

Una introducción a la fiabilidad algebraica de sistemas multiestado

por

Rodrigo Iglesias, Laura Moreno-Resa, Patricia Pascual-Ortigosa
y Eduardo Sáenz-de-Cabezón

RESUMEN. Este artículo es una introducción al cálculo de la fiabilidad de sistemas mediante ideales monomiales. Un sistema es un conjunto de componentes —que pueden estar en dos o más estados de funcionamiento— y una función de estructura que determina el nivel de funcionamiento del sistema. En este artículo veremos cómo podemos usar el álgebra de los ideales monomiales, junto con técnicas de geometría y topología algebraica, para calcular la probabilidad de que un sistema esté en un estado de funcionamiento.

INTRODUCCIÓN

En este artículo vamos a introducir el estudio de la fiabilidad de sistemas multiestado desde una perspectiva algebraica basada en el uso de ideales monomiales. Para profundizar en este tema, y en las herramientas empleadas a lo largo del mismo, se recomiendan los artículos [10, 11, 14, 12, 13] y las referencias que en ellos se encuentran.

Consideramos un *sistema* como un conjunto de componentes junto con una *función de estructura*. Tanto las componentes como el sistema se dicen *binarios* si únicamente pueden alcanzar dos niveles o estados de funcionamiento diferentes: 0 es fallo y 1 es funcionamiento; mientras que se dicen *multiestado* si pueden alcanzar más de dos estados diferentes (y crecientes en cuanto a nivel de funcionamiento o rendimiento). El *estado* o *nivel de funcionamiento* de un sistema está determinado por el estado de sus componentes por medio de su función de estructura.

La *fiabilidad* (respectivamente *no fiabilidad*) de un sistema se define como la probabilidad de que el sistema se encuentre en un estado de funcionamiento (o en un estado de fallo, respectivamente), donde cada componente del sistema tiene asociada una probabilidad para cada uno de los estados que puede alcanzar. En nuestro caso, consideramos que esta probabilidad es constante en el tiempo o, de manera equivalente, solo consideramos la fiabilidad en un determinado instante t , pero el método algebraico que vamos a presentar en este artículo se puede aplicar a probabilidades de componentes que varían en el tiempo y a sistemas reparables o con procesos de renovación. Para sistemas binarios, la fiabilidad representa la probabilidad de que el sistema se encuentre en estado 1, mientras que para los sistemas multiestado tenemos diferentes *niveles de fiabilidad* dependiendo del número de estados del sistema.

El estudio de la fiabilidad de sistemas es una rama de la ingeniería que ha cobrado gran relevancia en las últimas décadas. De hecho, los primeros artículos relacionados con sistemas multiestado fueron publicados a finales de la década de 1970 [3, 7]. Desde entonces, los métodos para calcular la fiabilidad de un sistema han avanzado notablemente. Este interés creciente es debido a que conocer la probabilidad de que un sistema funcione o falle es de gran relevancia en campos como la ingeniería, redes, biología, etc.

Algún ejemplo de sus aplicaciones es el estudio de *fiabilidad de redes*. Este problema se centra en estudiar la probabilidad de que exista, al menos, un camino entre los *vértices fuente* y los *vértices objetivo*, teniendo en cuenta que las conexiones (aristas) que unen los vértices de la red tienen cierta probabilidad de funcionar. Otro ejemplo son los *sistemas k -entre- n* . Estos sistemas funcionan (o fallan) cuando al menos k de sus n componentes funcionan (o fallan). Los sistemas k -entre- n son uno de los tipos de sistemas más relevantes y estudiados en el campo de la fiabilidad debido a su interés teórico y su amplio rango de aplicaciones, ver [9].

La relación entre álgebra y teoría de la fiabilidad viene dada por los ideales monomiales: ideales libres de cuadrados en el caso binario e ideales monomiales con exponentes en el caso multiestado. Cada nivel de funcionamiento del sistema tiene asociado un *ideal de caminos*, el cual nos permite calcular la fiabilidad del sistema, y un *ideal de cortes*, con el que podemos calcular la no fiabilidad del sistema. Una vez hayamos traducido el sistema a su correspondiente ideal monomial, vamos a necesitar su serie de Hilbert (o bien una resolución). Con estos ingredientes y la probabilidad de fallo o funcionamiento de cada una de las componentes, seremos capaces de calcular la fiabilidad (o no fiabilidad) del sistema.

