{S}_k^{k+2s})$ en general?

Con la notación de (15), los coeficientes de $\mathcal{S}_k^{k+2s}$ que nos interesan se corresponden con las particiones de $k+2s$ mediante k enteros impares positivos, y $\operatorname{nsd}(\mathcal{S}_k^{k+2s})$ es el número de tales particiones. ¡Teoría de particiones! Puede verse algo sobre esto en [4, § 14.3] (obsérvese también [14]); y, con más detalles, en [1]. Otro artículo reciente en el que, quizás de manera sorprendente, aparecen las particiones, es [10].

Siguiendo con (15), tomemos $s_j = l_j - 1$, que serán enteros no negativos cuya suma es $2s$. Así, el número $\operatorname{nsd}(\mathcal{S}_k^{k+2s})$ que buscamos equivale a encontrar de cuántas

maneras podemos obtener $2s$ como suma de, a lo más, k enteros positivos pares s_j. Y es claro que el número de particiones de $2s$ como suma de, a lo más, k enteros positivos pares, coincide con el número de particiones de s como suma de, a lo más, k enteros positivos.

A su vez, tomando particiones conjugadas, el número de particiones de s como suma de, a lo más, k enteros positivos, coincide con el número de particiones de s en sumandos $\leq k$. Por ejemplo, con $s = 13$ tenemos el siguiente esquema:



Según sumemos por filas (izquierda, una cantidad $\leq k$ sumandos) o por columnas (derecha, sumandos $\leq k$), tenemos

$$13 = 5 + 4 + 2 + 2 = 4 + 4 + 2 + 2 + 1.$$

De este modo, $\mathrm{nsd}(\mathcal{S}_k^{k+2s})$ será, así mismo, el número de formas de descomponer s en sumandos $\leq k$.

Consideremos el siguiente producto de series de potencias:

$$\begin{aligned}(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)&(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots) \\ &\times (1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots) \cdots (1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \cdots).\end{aligned} \tag{16}$$

Ahora, multipliquemos las series tratándolas como si fuesen polinomios (estos argumentos se pueden hacer con rigor, como se ve en [4, § 14.3]), con lo cual obtenemos una serie de potencias de la forma

$$1 + \sum_{E=1}^{\infty} a_E x^E,$$

Supongamos que hemos tomado el término x^{e_1} de la primera serie, el término x^{e_2} de la segunda..., y el término x^{ke_k} de la k-ésima (con los $e_j \geq 0$). Su producto es

$$x^{e_1} x^{2e_2} \cdots x^{ke_k} = x^E, \quad \text{con } E = e_1 + 2e_2 + \cdots + ke_k.$$

Esto se puede escribir también como

$$E = (\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{e_1}) + (\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{e_2}) + \cdots + (\underbrace{k + k + \cdots + k}_{e_k}),$$

que constituye una partición de E en $e_1 + e_2 + \cdots + e_k$ sumandos $\leq k$. Entonces, cada partición de E producirá un término x^E; y, recíprocamente, cada término x^E procede de una partición conveniente de E. Por consiguiente, a_E, el coeficiente de x^E, es igual al número de particiones de E en sumandos $\leq k$.

Retomando la notación inicial, $\mathrm{nsd}(\mathcal{S}_k^{k+2s})$ es el coeficiente de x^s en la función generatriz

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1-x^j} = 1 + \sum_{E=1}^{\infty} a_E x^E,$$

esto es,

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1-x^j} = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \mathrm{nsd}(\mathcal{S}_k^{k+2s}) x^s. \tag{17}$$

Cuando $s \leq k$, en la parte izquierda de (17) daría lo mismo tener $\prod_{j=1}^{k}$ o $\prod_{j=1}^{\infty}$, pues los factores a partir de k acabarían siendo series geométricas adicionales en (16), que no tienen influencia en el coeficiente de x^s.

Así pues, cuando el número de variables x_j en $\mathcal{S}_k^{k+2s}(x_1, \ldots, x_k)$ es $k \geq s$, el k que aparece en (17) no tiene relevancia y estos números $\mathrm{nsd}(\mathcal{S}_k^{k+2s})$ son los mismos que el de las particiones sin restricción que estudiaron Hardy y Ramanujan.

En particular, para $k \geq s$ se tiene

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathrm{nsd}(\mathcal{S}_k^{k+2s})$	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30
s	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\mathrm{nsd}(\mathcal{S}_k^{k+2s})$	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490
s	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
$\mathrm{nsd}(\mathcal{S}_k^{k+2s})$	627	792	1002	1255	1575	1958	2436	3010	3718	4565

6. Demostraciones usando polinomios de Apostol-Bernoulli y Apostol-Euler

Los ahora denominados polinomios de Apostol-Bernoulli $\mathcal{B}_k(x;\lambda)$ fueron definidos en [3], y los de Apostol-Euler $\mathcal{E}_k(x;\lambda)$ aparecen en [9]. Respectivamente, dichos polinomios están definidos por las expresiones

$$\frac{ze^{xz}}{\lambda e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_k(x;\lambda) \frac{z^k}{k!}, \tag{18}$$

$$\frac{2e^{zx}}{\lambda e^z + 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{E}_k(x;\lambda) \frac{z^k}{k!}. \tag{19}$$

En el caso $\lambda = 1$, $\mathcal{B}_k(x;1)$ son los polinomios de Bernoulli $B_k(x)$ y $\mathcal{E}_k(x;1)$ son los polinomios de Euler $E_k(x)$. Además, los polinomios $\mathcal{E}_k(x;-1)$ no existen, pues la función generatriz (19) no es analítica en $z = 0$ cuando $\lambda = -1$.

Merece la pena mencionar que, así como los polinomios de Bernoulli y de Euler tienen una gran relevancia en el cálculo de la función zeta de Riemann en los enteros pares $\zeta(2k) = \sum_{m=1}^{\infty} 1/m^{2k}$ —fue Euler en 1740 quien encontró el valor de esta suma,

y posteriormente se han desarrollado distintos métodos para llegar a ella (véase [5] y las referencias que contiene)— y la beta de Dirichlet en los impares $\beta(2k+1) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m/(2m+1)^{2k+1}$, también los polinomios de Apostol-Bernoulli y Apostol-Euler se pueden usar para sumar series similares con un parámetro añadido, como se pone de manifiesto en [6].

El caso $\lambda = 0$ es trivial (tanto en (18) como en (19), en particular $\mathcal{E}_k(x;0) = 2x^k/k!$), así que prescindimos de él. Además, a partir de la definición es claro que

$$\mathcal{E}_k(x;\lambda) = -\frac{2}{k+1}\mathcal{B}_{k+1}(x;-\lambda);$$

luego, en realidad, los polinomios de Apostol-Bernoulli y Apostol-Euler son esencialmente los mismos polinomios con el parámetro cambiado (y con el grado desplazado en uno). Aunque, como acabamos de comentar, esto es muy sencillo de comprobar, aparentemente no fue observado antes de [11] (se pueden ver más detalles en [12]). Como, salvo para $\lambda = 1$, $\mathcal{B}_k(x;\lambda)$ tiene grado $k-1$ (y $\mathcal{B}_0(x;\lambda) = 0$), a menudo es más cómodo usar $\mathcal{E}_k(x;\lambda)$ que sí tiene grado k (prescindir de $\mathcal{E}_k(x;-1)$ no causa ningún trastorno, pues este caso se correspondería con los polinomios de Bernoulli, que se estudian aparte).