El artículo está estructurado de la siguiente manera. En la primera sección vamos a introducir la fiabilidad de sistemas, ofreciendo definiciones precisas, por ejemplo, de qué es un sistema o qué entendemos por un corte. En la segunda sección introduciremos, de la manera más liviana posible, las herramientas que vamos a necesitar, como son los ideales monomiales, las resoluciones, la serie de Hilbert y los árboles de Mayer-Vietoris. Con estas herramientas presentaremos en la siguiente sección el método algebraico para el cálculo de fiabilidad de sistemas. La cuarta sección estará dedicada a los sistemas k -entre- n , que son muy relevantes por su amplia gama de aplicaciones. Finalmente, describiremos, de forma breve, algunas de las líneas de investigación que tenemos abiertas.

1. FUNDAMENTOS DE FIABILIDAD

DEFINICIÓN 1.1. Un *sistema* $S = (\mathcal{C}, \phi)$ es un conjunto de componentes $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\}$, de forma que cada componente c_i puede estar en un número discreto de estados ordenados $\mathcal{S}_i = \{0, 1, \dots, m_i\}$, junto con una función de estructura $\phi : \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \times \dots \times \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}$, donde $\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, m\}$ son los posibles estados del sistema.

La definición anterior es una definición general de sistema. Si $m_i = 1$, la componente c_i se dirá *binaria*. En caso contrario, diremos que la componente es *multiestado*.

Igualmente, si $m = 1$ el sistema es binario mientras que diremos que es multiestado en caso contrario. Resumiendo, tenemos los siguientes tipos de sistemas:

- Si $m = 1$ y $m_i = 1$ para todo i , el sistema es binario con componentes binarias.
- Si $m = 1$ y $m_i > 1$, al menos para una componente c_i , diremos que el sistema es binario con componentes multiestado.
- Si $m > 1$ y $m_i = 1$ para todo i , nos encontramos con un sistema multiestado con componentes binarias.
- Si $m > 1$ y $m_i > 1$, al menos para un i , el sistema es multiestado con componentes multiestado.

DEFINICIÓN 1.2. Al conjunto

$$\mathcal{D} = \{ \mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ t.q. } a_i \in \mathcal{S}_i, \forall i \in \{1, \dots, n\} \}$$

lo llamaremos *espacio de estados del sistema* S y cada \mathbf{a} es un *estado de las componentes*.

La función de estructura, ϕ , recibe una n -tupla con los estados de cada una de las componentes y devuelve el estado final del sistema. Diremos que la función de estructura ϕ es *no decreciente* si $\phi(\mathbf{x}) \geq \phi(\mathbf{y})$ siempre que $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$, donde $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ significa $x_i \geq y_i$ para todo i .

DEFINICIÓN 1.3. Diremos que un sistema $S = (\mathcal{C}, \phi)$ es *coherente* si la función de estructura ϕ es no decreciente y cada una de las componentes es relevante en el sistema, es decir, para cada componente $c_i \in \mathcal{C}$ existe un estado $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ de las componentes y dos niveles diferentes $j, k \in \mathcal{S}_i$ de forma que $\phi(\mathbf{a}_{i,j}) \neq \phi(\mathbf{a}_{i,k})$, donde $\mathbf{a}_{i,l} = (a_1, \dots, a_{i-1}, l, a_{i+1}, \dots, a_n)$.

La coherencia de un sistema nos dice básicamente que, dado un estado de las componentes en el que el sistema funciona, si alguno de esos estados mejora, entonces el sistema no puede fallar. También se puede ver de forma contraria: dado un estado de las componentes en el que el sistema falla, si el estado de cualesquiera de las componentes empeora, el sistema continuará fallando. Además, también nos dice que no hay ninguna componente que sobre o, lo que es lo mismo, que el sistema cambiaría si alguna de las componentes no estuviese. Nuestro trabajo está enfocado a los sistemas coherentes porque, como veremos cuando presentemos el método algebraico (sección 3), esta propiedad de coherencia es la que nos va a permitir trabajar con ideales monomiales.

Ejemplo 1.4. Sea $S = (\mathcal{C}, \phi)$ el sistema de la figura 1. El conjunto de componentes es $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$. Para cada una de las componentes c_i definimos su conjunto de posibles estados $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_4 = \{0, 1, 2\}$ y $\mathcal{S}_2 = \{0, 1\}$. El conjunto de posibles estados del sistema es $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$. Es decir, $S = (\mathcal{C}, \phi)$ es un sistema multiestado con componentes multiestado. En particular, las componentes c_1, c_3 y c_4 son multiestado mientras que la componente c_2 es binaria.