Calculadas con procedimientos distintos, las series de Fourier de los polinomios de Apostol-Bernoulli y Apostol-Euler se pueden encontrar en [9] o en [12]. La de los polinomios de Apostol-Bernoulli ($\lambda = 1$ es Bernoulli) es

$$\mathcal{B}_k(x;\lambda) = -\delta_k(x;\lambda) - \frac{k!}{\lambda^x}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{e^{2\pi imx}}{(2\pi im - \log\lambda)^k}, \qquad 0 < x < 1,$$

donde $\delta_k(x;\lambda) = 0$ o $\frac{(-1)^k k!}{\lambda^x \log^k \lambda}$ según sea $\lambda = 1$ o $\lambda \neq 1$ (obsérvese que, con $\lambda = 1$, esto equivale a prescindir de $\delta_k(x;\lambda)$ y poner $\sum_{m\in\mathbb{Z}}$ en (20)). Como solo consideramos el caso $\lambda \neq 1$, lo escribimos así:

$$\mathcal{B}_k(x;\lambda) = -k!\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{e^{(2\pi im-\log\lambda)x}}{(2\pi im - \log\lambda)^k}, \qquad 0 < x < 1. \tag{20}$$

A su vez, la de Apostol-Euler ($\lambda = 1$ es Euler) es

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_k(x;\lambda) &= \frac{2\cdot k!}{\lambda^x}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{e^{(2m+1)\pi ix}}{((2m+1)\pi i - \log\lambda)^{k+1}}\\ &= 2\cdot k!\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{e^{((2m+1)\pi i-\log\lambda)x}}{((2m+1)\pi i - \log\lambda)^{k+1}}, \qquad 0 < x < 1.\end{aligned} \tag{21}$$

6.1. Lo que se obtiene con Apostol-Euler

Fijado $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0,-1\}$ y $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$Q_k(x;\lambda) = \frac{i}{\lambda^{x/2}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^m}{((2m+1)\pi i - \log\lambda)^{k+1}}\, e^{i(2m+1)\pi x/2}, \quad |x| < 1. \tag{22}$$

Recordemos que el caso $\lambda = 0$ no lo contemplamos por ser trivial, y en el caso $\lambda = -1$ no existían los polinomios de Apostol–Euler; pero prescindir de $\lambda = -1$ no es nada restrictivo, pues luego tendremos que tomar $\lambda = e^{i\mu}$ con $\mu \neq (2m+1)\pi$, y así evitar que, en los sumandos de la serie que queremos evaluar, algún denominador pueda ser nulo. Vamos a identificar estos $Q_k(x;\lambda)$.

Usando (21), podemos escribir (22) como

$$\begin{aligned} Q_k(x;\lambda) &= i\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^m e^{((2m+1)\pi i-\log\lambda)x/2}}{((2m+1)\pi i-\log\lambda)^{k+1}} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{e^{m\pi i}e^{i\pi/2}e^{((2m+1)\pi i-\log\lambda)x/2}}{((2m+1)\pi i-\log\lambda)^{k+1}} \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{e^{((2m+1)\pi i-\log\lambda)(1+x)/2+(\log\lambda)/2}}{((2m+1)\pi i-\log\lambda)^{k+1}} = \frac{\lambda^{1/2}}{2k!}\,\mathcal{E}_k((1+x)/2;\lambda), \end{aligned}$$

válido para $(1+x)/2 \in (0,1)$, es decir, $x \in (-1,1)$ (y también en los extremos si $k \geq 2$).

Dado un número μ real o complejo, que no sea de la forma $\mu = (2m+1)\pi$ con $m \in \mathbb{Z}$ (para que no se anule ningún denominador), tomamos $\lambda = e^{i\mu}$ (con lo cual $i\mu = \log\lambda$). Sin más que usar que $\operatorname{sen}(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$, tenemos

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{k} \operatorname{sen}\big((\pi(2m+1)-\mu)x_j/2\big) &= \prod_{j=1}^{k} \frac{e^{(i\pi(2m+1)-i\mu)x_j/2} - e^{-(i\pi(2m+1)-i\mu)x_j/2}}{2i} \\ &= \prod_{j=1}^{k} \sum_{\varepsilon_j=\pm1} \frac{\varepsilon_j}{2i} e^{\varepsilon_j(i\pi(2m+1)-\log\lambda)x_j/2} \\ &= \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k=\pm1} \frac{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_k}{(2i)^k} e^{(i\pi(2m+1)-\log\lambda)(\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j x_j)/2}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} &\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^m}{((2m+1)\pi-\mu)^{k+1+2n}} \prod_{j=1}^{k} \operatorname{sen}\big((\pi(2m+1)-\mu)x_j/2\big) \\ &\quad= i^{k+1+2n} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^m}{((2m+1)\pi i-\mu i)^{k+1+2n}} \prod_{j=1}^{k} \operatorname{sen}\big((\pi(2m+1)-\mu)x_j/2\big) \\ &\quad= i^{k+1+2n} \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k=\pm1} \frac{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_k}{(2i)^k} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^m e^{(i\pi(2m+1)-\log\lambda)(\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j x_j)/2}}{((2m+1)\pi i-\log\lambda)^{k+1+2n}} \\ &\quad= (-1)^n \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k=\pm1} \frac{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_k}{2^k} Q_{k+2n}\Big(\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j x_j;\lambda\Big). \end{aligned}$$

Nota 4. Si $E_j(x)$ son los polinomios de Euler, los tradicionalmente denominados números de Euler no son $E_j(0)$, sino que, por definición, son $E_j = 2^j E_j(1/2)$ (véase, por ejemplo [7, § 24.2, fórmula 24.2.9]). Así pues, lo lógico para los números de

Apostol-Euler es no definirlos evaluando el polinomio en 0, sino en 1/2 (a veces se usa $\mathcal{E}_j(\lambda) = 2^j \mathcal{E}_j(\frac{1}{2};\lambda)$, pero no lo vamos a hacer en este artículo para no introducir notación adicional).

PROPOSICIÓN 4. *Si para $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $k \in \mathbb{N}$ denotamos*

$$Q_k(x;\lambda) = \sum_{l=0}^{k} q_{l,k}^{\lambda} x^l,$$

se tiene

$$q_{l,k}^{\lambda} = \frac{\lambda^{1/2}}{2^{1+l}k!}\binom{k}{l}\mathcal{E}_{k-l}(\tfrac{1}{2};\lambda) = \frac{\lambda^{1/2}}{2^{1+l}l!\,(k-l)!}\,\mathcal{E}_{k-l}(\tfrac{1}{2};\lambda),$$

donde $\mathcal{E}_j(x;\lambda)$ es el polinomio de Apostol-Euler.

DEMOSTRACIÓN. Sin más que aplicar la fórmula binomial (7), tenemos

$$Q_k(x;\lambda) = \frac{\lambda^{1/2}}{2k!}\mathcal{E}_k((1+x)/2;\lambda) = \frac{\lambda^{1/2}}{2k!}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\mathcal{E}_{k-l}\big(\tfrac{1}{2};\lambda\big)\frac{x^l}{2^l},$$

y esto prueba el resultado. □

Los $\mathcal{S}_k^l$ son como en (11) y (13), así que tenemos lo siguiente:

TEOREMA 5. *Sea $\mu \in \mathbb{C}$ que no es de la forma $(2m+1)\pi$ para ningún entero m, y $\lambda = e^{i\mu}$, así como $k \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Además, sean $\mathcal{S}_k^l(x_1,\dots,x_k)$ los polinomios que aparecen en (13), $q_{l,k+2n}^{\lambda}$ los coeficientes dados en la proposición 4 y $\mathcal{E}_j(x;\lambda)$ los polinomios de Apostol-Euler. Entonces,*

$$\begin{aligned}\sum_{m\in\mathbb{Z}} &\frac{(-1)^m}{((2m+1)\pi-\mu)^{k+1+2n}}\prod_{j=1}^{k}\operatorname{sen}\big(((2m+1)\pi-\mu)x_j/2\big)\\ &= (-1)^n\sum_{s=0}^{n} q_{k+2s,k+2n}^{\lambda}\mathcal{S}_k^{k+2s}(x_1,\dots,x_k)\\ &= (-1)^n\lambda^{1/2}\sum_{s=0}^{n}\frac{\mathcal{E}_{2n-2s}(\frac{1}{2};\lambda)}{2^{k+2s+1}(k+2s)!\,(2n-2s)!}\,\mathcal{S}_k^{k+2s}(x_1,\dots,x_k)\end{aligned} \tag{23}$$

si $|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|<1$.

La serie (23) del teorema 5 está indexada en $\sum_{m\in\mathbb{Z}}$, no en $\sum_{m=1}^{\infty}$ como en el teorema 3. Veamos que, si se toma $\mu = 0$ (luego $\lambda = 1$), se pueden sacar expresiones mejores en las que aparecen los números de Euler.

En efecto, para $\mu = 0$, sea el sumando correspondiente a $m \geq 0$. Entonces, el sumando correspondiente a $-m-1 < 0$ coincide con el de m:

$$\begin{aligned}
&\frac{(-1)^{-m-1}}{\big((2(-m-1)+1)\pi\big)^{k+1+2n}} \prod_{j=1}^{k} \operatorname{sen}\big((2(-m-1)+1)\pi x_j/2\big) \\
&\quad = \frac{(-1)^{m+1}}{(-(2m+1)\pi)^{k+1+2n}} \prod_{j=1}^{k} \operatorname{sen}(-(2m+1)\pi x_j/2) \\
&\quad = \frac{(-1)^{m+1}}{(-1)^{k+1+2n}((2m+1)\pi)^{k+1+2n}} (-1)^k \prod_{j=1}^{k} \operatorname{sen}((2m+1)\pi x_j/2) \\
&\quad = \frac{(-1)^{m}}{((2m+1)\pi)^{k+1+2n}} \prod_{j=1}^{k} \operatorname{sen}((2m+1)\pi x_j/2).
\end{aligned}$$

En consecuencia, hemos demostrado lo siguiente:

Corolario 6. *Sean $k \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Así mismo, sean $\mathcal{S}_k^l(x_1, \ldots, x_k)$ los polinomios que aparecen en* (13), *$q_{l,k}^1$ los coeficientes dados en la proposición 4 y $E_l = 2^l E_l(1/2)$ los números de Euler. Entonces,*

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{((2m+1)\pi)^{k+1+2n}} \prod_{j=1}^{k} \operatorname{sen}((2m+1)\pi x_j/2) \\
&\qquad = \frac{(-1)^n}{2} \sum_{s=0}^{n} q_{k+2s,k+2n}^1 \mathcal{S}_k^{k+2s}(x_1, \ldots, x_k) \\
&\qquad = (-1)^n \sum_{s=0}^{n} \frac{E_{2n-2s}}{2^{k+2n+2}(k+2s)!\,(2n-2s)!} \mathcal{S}_k^{k+2s}(x_1, \ldots, x_k)
\end{aligned}$$

si $|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k| < 1$.

6.2. Lo que se obtiene con Apostol-Bernoulli

Fijado $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ ($\lambda = 1$ es Bernoulli y ya está estudiado) y $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$P_k(x; \lambda) = \frac{1}{\lambda^{x/2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^{m+1} e^{\pi i m x}}{(2\pi i m - \log \lambda)^k}, \quad |x| < 1. \tag{24}$$

Vamos a identificar estos $P_k(x; \lambda)$.

Dado un número μ real o complejo, y con $\mu \neq (2m+1)\pi$, tomamos $\lambda = e^{i\mu}$ (con lo cual $i\mu = \log \lambda$). Usando (20), podemos escribir (24) como

$$\begin{aligned}
P_k(x; \lambda) &= -\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^m e^{(2m\pi i - \log \lambda)x/2}}{(2m\pi i - \log \lambda)^k} = -\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{e^{m\pi i} e^{(2m\pi i - \log \lambda)x/2}}{(2m\pi i - \log \lambda)^k} \\
&= -\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{e^{(2m\pi i - \log \lambda)(1+x)/2 + (\log \lambda)/2}}{(2m\pi i - \log \lambda)^k} = \frac{\lambda^{1/2}}{k!} \mathcal{B}_k((1+x)/2; \lambda),
\end{aligned}$$

válido para $(1+x)/2 \in (0,1)$, es decir, $x \in (-1,1)$ (y también en los extremos si $k \geq 2$).

Sin más que usar que $\operatorname{sen}(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$, tenemos

$$\prod_{j=1}^{k} \operatorname{sen}((2m\pi - \mu)x_j/2) = \prod_{j=1}^{k} \frac{e^{(2m\pi i - \mu i)x_j/2} - e^{-(2m\pi i - \mu i)x_j/2}}{2i}$$

$$= \prod_{j=1}^{k} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \frac{\varepsilon_j}{2i} e^{\varepsilon_j (2m\pi i - \log\lambda)x_j/2} = \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k = \pm 1} \frac{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k}{(2i)^k} e^{(2m\pi i - \log\lambda)(\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j x_j)/2}.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^m}{(2m\pi - \mu)^{k+2n}} \prod_{j=1}^{k} \operatorname{sen}\big((2m\pi - \mu)x_j/2\big)$$

$$= -i^{k+2n} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m\pi i - \mu i)^{k+2n}} \prod_{j=1}^{k} \operatorname{sen}\big((2m\pi - \mu)x_j/2\big)$$

$$= -i^{k+2n} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k = \pm 1} \frac{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k}{(2i)^k} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^{m+1} e^{(2m\pi i - \log\lambda)(\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j x_j)/2}}{(2m\pi i - \log\lambda)^{k+2n}}$$

$$= (-1)^{n+1} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k = \pm 1} \frac{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k}{2^k} P_{k+2n}\Big(\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j x_j; \lambda\Big).$$

PROPOSICIÓN 7. *Si para $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ y $k \in \mathbb{N}$ denotamos*

$$P_k(x;\lambda) = \sum_{l=0}^{k-1} p_{l,k-1}^{\lambda} x^l,$$

se tiene

$$p_{l,k-1}^{\lambda} = \frac{\lambda^{1/2}}{2^l k!} \binom{k}{l} \mathcal{B}_{k-l}(\tfrac{1}{2};\lambda) = \frac{\lambda^{1/2}}{2^l l!\,(k-l)!} \mathcal{B}_{k-l}(\tfrac{1}{2};\lambda),$$

donde $\mathcal{B}_j(x;\lambda)$ es el polinomio de Apostol-Bernoulli.

DEMOSTRACIÓN. Sin más que aplicar la fórmula binomial (7) (que se cumple para cualquier familia de polinomios de Appell, incluso aunque los primeros polinomios sean nulos, como ocurre aquí con $\mathcal{B}_0(x;\lambda) = 0$) tenemos

$$P_k(x;\lambda) = \frac{\lambda^{1/2}}{k!} \mathcal{B}_k((1+x)/2;\lambda) = \frac{\lambda^{1/2}}{k!} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \mathcal{B}_{k-l}\big(\tfrac{1}{2};\lambda\big) \frac{x^l}{2^l}.$$

Con esto, y teniendo en cuenta que el sumando correspondiente a $l = k$ es nulo, se prueba el resultado. $\square$

Los $\mathcal{S}_k^l$ son como en (11) y (13), así que tenemos lo siguiente:

Teorema 8. *Sea $\mu \in \mathbb{C}$ que no es de la forma $2m\pi$ para ningún entero m, y $\lambda = e^{i\mu}$, así como $k \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$. Además, sean $\mathcal{S}_k^l(x_1, \ldots, x_k)$ los polinomios que aparecen en (13), $p_{l,k+2n-1}^{\lambda}$ los coeficientes dados en la proposición 7 y $\mathcal{B}_j(x;\lambda)$ los polinomios de Apostol-Bernoulli. Entonces,*

$$\begin{aligned}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^m}{(2m\pi-\mu)^{k+2n}} \prod_{j=1}^{k} \operatorname{sen}\big((2m\pi-\mu)x_j/2\big) \\ = (-1)^{n+1} \sum_{s=0}^{n-1} p_{k+2s,k+2n-1}^{\lambda} \mathcal{S}_k^{k+2s}(x_1,\ldots,x_k) \\ = (-1)^{n+1}\lambda^{1/2} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\mathcal{B}_{2n-2s}(\frac{1}{2};\lambda)}{2^{k+2s}(k+2s)!\,(2n-2s)!} \mathcal{S}_k^{k+2s}(x_1,\ldots,x_k)\end{aligned}$$

si $|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k| < 1$.

Nota 5. No se puede tomar $\mu = 0$ pues (aparte de que se incumplen las hipótesis del teorema) es el caso $\lambda = 1$ y ya no estamos en Apostol-Bernoulli «normal» (grado uno menos que el subíndice), sino en el caso Bernoulli clásico, que es el primero que hemos estudiado.

7. Series de productos de cosenos

Vamos a ver qué pasaría si, en vez de (2), intentáramos sumar

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2\pi m)^k} \prod_{j=1}^{k} \cos(\pi m x_j)$$

o alguna serie similar.

Sin más que usar que $\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$, tenemos

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{k} \cos(\pi m x_j) &= \prod_{j=1}^{k} \frac{e^{i\pi m x_j} + e^{-i\pi m x_j}}{2} = \prod_{j=1}^{k} \sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \frac{1}{2} e^{\varepsilon_j i\pi m x_j} \\ &= \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k=\pm 1} \frac{1}{2^k} e^{i\pi m \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j x_j}.\end{aligned}$$

Por tanto, con los mismos polinomios P_k que en (8), y suponiendo que $k+n$ es par,

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m\pi)^{k+n}} \prod_{j=1}^{k} \cos(\pi m x_j) &= \frac{1}{2} \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m\pi)^{k+n}} \prod_{j=1}^{k} \cos(\pi m x_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k=\pm 1} \frac{1}{2^k} \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{(-1)^{m+1} i^{k+n}}{(2m\pi i)^{k+n}} e^{i\pi m \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j x_j}\end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^{(k+n)/2}}{2} \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k=\pm 1} \frac{1}{2^k} P_{k+n}\Big(\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j x_j\Big).$$

De nuevo la condición $|x| < 1$ de (8) se convierte en $|\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j x_j| < 1$ para todos los posibles $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$, y esto equivale a $\sum_{j=1}^{k} |x_j| < 1$.