La función de estructura del sistema es

$$\phi(\mathbf{x}) = \max \left\{ c_4, \min \{ c_1, \max \{ c_2, c_3 \} \} \right\}.$$

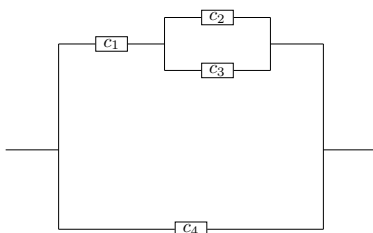


Figura 1: Sistema series-paralelo del ejemplo 1.4

Si, por ejemplo, tomamos el estado de las componentes $(2, 0, 1, 0)$ (es decir, la componente c_1 está en estado 2, la componente c_2 está en estado 0, la componente c_3 está en estado 1 y la componente c_4 está en estado 0), tenemos que $\phi(2, 0, 1, 0) = 1$ o, lo que es lo mismo, que el sistema está funcionando a nivel 1.

DEFINICIÓN 1.5. Sea $S = (C, \phi)$ un sistema cuyo conjunto de posibles estados es $\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, m\}$, y sea $j \in \mathcal{S}$. Diremos que la n -tupla $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ es

1. un j -camino del sistema si $\phi(\mathbf{x}) \geq j$. El conjunto de todos los estados de las componentes \mathbf{x} tales que $\phi(\mathbf{x}) \geq j$ se denomina *conjunto de j -caminos de S* y lo denotaremos por $\mathcal{F}_{S,j}^P$.
2. un j -camino mínimo del sistema si $\mathbf{x} \in \mathcal{F}_{S,j}^P$ y una disminución del nivel de funcionamiento de cualquiera de las componentes provoca que el sistema funcione en un estado $j' < j$. El *conjunto de j -caminos mínimos de S* se denota por $\overline{\mathcal{F}}_{S,j}^P$.
3. un j -corte del sistema si $\phi(\mathbf{x}) < j$. El conjunto de todos los estados de las componentes \mathbf{x} tales que $\phi(\mathbf{x}) < j$ se denomina *conjunto de j -cortes de S* y lo denotaremos por $\mathcal{F}_{S,j}^C$.
4. un j -corte mínimo del sistema si $\mathbf{x} \in \mathcal{F}_{S,j}^C$ y un aumento del nivel de funcionamiento de cualquiera de las componentes provoca que el sistema funcione en un estado $j' > j$. El *conjunto de j -cortes mínimos de S* se denota por $\overline{\mathcal{F}}_{S,j}^C$.

Salvo que digamos lo contrario, trabajaremos con caminos y, por ello, abusaremos de la notación y emplearemos $\mathcal{F}_{S,j}$ para referirnos a $\mathcal{F}_{S,j}^P$.

Cabe destacar que, cuando trabajamos con sistemas binarios, solo distinguimos entre camino y corte al existir únicamente dos posibles estados.

Ejemplo 1.6. En el ejemplo 1.4

- la tupla $(2, 0, 1, 0)$ es un 1-camino del sistema.
- $(0, 0, 0, 2)$ es un 2-camino mínimo del sistema. Obsérvese que $\phi(0, 0, 0, 2) = 2$ pero si disminuimos el estado de la única componente en la que es posible (es decir, la componente 4 pasaría de estar en estado 2 a estado 1), el sistema ya no estaría en estado 2.
- la tupla $(1, 1, 2, 1)$ es un 2-corte mínimo. Si aumentamos la componente 1 o la componente 4 (que son las únicas que podrían subir de nivel de funcionamiento), el sistema pasa de estar en estado 1 a estado 2.

De hecho, todos los posibles j -caminos mínimos están recogidos en el cuadro 1.

1-caminos mínimos	2-caminos mínimos
(1,1,0,0)	(0,0,0,2)
(0,0,0,1)	(2,0,2,0)
(1,0,1,0)	

Cuadro 1: 1-caminos mínimos y 2-caminos mínimos del ejemplo 1.4

DEFINICIÓN 1.7. Sea $S = (\mathcal{C}, \phi)$ un sistema multiestado tal que puede alcanzar $m + 1$ estados diferentes. Para cada $0 \leq j \leq m$, la j -fiabilidad de S es la probabilidad de que el sistema esté en estado j o superior.