Ahora, en lugar de (11), lo que tenemos que hacer es calcular

$$\mathcal{C}_k^l(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k=\pm 1} \frac{1}{2^k}\Big(\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j x_j\Big)^l \tag{25}$$

para $l = 0, 1, \dots, k+n$ (a menudo usaremos $\mathcal{C}_k^l$ sin señalar su dependencia de los x_j).

Esta vez, con (25) podemos hacer lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_k^l &= \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k=\pm 1} \frac{1}{2^k}\Big(\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j x_j\Big)^l \\
&= \frac{1}{2^k} \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k=\pm 1} \sum_{l_1+\cdots+l_k=l} \binom{l}{l_1,\dots,l_k} \varepsilon_1^{l_1}\cdots\varepsilon_k^{l_k} x_1^{l_1}\cdots x_k^{l_k} \\
&= \frac{1}{2^k} \sum_{l_1+\cdots+l_k=l} \binom{l}{l_1,\dots,l_k} \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k=\pm 1} \varepsilon_1^{l_1}\cdots\varepsilon_k^{l_k} x_1^{l_1}\cdots x_k^{l_k} \\
&= \frac{1}{2^k} \sum_{l_1+\cdots+l_k=l} \binom{l}{l_1,\dots,l_k} \prod_{j=1}^{k} \Big(\sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_j^{l_j}\Big) x_1^{l_1}\cdots x_k^{l_k}.
\end{aligned}$$

Si alguno de los l_j es impar, $\sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_j^{l_j} = 1 - 1 = 0$, y el correspondiente sumando en $\sum_{l_1+\cdots+l_k=l}$ es nulo. Si todos los l_j son pares, $\sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_j^{l_j} = 1 + 1 = 2$ para todo j y, en consecuencia,

$$\mathcal{C}_k^l(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\substack{l_1+\cdots+l_k=l \\ l_j \text{ pares}}} \binom{l}{l_1,\dots,l_k} x_1^{l_1}\cdots x_k^{l_k}. \tag{26}$$

Para $\mathcal{S}_k^l$ había dos casos en los que era fácil identificar que esos $\mathcal{S}_k^l$ eran nulos, pero ahora ya solo hay uno (el caso $l < k$, dado que forzosamente siempre alguno de los l_j tenía que ser 0, que es par, y el correspondiente sumando se anulaba, ya no tiene paralelismo): Al sumar k números l_j pares, su suma l siempre es par; en consecuencia, $\mathcal{C}_k^l = 0$ cuando l es impar.

Con esto, y si denotamos $P_{k+n}(x) = \sum_{l=0}^{k+n} p_{l,k+n} x^l$ (al final los $p_{l,k+n}$ van a ser polinomios de Bernoulli evaluados en $1/2$, el $k+n$ tiene que ser par, y los únicos l que nos interesan los son pares), lo que tenemos es esto:

TEOREMA 9. *Sean $k \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, con $k+n$ par. Así mismo, sean $\mathcal{C}_k^l(x_1, \dots, x_k)$ los polinomios que aparecen en* (26)*, $p_{l,k}$ los coeficientes dados en la proposición 2.*

Entonces (como l es par, tomamos $l = 2s$),

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m\pi)^{k+n}} \prod_{j=1}^{k} \cos(m\pi x_j) &= \frac{(-1)^{(k+n)/2}}{2} \sum_{s=0}^{(k+n)/2} p_{2s,k+n} \mathcal{C}_k^{2s}(x_1, \ldots, x_k) \\ &= \frac{(-1)^{(k+n)/2}}{2} \sum_{s=0}^{(k+n)/2} \frac{B_{k+n-2s}(\frac{1}{2})}{2^{2s}(2s)!\,(k+n-2s)!} \mathcal{C}_k^{2s}(x_1, \ldots, x_k)\end{aligned} \tag{27}$$

si $|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k| < 1$.

8. Demostraciones (para cosenos) usando polinomios de Apostol-Bernoulli y Apostol-Euler

Recordemos que los polinomios de Apostol-Euler $\mathcal{E}_k(x;\lambda)$, Apostol-Bernoulli $\mathcal{E}_k(x;\lambda)$, así como los polinomios $Q_k(x;\lambda)$ (ver (22) y la proposición 4) y $P_k(x;\lambda)$ (ver (24) y la proposición 7), ya están definidos en la sección 6.

8.1. Lo que se obtiene con Apostol-Euler para cosenos

Dado un número μ real o complejo, y con $\mu \neq (2m+1)\pi$, tomamos $\lambda = e^{i\mu}$ (con lo cual $i\mu = \log\lambda$). Sin más que usar que $\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$, tenemos

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{k} \cos\big((\pi(2m+1) - \mu)x_j/2\big) &= \prod_{j=1}^{k} \frac{e^{(i\pi(2m+1)-i\mu)x_j/2} + e^{-(i\pi(2m+1)-i\mu)x_j/2}}{2} \\ &= \prod_{j=1}^{k} \sum_{\varepsilon_j=\pm1} \frac{1}{2} e^{\varepsilon_j(i\pi(2m+1)-\log\lambda)x_j/2} \\ &= \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k=\pm1} \frac{1}{2^k} e^{(i\pi(2m+1)-\log\lambda)(\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j x_j)/2}.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}&\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^m}{((2m+1)\pi - \mu)^{k+1+n}} \prod_{j=1}^{k} \cos\big((\pi(2m+1) - \mu)x_j/2\big) \\ &\quad= i^{k+1+n} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^m}{((2m+1)\pi i - \mu i)^{k+1+n}} \prod_{j=1}^{k} \cos\big((\pi(2m+1) - \mu)x_j/2\big) \\ &\quad= i^{k+1+n} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k=\pm1} \frac{1}{2^k} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^m e^{(i\pi(2m+1)-\log\lambda)(\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j x_j)/2}}{((2m+1)\pi i - \log\lambda)^{k+1+n}} \\ &\quad= i^{k+n} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k=\pm1} \frac{1}{2^k} Q_{k+n}\Big(\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j x_j; \lambda\Big).\end{aligned}$$

Ahora, si para $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $k \in \mathbb{N}$ denotamos $Q_k(x;\lambda) = \sum_{l=0}^{k} q_{l,k}^{\lambda} x^l$, aplicando la fórmula binomial (7) tenemos

$$Q_{k+n}(x;\lambda) = \frac{\lambda^{1/2}}{2(k+n)!}\mathcal{E}_{k+n}((1+x)/2;\lambda) = \frac{\lambda^{1/2}}{2(k+n)!}\sum_{l=0}^{k+n}\binom{k+n}{l}\mathcal{E}_{k+n-l}\big(\tfrac{1}{2};\lambda\big)\frac{x^l}{2^l},$$

luego $q_{l,k+n}^{\lambda} = \frac{\lambda^{1/2}}{2(k+n)!}\binom{k+n}{l}\frac{\mathcal{E}_{k+n-l}(\frac{1}{2};\lambda)}{2^l} = \frac{\lambda^{1/2}}{2^{l+1}}\frac{\mathcal{E}_{k+n-l}(\frac{1}{2};\lambda)}{l!\,(k+n-l)!}$.

Asimismo, los $\mathcal{C}_k^l$ son como en (25) y (26) (recordemos que son nulos cuando l impar, luego podemos poner $l = 2s$), así que tenemos lo siguiente:

TEOREMA 10. *Sea $\mu \in \mathbb{C}$ que no es de la forma $(2m+1)\pi$ para ningún entero m, y $\lambda = e^{i\mu}$, así como $k \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Además, sean $\mathcal{C}_k^l(x_1,\dots,x_k)$ los polinomios que aparecen en* (26)*, $q_{l,k}^{\lambda}$ los coeficientes dados en la proposición 4 y $\mathcal{E}_j(x;\lambda)$ los polinomios de Apostol-Euler. Entonces,*

$$\begin{aligned}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^m}{((2m+1)\pi-\mu)^{k+1+n}}\prod_{j=1}^{k}\cos\big(((2m+1)\pi-\mu)x_j/2\big)\\ = i^{k+n}\sum_{s=0}^{(k+n)/2} q_{2s,k+n}^{\lambda}\mathcal{C}_k^{2s}(x_1,\dots,x_k)\\ = i^{k+n}\lambda^{1/2}\sum_{s=0}^{(k+n)/2}\frac{\mathcal{E}_{k+n-2s}(\frac{1}{2};\lambda)}{2^{2s+1}(2s)!\,(k+n-2s)!}\mathcal{C}_k^{2s}(x_1,\dots,x_k)\end{aligned} \tag{28}$$

si $|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k| < 1$.