Notemos que, si trabajamos con sistemas binarios, en la definición 1.7, $m = 1$. Por lo tanto, tendremos la 0-fiabilidad que es, básicamente, la probabilidad de que el sistema esté en estado mayor o igual que 0 (que es 1), y la 1-fiabilidad, que es la probabilidad de que funcione en estado mayor o igual que 1. Como un sistema binario únicamente tiene esos dos estados, la 1-fiabilidad es la probabilidad de que el sistema funcione. Por lo tanto, en un sistema binario no especificaremos que trabajamos con 1-fiabilidad, simplemente hablaremos de fiabilidad.

Para ser capaces de calcular la fiabilidad de un sistema S necesitamos conocer la probabilidad de funcionamiento o fallo de cada una de las componentes del sistema. Decimos que las componentes del sistema son

- *Independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d)* cuando todas las componentes tienen la misma probabilidad de fallo/funcionamiento y sus estados no dependen de los estados de otras componentes.
- *Independientes y no idénticamente distribuidas* cuando las componentes tienen diferente probabilidad de fallo/funcionamiento y sus estados no dependen de los estados de otras componentes.
- *Dependientes e idénticamente distribuidas* cuando todas las componentes tienen la misma probabilidad de fallo/funcionamiento y sus estados de funcionamiento dependen de los estados de funcionamiento/fallo de otras componentes.
- *Dependientes y no idénticamente distribuidas* cuando las probabilidades de fallo/funcionamiento son diferentes y sus estados dependen de los estados de otras componentes.

Con todas estas definiciones, solo nos faltarían las herramientas para poder calcular, en la sección 3, la j -fiabilidad (y cotas) de un sistema (tanto binario como multiestado) usando ideales monomiales.

2. HERRAMIENTAS BÁSICAS

Las herramientas que vamos a presentar en esta sección son los ideales monomiales, las series de Hilbert, las resoluciones y los árboles de Mayer-Vietoris.

2.1. IDEALES MONOMIALES

Los ideales monomiales son los encargados de relacionar el álgebra con la teoría de la fiabilidad: un sistema coherente tiene un (o más) ideal monomial asociado. Esta relación la exploraremos en profundidad en la sección 3.

En este pequeño apartado vamos a recordar qué es un ideal monomial y alguna propiedad importante sobre ellos.

Sea \mathbb{k} un cuerpo y $R = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ el anillo de polinomios en n variables sobre \mathbb{k} . Sea $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$. Un *monomio* en R es un producto $\mathbf{u} = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$, denotado por $\mathbf{u} = \mathbf{x}^{\mathbf{a}}$. La n -tupla \mathbf{a} se denomina *multigrado* del monomio \mathbf{u} . Si $\mathbf{a} \in \{0, 1\}^n$ diremos que \mathbf{u} es un *monomio libre de cuadrados*. Los monomios satisfacen que $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{b}} = \mathbf{x}^{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$, donde la suma es componente a componente.

DEFINICIÓN 2.1. Un ideal $I \subseteq R$ generado por monomios (libres de cuadrados) se dice que es un *ideal monomial (libre de cuadrados)*.

Sea I un ideal de R . Recordemos que el conjunto $\{g_1, \dots, g_s\}$ es un conjunto de generadores de I , y se dice que I es un ideal *finitamente generado*, si cada $g \in I$ se puede escribir como $g = \sum_{i=1}^s a_i g_i$, donde cada $a_i \in R$. Sabemos que un ideal monomial siempre está finitamente generado.

LEMA 2.2. (Lema de Dickson) *Sea $I = \langle \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \text{ t.q. } \mathbf{a} \in A \rangle \subseteq \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal monomial. Entonces, I se puede escribir de la forma $I = \langle \mathbf{x}^{\mathbf{a}(1)}, \dots, \mathbf{x}^{\mathbf{a}(s)} \rangle$, donde $\mathbf{a}(1), \dots, \mathbf{a}(s) \in A$. En particular, I tiene un conjunto de generadores finito.*

En el caso de los ideales monomiales sabemos además que existe un conjunto de generadores mínimo:

PROPOSICIÓN 2.3. *Todo ideal monomial I tiene un conjunto mínimo de generadores. En particular, sea $G(I)$ el conjunto de monomios en I que son mínimos en términos de divisibilidad. Entonces, $G(I)$ es el único conjunto de generadores mínimo de I .*

Sabemos también que, si $I, J \in R = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ son dos ideales monomiales, entonces se tiene que:

- $I \cup J$ es un ideal monomial.
- $I \cap J$ también es un ideal monomial.
- $I : J = \{f \in R \text{ t.q. } fg \in I, \forall g \in J\}$ también es monomial.
- El radical y la saturación de un ideal monomial, también son monomiales.