Aunque μ sea un número real, $\lambda = e^{i\mu}$ es complejo, así que da la impresión de que la serie anterior podría salir compleja, lo cual es imposible. Pero, en (28), λ solo aparece en la forma $i^{j+\mathrm{par}}\lambda^{1/2}\mathcal{E}_j(\frac{1}{2};\lambda)$, y eso es lo que debe ser un número real (no es cierto en general si $\mu \in \mathbb{C}$). En realidad, que el teorema 10 sea verdad es una demostración de que esos números $i^{j+\mathrm{par}}\lambda^{1/2}\mathcal{E}_j(\frac{1}{2};\lambda)$ son reales (lo mismo se podría decir para situaciones similares en otras expresiones de este artículo); y, además, no es difícil demostrar eso de manera directa, como vemos a continuación:

PROPOSICIÓN 11. *Sean $\mathcal{E}_k(x;\lambda)$ los polinomios de Apostol-Euler definidos en* (19)*, con $\lambda = e^{i\mu}$, $\mu \in \mathbb{R}$. Entonces,*

$$\widetilde{\mathcal{E}_k}(\mu) := i^k e^{i\mu/2}\mathcal{E}_k(\tfrac{1}{2};e^{i\mu}), \qquad k = 0,1,2,\dots,$$

es siempre un número real.

DEMOSTRACIÓN. Multipliquemos ambos lados de (19) (con $\lambda = e^{i\mu}$) por $e^{i\mu/2}$, tomemos $x = 1/2$ y $z = is$. De esa forma,

$$\frac{2e^{(s+\mu)i/2}}{e^{(s+\mu)i}+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{\mathcal{E}_k}(\mu)\frac{s^k}{k!}.$$

Ahora, tomando $w = s + \mu$ obtenemos

$$\frac{2e^{wi/2}}{e^{wi}+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{\mathcal{E}_k}(\mu) \frac{(w-\mu)^k}{k!},$$

y el resultado se sigue si mostramos que $2e^{wi/2}/(e^{wi}+1)$ es un número real cuando la variable w es real. Usando $\cos\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$, esto es muy sencillo:

$$\frac{2e^{wi/2}}{e^{wi}+1} = \frac{2}{e^{-wi/2}(e^{wi}+1)} = \frac{2}{e^{wi/2}+e^{-wi/2}} = \frac{1}{\cos(w/2)}. \qquad \square$$

La serie (28) del teorema 10 está indexada en $\sum_{m\in\mathbb{Z}}$, no en $\sum_{m=1}^{\infty}$ como en el teorema 9. Si se toma $\mu = 0$ (luego $\lambda = 1$) se pueden sacar expresiones mejores en las que aparecen los números de Euler.

En efecto, para $\mu = 0$, sea el sumando correspondiente a $m > 0$. Entonces, el sumando correspondiente a $-m-1 < 0$ se relaciona con el de m así:

$$\begin{aligned}
&\frac{(-1)^{-m-1}}{\big((2(-m-1)+1)\pi\big)^{k+1+n}} \prod_{j=1}^{k} \cos\big((2(-m-1)+1)\pi x_j/2\big) \\
&\qquad = \frac{(-1)^{m+1}}{(-(2m+1)\pi)^{k+1+n}} \prod_{j=1}^{k} \cos(-(2m+1)\pi x_j/2) \\
&\qquad = \frac{(-1)^{m+1}}{(-1)^{k+1+n}((2m+1)\pi)^{k+1+n}} \prod_{j=1}^{k} \cos((2m+1)\pi x_j/2) \\
&\qquad = \frac{(-1)^{k+n}(-1)^{m}}{((2m+1)\pi)^{k+1+n}} \prod_{j=1}^{k} \cos((2m+1)\pi x_j/2).
\end{aligned}$$

Es decir, son iguales si $k+n$ par y son iguales pero de signo contrario si $k+n$ impar.

En consecuencia, tenemos lo siguiente (el caso $k+n$ impar es tonto, pues (28) con $\mu = 0$ y $k+n$ impar es un simple «$0 = 0$» que no vale para nada):

Corolario 12. *Sean $k \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, con $k+n$ par. Así mismo, sean $\mathcal{C}_k^l(x_1, \ldots, x_k)$ los polinomios que aparecen en (26), $q_{l,k}^1$ los coeficientes dados en la proposición 4 y $E_l = 2^l E_l(1/2)$ los números de Euler. Entonces,*

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{((2m+1)\pi)^{k+1+n}} \prod_{j=1}^{k} \cos((2m+1)\pi x_j/2) \\
&\qquad = \frac{(-1)^{(k+n)/2}}{2} \sum_{s=0}^{(k+n)/2} q_{2s,k+n}^1 \mathcal{C}_k^{2s}(x_1, \ldots, x_k) \\
&\qquad = (-1)^{(k+n)/2} \sum_{s=0}^{(k+n)/2} \frac{E_{k+n-2s}}{2^{k+n+2}(2s)!\,(k+n-2s)!} \mathcal{C}_k^{2s}(x_1, \ldots, x_k)
\end{aligned}$$

si $|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k| < 1$.

8.2. Lo que se obtiene con Apostol-Bernoulli para cosenos

Dado un número μ real o complejo, y con $\mu \neq (2m+1)\pi$, tomamos $\lambda = e^{i\mu}$ (con lo cual $i\mu = \log\lambda$). Sin más que usar que $\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$, tenemos

$$\prod_{j=1}^{k} \cos((2m\pi - \mu)x_j/2) = \prod_{j=1}^{k} \frac{e^{(2m\pi i - \mu i)x_j/2} + e^{-(2m\pi i - \mu i)x_j/2}}{2}$$
$$= \prod_{j=1}^{k} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \frac{1}{2} e^{\varepsilon_j (2m\pi i - \log\lambda)x_j/2} = \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k = \pm 1} \frac{1}{2^k} e^{(2m\pi i - \log\lambda)(\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j x_j)/2}.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^m}{(2m\pi - \mu)^{k+n}} \prod_{j=1}^{k} \cos\big((2m\pi - \mu)x_j/2\big)$$
$$= -i^{k+n} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m\pi i - \mu i)^{k+n}} \prod_{j=1}^{k} \cos\big((2m\pi - \mu)x_j/2\big)$$
$$= -i^{k+n} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k = \pm 1} \frac{1}{2^k} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^{m+1} e^{(2m\pi i - \log\lambda)(\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j x_j)/2}}{(2m\pi i - \log\lambda)^{k+n}}$$
$$= -i^{k+n} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k = \pm 1} \frac{1}{2^k} P_{k+n}\Big(\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j x_j; \lambda\Big).$$

Recordemos ahora que, si para $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ y $k \in \mathbb{N}$ denotamos $P_k(x;\lambda) = \sum_{l=0}^{k-1} p_{l,k-1}^{\lambda} x^l$, la fórmula binomial (7) nos dice que

$$P_k(x;\lambda) = \frac{\lambda^{1/2}}{k!} \mathcal{B}_k((1+x)/2;\lambda) = \frac{\lambda^{1/2}}{k!} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \mathcal{B}_{k-l}\big(\tfrac{1}{2};\lambda\big) \frac{x^l}{2^l},$$

luego $p_{l,k+n-1}^{\lambda} = \frac{\lambda^{1/2}}{2^l (k+n)!} \binom{k+n}{l} \mathcal{B}_{k+n-l}(\frac{1}{2};\lambda) = \frac{\lambda^{1/2}}{2^l l!\,(k+n-l)!} \mathcal{B}_{k+n-l}(\frac{1}{2};\lambda)$.