2.2. RESOLUCIONES Y SERIES DE HILBERT

2.2.1. RESOLUCIONES

Todo ideal $I \in R = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ tiene una estructura de R -módulo. Hay módulos que no son libres o, lo que es lo mismo, existen módulos cuyos generadores tienen relaciones entre sí. Sea $M = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ un R -módulo. El submódulo generado por las relaciones existentes entre los generadores f_1, \dots, f_m del módulo M se denota

por $\text{Syz}(f_1, \dots, f_m)$ y se denomina *módulo de las primeras sizigias* de M (o *primer módulo de sizigias* de M). Entre los generadores del módulo de sizigias pueden existir también relaciones, y al módulo que generan se le denomina *segundo módulo de sizigias* de M . Reiterando el proceso, podemos llegar a calcular el *i -ésimo módulo de sizigias*, para $i \in \mathbb{N}$. El conjunto formado por el módulo M y sus módulos de sizigias son los objetos clave para describir una sucesión exacta llamada *resolución libre* de M .

DEFINICIÓN 2.4. Sea M un R -módulo. Una *resolución libre* de M es una sucesión exacta de la forma

$$\dots \rightarrow \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{F}_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \rightarrow 0,$$

donde cada $\mathcal{F}_i \cong R^{m_i}$ es un R -módulo libre. Si existe un s tal que $\mathcal{F}_s \neq 0$ pero $\mathcal{F}_{s+1} = \mathcal{F}_{s+2} = \dots = 0$, entonces decimos que la resolución es *finita de longitud s* .

El teorema de las sizigias de Hilbert nos proporciona una cota superior para la longitud de un módulo finitamente generado:

TEOREMA 2.5 (Teorema de las sizigias de Hilbert). *Sea $R = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$. Todo R -módulo finitamente generado tiene una resolución libre de longitud, a lo mucho, n .*

Este teorema es especialmente importante para nosotros puesto que un ideal monomial es, en particular, un módulo finitamente generado.

2.2.2. RESOLUCIONES GRADUADAS

Cuando añadimos graduación a un anillo de polinomios, aparece la noción de minimalidad. En nuestro estudio es de gran relevancia conocer si un determinado ideal tiene resolución mínima libre, puesto que con ella podremos obtener las mejores cotas (a través de nuestro método) y los mejores resultados a la hora de calcular la fiabilidad de un sistema. Veremos más adelante que para calcular la fiabilidad no vamos a necesitar toda la información proporcionada por una resolución, sino que será suficiente con uno de sus invariantes llamado los números de Betti.

DEFINICIÓN 2.6. Un *módulo graduado* sobre $R = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ es un R -módulo M con una familia de subgrupos $\{M_t \text{ t.q. } t \in \mathbb{Z}\}$ del grupo aditivo de M . Los elementos de M_t se denominan *elementos homogéneos de grado t* en la graduación. Los M_t deben satisfacer:

- $M = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} M_t$,
- $R_m M_t \subseteq M_{m+t}$, donde $R_m \subset R$ denota el conjunto de los polinomios homogéneos de grado m .

Para poder definir una resolución graduada, necesitamos el concepto de homomorfismo graduado:

DEFINICIÓN 2.7. Sean M y N dos R -módulos graduados. Un homomorfismo $\varphi : M \rightarrow N$ se dice que es *graduado de grado d* si $\varphi(M_t) \subseteq N_{t+d}$, para todo $t \in \mathbb{Z}$.

DEFINICIÓN 2.8. Si M es un R -módulo graduado, entonces una *resolución graduada* de M es una resolución de la forma

$$\cdots \rightarrow \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{F}_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \rightarrow 0,$$

donde cada $\mathcal{F}_i \cong R(-d_1) \oplus \cdots \oplus R(-d_p)$ y $R(-d_j)$ es el R -módulo graduado R , pero con el grado de sus elementos desplazado hacia abajo en d_j . Es decir, los elementos de grado m en el j -ésimo factor de \mathcal{F}_i pasan a ser de grado $m - d_j$. Además, cada homomorfismo φ_i es un homomorfismo graduado de grado 0, lo que hace que se preserve la estructura de graduación.