Además, los $\mathcal{C}_k^l$ son como en (25) y (26) (recordemos que son nulos cuando l impar, luego podemos poner $l = 2s$), así que tenemos lo siguiente:

TEOREMA 13. *Sea $\mu \in \mathbb{C}$ que no es de la forma $2m\pi$ para ningún entero m, y $\lambda = e^{i\mu}$, así como $k \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$. Además, sean $\mathcal{C}_k^l(x_1,\ldots,x_k)$ los polinomios que aparecen en* (26)*, $p_{l,k+n-1}^{\lambda}$ los coeficientes dados en la proposición 7 y $\mathcal{B}_j(x;\lambda)$ los polinomios de Apostol-Bernoulli. Entonces,*

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^m}{(2m\pi - \mu)^{k+n}} \prod_{j=1}^{k} \cos\big((2m\pi - \mu)x_j/2\big)$$
$$= -i^{k+n} \sum_{s=0}^{(k+n-1)/2} p_{2s,k+n-1}^{\lambda} \mathcal{C}_k^{2s}(x_1,\ldots,x_k)$$

$$= -i^{k+n}\lambda^{1/2} \sum_{s=0}^{(k+n-1)/2} \frac{\mathcal{B}_{k+n-2s}(\frac{1}{2};\lambda)}{2^{2s}(2s)!\,(k+n-2s)!}\,\mathcal{C}_k^{2s}(x_1,\dots,x_k)$$

si $|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|<1$.

Nota 6. No se puede tomar $\mu=0$ pues (aparte de que se incumplen las hipótesis del teorema) es el caso $\lambda=1$ y ya no estamos en Apostol-Bernoulli «normal» (grado uno menos que el subíndice), sino en el caso Bernoulli clásico, que es el primero que hemos estudiado.

9. Los sumandos de $\mathcal{C}_k^{2s}(x_1,\dots,x_k)$

Partiendo de (26), queremos ver cuántos tipos de sumandos aparecen en cada $\mathcal{C}_k^{2s}$, es decir, cuántos coeficientes multinomiales hay de la forma

$$\binom{2s}{l_1,l_2,\dots,l_k} \text{ con } l_1+l_2+\cdots+l_k=2s \text{ y } l_j\geq 0 \text{ par para todo } j, \tag{29}$$

donde el orden de los l_j no se tiene en cuenta; cada uno de estos coeficientes multinomiales será factor común de una suma simétrica de monomios en $\mathcal{C}_k^{2s}$. Como era de esperar, lo llamaremos «número de sumandos en la descomposición de $\mathcal{C}_k^{2s}$», y lo denotaremos con $\operatorname{nsd}(\mathcal{C}_k^{2s})$. Haciendo como en la sección 4 se puede ver que (si k no es muy «pequeño»)

$$\operatorname{nsd}(\mathcal{C}_k^0)=1,\quad \operatorname{nsd}(\mathcal{C}_k^2)=1,\quad \operatorname{nsd}(\mathcal{C}_k^4)=2,\quad \operatorname{nsd}(\mathcal{C}_k^6)=3,\quad \operatorname{nsd}(\mathcal{C}_k^8)=5.$$

Y, tal como veíamos en las notas 1, 2 y 3, si k es «pequeño» estos números pueden ser menores, pues algunos sumandos pueden no existir. En concreto, y por ejemplo, tendríamos

$$\operatorname{nsd}(\mathcal{C}_1^4)=1,\quad \operatorname{nsd}(\mathcal{C}_2^6)=2,\quad \operatorname{nsd}(\mathcal{C}_3^8)=3.$$

Veamos ahora cómo evaluar $\operatorname{nsd}(\mathcal{C}_k^{2s})$ en general.

Con la notación de (29), los coeficientes de $\mathcal{C}_k^{2s}$ que nos interesan se corresponden con las particiones de $2s$ mediante k enteros pares no negativos, y $\operatorname{nsd}(\mathcal{C}_k^{2s})$ es el número de tales particiones (en cuanto a la teoría de particiones, de nuevo remitimos a [4, § 14.3] o a [1]).

El número $\operatorname{nsd}(\mathcal{C}_k^{2s})$ que buscamos equivale a encontrar de cuántas maneras podemos obtener $2s$ como suma de, a lo más, k enteros positivos pares l_j, y esa es la misma caracterización que teníamos para $\mathcal{S}_k^{k+2s}$ en la sección 5.[2] Es decir, $\operatorname{nsd}(\mathcal{S}_k^{k+2s})=\operatorname{nsd}(\mathcal{C}_k^{2s})$.

Así pues,

$$\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{1-x^j}=1+\sum_{s=1}^{\infty}\operatorname{nsd}(\mathcal{C}_k^{2s})x^s$$

[2]Lo que ha ocurrido es que en $\mathcal{S}_k^{k+2s}$ hemos hecho previamente $s_j=l_j-1$ para que los s_j fuesen pares y su suma fuese $2s$, y en $\mathcal{C}_k^{2s}$ ya teníamos que los l_j son pares y su suma es $2s$ (eso se refleja en el factor $\prod_{j=1}^{k}x_j$ que nos aparecía siempre).

y, para $k \geq s$, los valores de $\operatorname{nsd}(\mathcal{C}_k^{2s})$ coinciden con los dados para $\operatorname{nsd}(\mathcal{S}_k^{k+2s})$ en la tabla del final de la sección 5.

10. Cálculo explícito de los «casos pequeños» (cosenos)

10.1. Comentarios previos

La idea aquí es proporcionar varios ejemplos explícitos para series de productos de cosenos, como en la sección 4.

Obsérvese que, en (25) y (26), el l va desde 0 hasta $k+n$ (y los l_j son pares); y en (11) y (13) el l iba desde k hasta $k+2n$ (y los l_j eran impares). El n de los cosenos en lugar del $2n$ de los senos es solo un cambio de notación, pues en los senos estábamos tomando, como exponente de los denominadores, $k+2n$, y en los cosenos estamos tomando $k+n$.

La diferencia es que, por ejemplo con $n=0$, en el caso de los senos solo había que estudiar $l=k$, y en el caso de los cosenos hay que estudiar desde $l=0$ hasta k. El número de sumandos en (27) va a depender de k (el número de variables), no como en (14) que solo dependía de n (siempre que k no fuese muy pequeño). Esto impide analizar cada n por separado (y sin importar el k) como hacíamos en la sección 4.

Volviendo simplemente al caso $n=0$ para senos, lo que teníamos allí es

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m\pi)^k} \prod_{j=1}^{k} \operatorname{sen}(m\pi x_j) = \frac{1}{2}\, p_{k,k}\mathcal{S}_k^k = \frac{1}{2}\frac{1}{2^k k!}\, k!\, x_1 \cdots x_k = \frac{1}{2^{k+1}} \prod_{j=1}^{k} x_j,$$

un solo sumando. En cambio, para cosenos, la expresión (27) (que necesita que k sea par) da

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m\pi)^k} \prod_{j=1}^{k} \cos(m\pi x_j) &= \frac{(-1)^{k/2}}{2} \sum_{s=0}^{k/2} p_{2s,k}\mathcal{C}_k^{2s}(x_1,\ldots,x_k) \\ &= \frac{(-1)^{k/2}}{2} \sum_{s=0}^{k/2} \frac{B_{k-2s}(\frac{1}{2})}{2^{2s}(2s)!\,(k-2s)!}\mathcal{C}_k^{2s}(x_1,\ldots,x_k).\end{aligned}$$

Siguiendo con $n=0$, con senos, el único $\mathcal{S}_k^l$ que se usaba era $\mathcal{S}_k^k$, que solo tenía el coeficiente multinomial $\binom{k}{1,1,\ldots,1} = k!$. Con cosenos, depende de k. Con $k=2$, se usan $\mathcal{S}_2^0$ y $\mathcal{S}_2^2$, y los coeficientes multinomiales que importan son estos:

$$\binom{0}{0,0} = 1, \quad \binom{2}{2,0} = 1.$$

Con $k=4$ se usan $\mathcal{S}_4^0$, $\mathcal{S}_4^2$ y $\mathcal{S}_4^4$, y los coeficientes multinomiales son

$$\binom{0}{0,0,0,0} = 1, \quad \binom{2}{2,0,0,0} = 1, \quad \binom{4}{2,2,0,0} = \frac{4!}{2!\,2!}.$$

Con $k=6$ se usan $\mathcal{S}_6^0$, $\mathcal{S}_6^2$, $\mathcal{S}_6^4$ y $\mathcal{S}_6^6$, y los coeficientes multinomiales son

$$\binom{0}{0,0,0,0,0,0}=1,\quad \binom{2}{2,0,0,0,0,0}=1,$$
$$\binom{4}{4,0,0,0,0,0}=1,\quad \binom{4}{2,2,0,0,0,0}=\frac{4!}{2!\,2!},$$
$$\binom{6}{6,0,0,0,0,0}=1,\quad \binom{6}{4,2,0,0,0,0}=\frac{6!}{4!\,2!},\quad \binom{6}{2,2,2,0,0,0}=\frac{6!}{2!\,2!\,2!}.$$

Así no hay forma de poner fórmulas explícitas dependientes solo de n, como se hacía en la sección 4.