Ejemplo 2.9. Sea I el ideal monomial cuyo conjunto mínimo de generadores es $G(I) = \{x^2, xy, y^2\}$. Una resolución para este ideal es

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{\varphi_2} R^3 \xrightarrow{\varphi_1} R^3 \xrightarrow{\varphi_0} I \rightarrow 0,$$

donde los homomorfismos φ_i , para $i \in \{0, 1, 2\}$, están definidos por las matrices

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} x^2 & xy & y^2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_1 = \begin{pmatrix} y & y^2 & 0 \\ -x & 0 & y \\ 0 & -x^2 & -x \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} y \\ -1 \\ x \end{pmatrix}.$$

Se puede comprobar que $\varphi_0\varphi_1 = 0$ y $\varphi_1\varphi_2 = 0$. Además, esta resolución puede escribirse como resolución graduada de la siguiente forma:

$$0 \rightarrow R(-4) \xrightarrow{\varphi_2} R(-3) \oplus R(-4) \oplus R(-3) \xrightarrow{\varphi_1} R(-2)^3 \xrightarrow{\varphi_0} I \rightarrow 0.$$

Gracias al teorema de las sizigias graduadas de Hilbert, tenemos una cota superior para la longitud de esta resolución:

TEOREMA 2.10. *Sea $R = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$. Todo R -módulo graduado finitamente generado tiene una resolución graduada finita de longitud, a lo sumo, n .*

Hemos adelantado que, al introducir una graduación en el anillo de polinomios, añadíamos el concepto de minimalidad:

DEFINICIÓN 2.11. Supongamos que

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_s \xrightarrow{\varphi_s} \mathcal{F}_{s-1} \cdots \xrightarrow{\varphi_3} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{F}_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \rightarrow 0$$

es una resolución graduada de M . Diremos que la resolución es *mínima* si para cada $s \geq i \geq 1$, todas las entradas no nulas de la matriz graduada de φ_i tienen grado positivo (es decir, no hay constantes en la matriz graduada).

Ejemplo 2.12. Si nos fijamos en el ejemplo anterior, tenemos que la resolución no es mínima porque φ_2 tiene un elemento no nulo que es de grado 0 (una constante). Si miramos las diferenciales con cuidado, podemos observar que φ_1 tiene una columna que es combinación lineal de las otras dos: $2^a \text{col.} = y \cdot 1^a \text{col.} + x \cdot 3^a \text{col.}$ Esto significa que la segunda columna puede desaparecer junto con la columna única de φ_2 . Así, una resolución graduada mínima para el ideal $I = \langle x^2, xy, y^2 \rangle$ es

$$0 \rightarrow R(-3)^2 \xrightarrow{\varphi_1} R(-2)^3 \xrightarrow{\varphi_0} I \rightarrow 0,$$

donde los homomorfismos φ_i para $i = 0, 1$ están ahora definidos por las matrices

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} x^2 & xy & y^2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_1 = \begin{pmatrix} y & 0 \\ -x & y \\ 0 & -x \end{pmatrix}.$$

Una forma de caracterizar las resoluciones mínimas es usando la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 2.13. *La resolución*

$$\cdots \rightarrow \mathcal{F}_s \xrightarrow{\varphi_s} \mathcal{F}_{s-1} \cdots \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{F}_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \rightarrow 0$$

es mínima si, y solo si, para cada $i \geq 0$, φ_i lleva la base estándar de \mathcal{F}_i al conjunto mínimo de generadores de $\text{Im}(\varphi_i)$.

Cuando trabajamos con resoluciones mínimas, tenemos que

$$\mathcal{F}_i = \bigoplus_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} R^{\beta_{i,\mathbf{a}}}(-\mathbf{a}).$$

Cada uno de los rangos $\beta_{i,\mathbf{a}}$ que aparecen en una resolución mínima, y que podríamos denotar por $\beta_{i,\mathbf{a}}(-\mathbf{a})(M)$, es un invariante llamado *i -ésimo número de Betti del R -módulo multigraduado M en el multigrado \mathbf{a}* , donde un R -módulo se dice *multigraduado* si $M \cong \bigoplus M_{\mathbf{b}}$, con $M_{\mathbf{b}} = M_{b_1, \dots, b_n}$ para $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$, y $R_{\mathbf{a}}M_{\mathbf{b}} \subset M_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$.

Nota 2.14. Cuando \mathbf{a} no es multigraduado, sino que es simplemente graduado, los $\beta_{i,\mathbf{a}}$ se denominan *números de Betti graduados*.

Los números de Betti siempre satisfacen que $\beta_{i,\mathbf{a}} \leq \gamma_{i,\mathbf{a}}$, donde $\gamma_{i,\mathbf{a}}$ son los rangos de $R^{\gamma_{i,\mathbf{a}}}$ en una resolución no necesariamente mínima de M . Cuando M es un módulo graduado y, en particular, cuando M es un ideal monomial, $\beta_{i,\mathbf{a}}(I)$ mide el número de generadores mínimos en multigrado \mathbf{a} en el i -ésimo módulo de sizigias de I .

Terminamos este apartado con el siguiente resultado

TEOREMA 2.15. *Dos resoluciones mínimas del módulo M son isomorfas.*

2.2.3. SERIES DE HILBERT

La serie de Hilbert es una herramienta que nos va a permitir enumerar los monomios que pertenecen a un ideal monomial.

DEFINICIÓN 2.16. La *serie multigraduada de Hilbert* de un R -módulo multigraduado finitamente generado es la serie formal

$$HS_M(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}_0^n} \dim_{\mathbb{k}}(M_{\mathbf{a}})\mathbf{x}^{\mathbf{a}},$$

donde $\dim_{\mathbb{k}}(M_{\mathbf{a}})$ es la dimensión de $M_{\mathbf{a}}$ como \mathbb{k} -espacio vectorial.

Nota 2.17. En el anillo $\mathbb{Z}[[x_1, \dots, x_n]]$ el elemento $1 - x_i$ tiene elemento inverso, dado por la serie

$$\frac{1}{1 - x_i} = 1 + x_i + x_i^2 + x_i^3 + \dots$$

La serie multigradaada de Hilbert del anillo polinómico completo $R = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ es un elemento de $\mathbb{Z}[[x_1, \dots, x_n]]$, que es la suma formal de todos los monomios de R . Tenemos así que

$$HS_R(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - x_i}.$$

Sea $R(-\mathbf{a})$ el R -módulo graduado libre generado en multigrado \mathbf{a} . Luego $R(-\mathbf{a}) \cong \langle \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \rangle$ como módulos multigradaados. La serie multigradaada de Hilbert de esta traslación de R es

$$HS_{R(-\mathbf{a})}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \cdot HS_R(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}}{\prod_{i=1}^n 1 - x_i}.$$

Nota 2.18. Si I es un ideal monomial, la serie multigradaada de Hilbert de R/I es la suma de todos los monomios que no están en I .

Nota 2.19. La serie multigradaada de Hilbert de un ideal monomial se puede expresar como

$$HS_M(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{K}_M(\mathbf{x})}{\prod_{i=1}^n 1 - x_i},$$

donde $\mathcal{K}_M(\mathbf{x})$ es conocido como el \mathcal{K} -polinomio de M o *numerador de la serie de Hilbert*, HN_M .

Para alcanzar nuestro objetivo de calcular la fiabilidad de un sistema, el numerador de la serie de Hilbert va a jugar un papel esencial.

Una buena forma de calcular la serie multigradaada de Hilbert de un ideal monomial es usando una resolución del ideal. Ya hemos visto que una resolución multigradaada de un ideal monomial I es una colección de módulos \mathcal{F}_i , con $i \geq 0$, junto con homomorfismos $\varphi_i : \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}_{i-1}$ para $i > 0$ y un homomorfismo $\varphi_0 : \mathcal{F}_0 \rightarrow I$, que expresan la estructura del ideal. Para cualquier resolución del ideal monomial I , tenemos que

$$HS_I(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^d (-1)^i HS(\mathcal{F}_i; \mathbf{x}),$$

donde \mathcal{F}_i , con $i = 0, \dots, d$ son los módulos distintos de cero que aparecen en la resolución de I .