Pero hay una cosa que se puede hacer: ¡un cambio de parámetros en la notación! Observemos que, si uno integra $\prod_{i=1}^k \cos(m\pi t_i)$ entre entre 0 y x_i con respecto a todas las variables t_i, $i=1,\dots,k$, se obtiene $1/(m\pi)^k\prod_{i=1}^k \operatorname{sen}(m\pi x_i)$ (lo mismo se podía hacer en sentido contrario derivando, claro). Así que, cuando en las series de productos de senos aparece $k+2n$ en el exponente del denominador, lo análogo en la de cosenos es tener $2n$ en su lugar.

Teniendo en cuenta que el $k+n$ del teorema 9 tiene que ser par, vamos a poner, en el teorema, $k+n=2N$ (cambiamos n por N, la k la dejamos tranquila), es decir, (27) queda así:

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m\pi)^{2N}}\prod_{j=1}^{k}\cos(m\pi x_j) &= \frac{(-1)^N}{2}\sum_{s=0}^{N} p_{2s,2N}\mathcal{C}_k^{2s}(x_1,\dots,x_k)\\ &= \frac{(-1)^N}{2}\sum_{s=0}^{N}\frac{B_{2N-2s}(\frac{1}{2})}{2^{2s}(2s)!\,(2N-2s)!}\mathcal{C}_k^{2s}(x_1,\dots,x_k)\end{aligned}\tag{30}$$

si $|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|<1$. En esta fórmula, el número de sumandos ya no depende de k, solo de N.

Así pues, lo que vamos a hacer ahora es estudiar esta fórmula para los casos particulares pequeños de N. El caso $N=0$ ya no sirve, claro (no solo diverge sino que no se corresponde con $2N=k+n$ con k positivo), hay que empezar con $N=1$.

10.2. Caso $N=1$

Si en (30) tenemos $N=1$, los únicos s del sumatorio son $s=0$ y $s=1$ y solo hay que usar $\mathcal{C}_k^0$ y $\mathcal{C}_k^2$ (recordar sus expresiones en (26)).

Para $\mathcal{C}_k^0$, el correspondiente coeficiente multinomial es $\binom{0}{0,0,\dots,0}=1$, y

$$\mathcal{C}_k^0=1.$$

Para $\mathcal{C}_k^2$, el único coeficiente multinomial implicado es $\binom{2}{2,0,\dots,0}=2!/2!=1$, así que

$$\mathcal{C}_k^2=\sum_{j=1}^{k}x_j^2.$$

Usando (30) con $N = 1$ (los dos únicos coeficientes de $P_{2N}(x)$ que interesan son $p_{0,2}$ y $p_{2,2}$), tenemos ahora

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m\pi)^2} \prod_{j=1}^{k} \cos(m\pi x_j) = \frac{(-1)^1}{2}\Big(p_{0,2}\mathcal{C}_k^0 + p_{2,2}\mathcal{C}_k^2\Big) = \frac{-1}{2}\Big(p_{0,2} + p_{2,2}\Big(\sum_{j=1}^{k} x_j^2\Big)\Big).$$

Según la proposición 2, y teniendo en cuenta que $B_2 = 1/6$ y $B_0 = 1$,

$$p_{0,2} = \frac{-1}{2!}\binom{2}{0}\frac{2^2-2}{2^2}B_2 = \frac{-1}{2!}\frac{2}{2^2 6} = \frac{-1}{24},$$
$$p_{2,2} = \frac{-1}{2!}\binom{2}{2}\frac{2^0-2}{2^2}B_0 = \frac{-1}{2!}\frac{-1}{2^2} = \frac{1}{8},$$

llegamos a

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m\pi)^2} \prod_{j=1}^{k} \cos(m\pi x_j) = \frac{-1}{2}\Big(\frac{-1}{24} + \frac{1}{8}\prod_{j=1}^{k} x_j^2\Big) = \frac{1}{48}\Big(1 - 3\sum_{j=1}^{k} x_j^2\Big).$$

10.3. CASO $N = 2$

En este caso, en (30) aparece P_4, y los $\mathcal{C}_k^l$ que hay que tener en cuenta son $\mathcal{C}_k^0$, $\mathcal{C}_k^2$ y $\mathcal{C}_k^4$; a su vez, los correspondientes coeficientes de P_{k+4} que hay que usar en (30) son $p_{0,4}$, $p_{2,4}$ y $p_{4,4}$. Así,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m\pi)^4} \prod_{j=1}^{k} \cos(m\pi x_j) = \frac{(-1)^2}{2}\Big(p_{0,4}\mathcal{C}_k^0 + p_{2,4}\mathcal{C}_k^2 + p_{4,4}\mathcal{C}_k^4\Big).$$

Ya conocemos $\mathcal{C}_k^0$ y $\mathcal{C}_k^2$; analicemos $\mathcal{C}_k^4$. Ahora hay dos tipos de coeficientes multinomiales $\binom{4}{l_1, l_2, \ldots, l_k}$ con l_j pares (y cuya suma sea 4): (a) que un l_j valga 0 y todos los demás valgan 0; (b) que dos l_j valgan 2 y todos los demás valgan 0. Respectivamente, se tiene

$$\binom{4}{4, 1, 1, \ldots, 1} = \frac{4!}{4!} = 1, \quad \binom{4}{2, 2, 1, \ldots, 1} = \frac{4!}{2!\,2!}$$

(por supuesto, el 4 no tiene por qué estar en la primera posición del primer caso, ni tampoco los dos 2 del segundo caso). Los correspondientes $x_1^{l_1} \cdots x_k^{l_k}$ en (13) son

$$x_1^4 x_2^0 x_3^0 \cdots x_k^0, \qquad x_1^2 x_2^2 x_3^0 \cdots x_k^0$$

y todas sus simetrías. Así pues,

$$\mathcal{C}_k^4 = \sum_{j=1}^{k} x_j^4 + \frac{4!}{2!\,2!}\sum_{j_1<j_2} x_{j_1}^2 x_{j_2}^2.$$

Usemos ahora $B_4 = -1/30$, $B_2 = 1/6$ y $B_0 = 1$; la proposición 2 nos dice que

$$\begin{aligned}
p_{0,4} &= \frac{-1}{4!}\binom{4}{0}\frac{2^4-2}{2^4}B_4 = \frac{1}{4!}\frac{14}{2^4\cdot 30} = \frac{7}{15\cdot 4!\,2^4},\\
p_{2,4} &= \frac{-1}{4!}\binom{4}{2}\frac{2^2-2}{2^4}B_2 = \frac{-1}{2!\,2!}\frac{2}{2^4\cdot 6} = \frac{-1}{12\cdot 2^4},\\
p_{4,4} &= \frac{-1}{4!}\binom{4}{4}\frac{2^0-2}{2^4}B_0 = \frac{1}{4!\,2^4}.
\end{aligned}$$

Como consecuencia,

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m\pi)^4}\prod_{j=1}^{k}\cos(m\pi x_j)\\
&\quad= \frac{1}{2\cdot 2^4}\left(\frac{7}{15\cdot 4!} + \frac{-1}{12}\sum_{j=1}^{k}x_j^2 + \frac{1}{4!}\Big(\sum_{j=1}^{k}x_j^4 + \frac{4!}{2!\,2!}\sum_{j_1<j_2}x_{j_1}^2x_{j_2}^2\Big)\right)\\
&\quad= \frac{1}{2\cdot 2^4}\left(\frac{7}{360} - \frac{1}{12}\sum_{j=1}^{k}x_j^2 + \frac{1}{24}\sum_{j=1}^{k}x_j^4 + \frac{1}{4}\sum_{j_1<j_2}x_{j_1}^2x_{j_2}^2\right)\\
&\quad= \frac{1}{360\cdot 2^5}\left(7 - 30\sum_{j=1}^{k}x_j^2 + 15\sum_{j=1}^{k}x_j^4 + 90\sum_{j_1<j_2}x_{j_1}^2x_{j_2}^2\right).
\end{aligned}$$

Nota 7. Conviene aclarar que, si $k = 1$, el coeficiente multinomial $\binom{4}{2,2,0,\ldots,0}$ no existe, pues «abajo» del coeficiente multinomial tiene que haber $k = 1$ números. Del mismo modo, en $\mathcal{C}_1^4$ tampoco tiene sentido el sumatorio $\sum_{j_1,j_2}$ con los $x_{j_1}^2x_{j_2}^2$ con dos variables distintas, dado que con $k = 1$ solo existe una variable x_1; así pues, ese sumatorio tiene cero sumandos y no aparece.

10.4. Caso $N = 3$

En este caso, lo que tenemos es

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m\pi)^6}\prod_{j=1}^{k}\cos(m\pi x_j) = \frac{(-1)^3}{2}\Big(p_{0,6}\mathcal{C}_k^0 + p_{2,6}\mathcal{C}_k^2 + p_{4,6}\mathcal{C}_k^4 + p_{6,6}\mathcal{C}_k^6\Big).$$

Ya conocemos $\mathcal{C}_k^0$, $\mathcal{C}_k^2$ y $\mathcal{C}_k^4$, así como (por la proposición 2) los $p_{l,6}$. Analicemos $\mathcal{C}_k^6$. Ahora resulta que hay más tipos de coeficientes multinomiales (12) con los l_j pares y cuya suma es $l = 6$:

$$\binom{6}{6,0,\ldots,0} = \frac{6!}{6!} = 1,\quad \binom{6}{4,2,0,\ldots,0} = \frac{6!}{4!\,2!},\quad \binom{6}{2,2,2,0,\ldots,0} = \frac{6!}{2!\,2!\,2!}.$$

Con esto, y razonando como en el caso $N = 2$, lo que se tiene es

$$\mathcal{C}_k^6 = \sum_{j=1}^{k}x_j^6 + \frac{6!}{4!\,2!}\sum_{\substack{j_1,j_2\\ \text{distintos}}}x_{j_1}^4x_{j_2}^2 + \frac{6!}{2!\,2!\,2!}\sum_{j_1<j_2<j_3}x_{j_1}^2x_{j_2}^2x_{j_3}^2.$$

Usando $B_6 = 1/42$, $B_4 = -1/30$, $B_2 = 1/6$, $B_0 = 1$ y la proposición 2,

$$\begin{aligned}
p_{0,6} &= \frac{-1}{6!}\binom{6}{0}\frac{2^6-2}{2^6}B_6 = \frac{-1}{6!}\frac{62}{42\cdot 2^6} = \frac{-31}{21\cdot 6!\,2^6},\\
p_{2,6} &= \frac{-1}{6!}\binom{6}{2}\frac{2^4-2}{2^6}B_4 = \frac{1}{2!\,4!}\frac{14}{30\cdot 2^6} = \frac{7}{720\cdot 2^6},\\
p_{4,6} &= \frac{-1}{6!}\binom{6}{4}\frac{2^2-2}{2^6}B_2 = \frac{-1}{4!\,2!}\frac{2}{6\cdot 2^6} = \frac{-1}{144\cdot 2^6},\\
p_{6,6} &= \frac{-1}{6!}\binom{6}{6}\frac{2^0-2}{2^6}B_0 = \frac{1}{6!\cdot 2^6}.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m\pi)^6}\prod_{j=1}^{k}\cos(m\pi x_j)\\
&\quad= \frac{-1}{2\cdot 2^6}\Bigg(\frac{-31}{21\cdot 6!} + \frac{7}{720}\sum_{j=1}^{k}x_j^2 + \frac{-1}{144}\Big(\sum_{j=1}^{k}x_j^4 + \frac{4!}{2!\,2!}\sum_{j_1<j_2}x_{j_1}^2x_{j_2}^2\Big)\\
&\qquad + \frac{1}{6!}\Big(\sum_{j=1}^{k}x_j^6 + \frac{6!}{4!\,2!}\sum_{\substack{j_1,j_2\\ \text{distintos}}}x_{j_1}^4x_{j_2}^2 + \frac{6!}{2!\,2!\,2!}\sum_{j_1<j_2<j_3}x_{j_1}^2x_{j_2}^2x_{j_3}^2\Big)\Bigg)\\
&\quad= \frac{1}{3\cdot 7!\,2^7}\Bigg(31 - 147\sum_{j=1}^{k}x_j^2 + 105\sum_{j=1}^{k}x_j^4 + 630\sum_{j_1<j_2}x_{j_1}^2x_{j_2}^2\\
&\qquad - 21\sum_{j=1}^{k}x_j^6 - 315\sum_{\substack{j_1,j_2\\ \text{distintos}}}x_{j_1}^4x_{j_2}^2 - 1690\sum_{j_1<j_2<j_3}x_{j_1}^2x_{j_2}^2x_{j_3}^2\Bigg).
\end{aligned}$$

Nota 8. Recordemos que cuando k es «pequeño», digamos $k = 2$, cosas como $\binom{6}{2,2,2,0,\ldots,0}$ no existen, pues «abajo» del coeficiente multinomial tiene que haber $k = 2$ números. Del mismo modo, tampoco tiene sentido $x_{j_1}^2x_{j_2}^2x_{j_3}^2$ con tres variables distintas, dado que con $k = 2$ solo existen las variables x_1 y x_2; así pues, el sumatorio $\sum_{j_1,j_2,j_3}$ no existe en ese caso. Si $k = 1$, son unos cuantos más los coeficientes multinomiales y sumatorios que no existen.

AGRADECIMIENTOS. La investigación de los autores está parcialmente financiada por los proyectos PID2021-124332NB-C21 y PID2021-124332NB-C22 (Ministerio de Ciencia e Innovación), FQM-262 (Junta de Andalucía), E48_23R (Gobierno de Aragón), REGI22/15 (Gobierno de La Rioja) y Fondos Feder (Unión Europea).

REFERENCIAS

[1] G. E. ANDREWS, *The Theory of Partitions*, Cambridge University Press, 1984.

[2] M. P. Appell, Sur une classe de polynômes, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (2)* **9** (1880), 119–144.

[3] T. M. Apostol, On the Lerch zeta function, *Pacific J. Math.* **1** (1951), 161–167; addendum, *Pacific J. Math.* **2** (1952), 10.

[4] T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1976.

[5] Ó. Ciaurri, L. M. Navas, F. J. Ruiz y J. L. Varona, A simple computation of $\zeta(2k)$, *Amer. Math. Monthly* **122** (2015), 444–451.

[6] Ó. Ciaurri, L. M. Navas, F. J. Ruiz y J. L. Varona, The computation of $\zeta(2k)$, $\beta(2k+1)$ and beyond by using telescoping series, *Orthogonal Polynomials and Special Functions: In Memory of José Carlos Petronilho*, Coimbra Mathematical Texts book series, Springer, por aparecer.

[7] K. Dilcher, Bernoulli and Euler polynomials, *NIST handbook of mathematical functions*, 587–599, U.S. Dept. Commerce, Washington, DC, 2010. Disponible online en `http://dlmf.nist.gov/24`

[8] A. J. Durán, M. Pérez y J. L. Varona, How to compute multivariate Bessel expansions, *Ramanujan J.*, por aparecer.

[9] Q.-M. Luo, Fourier expansions and integral representations for the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials, *Math. Comp.* **78** (2009), 2193–2208.

[10] M. Merca, A note on the determinant of a Toeplitz-Hessenberg matrix, *Spec. Matrices* **1** (2013), 10–16.

[11] L. M. Navas, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Asymptotic estimates for Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials, *Math. Comp.* **81** (2012), 1707–1722.

[12] L. M. Navas, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Existence and reduction of generalized Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler and Apostol-Genocchi polynomials, *Archivum Mathematicum (Brno)* **55** (2019), 157–165.

[13] A. P. Prudnikov, Y. A. Brychkov y O. I. Marichev, *Integrals and series. Vol. 1: Elementary functions*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1986.

[14] J. L. Varona, En recuerdo de Srinivasa Ramanujan (1887–1920). ¿De cuántas formas podemos sumar 176 votos?, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **23** (2020), 134.

Antonio J. Durán, Departamento de Análisis Matemático e IMUS, Universidad de Sevilla
Correo electrónico: `duran@us.es`

Mario Pérez, Departamento de Matemáticas e IUMA, Universidad de Zaragoza
Correo electrónico: `mperez@unizar.es`

Juan Luis Varona, Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja
Correo electrónico: `jvarona@unirioja.es`