Las resoluciones con las que estamos trabajando son multigradaadas, por lo que cada uno de los $\mathcal{F}_i = \bigoplus_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}_0^n} R(-\mathbf{a})^{\gamma_{i,\mathbf{a}}}$, para ciertos escalares $\gamma_{i,\mathbf{a}}$. Tenemos entonces que

$$HS_I(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=0}^d (-1)^i \left(\sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}_0^n} \gamma_{i,\mathbf{a}} \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \right)}{\prod_{j=1}^n (1 - x_j)}.$$

Nota 2.20. Recordemos que, si la resolución es mínima, los números de Betti, $\beta_{i,\mathbf{a}}$, satisfacen que $\beta_{i,\mathbf{a}} \leq \gamma_{i,\mathbf{a}}$ para cualquier i . La serie multigrada de Hilbert tiene, entonces, la siguiente forma:

$$HS_I(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=0}^d (-1)^i \left(\sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}_0^n} \beta_{i,\mathbf{a}} \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \right)}{\prod_{j=1}^n (1 - x_j)}.$$

Como ya hemos señalado, los números de Betti son muy importantes en nuestro trabajo porque van a proporcionarnos las cotas más óptimas (de las obtenidas con nuestro método) porque se elimina redundancia en HN_M .

2.3. ÁRBOLES DE MAYER-VIETORIS

Hemos dicho en el apartado anterior que, en general, no vamos a necesitar calcular una resolución (mínima) de un ideal por completo. Lo que nos interesará van a ser los rangos de dicha resolución (mínima) para poder calcular el numerador de la serie de Hilbert.

Los árboles de Mayer-Vietoris (*MVT*) son una herramienta que puede considerarse como una descripción de un ideal junto con la parte relevante de su *m.c.m.-retículo* —los mínimos comunes múltiplos de los subconjuntos de generadores del ideal, con el orden parcial dado por la divisibilidad— o como un algoritmo que nos ayuda a calcular invariantes homológicos del ideal. En este apartado vamos a ver cómo podemos utilizar el *MVT* de un ideal monomial I para calcular los rangos de una resolución de I o, si existe la resolución mínima, sus números de Betti.

Para profundizar en el estudio de *MVT* de un ideal monomial I , se recomienda ver [15].

Sea $I \subseteq R = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal monomial cuyo conjunto de generadores mínimo es $G(I) = \{m_1, \dots, m_r\}$. Sea $I_j = \langle m_1, \dots, m_j \rangle$ para cualquier $j < r$ e $\tilde{I} = I_{r-1} \cap \langle m_r \rangle = \langle m_{1,r}, m_{2,r}, \dots, m_{r-1,r} \rangle$, donde $m_{i,j} = \text{mcm}(m_i, m_j)$.

DEFINICIÓN 2.21. Dado un ideal monomial $I \subseteq R = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ cuyo conjunto de generadores mínimos es $G(I) = \{m_1, \dots, m_r\}$, definimos la *sucesión exacta (recursiva) de Mayer-Vietoris de I* de la siguiente forma. Partiendo de $I_0 = (0)$, para cada $1 \leq s \leq r$ tenemos la siguiente sucesión exacta de ideales:

$$0 \rightarrow \tilde{I}_s \rightarrow I_{s-1} \oplus \langle m_s \rangle \rightarrow I_s \rightarrow 0.$$

Nota 2.22. La construcción del *MVT* de un ideal monomial I depende de como elegimos el monomio distinguido que usamos para partir el ideal. Este monomio se denomina *pivote*.

Para un ideal monomial I y un orden en los generadores tenemos diferentes árboles dependiendo de cómo elegimos el pivote.

Ya hemos adelantado que los *MVT* se pueden emplear para calcular algunos invariantes homológicos de un ideal monomial. Para calcular el *MVT* de un ideal monomial I tenemos que I es la raíz del árbol. Cada nodo J del árbol tendrá dos hijos, un hijo \tilde{J} por la izquierda y un hijo J' por la derecha (si J está generado

por r monomios, entonces, con la notación de la definición 2.21, \tilde{J} representa a \tilde{J}_r y $J' = J_{r-1}$). Este árbol es al que denominamos *árbol de Mayer-Vietoris del ideal I* y lo denotamos por $MVT(I)$.

Para leer información de un MVT necesitamos asignar índices de posicionamiento a cada uno de los nodos:

- I tiene posición 1.
- Si J tiene posición p , entonces \tilde{J} tiene posición $2p$ y J' tiene posición $2p + 1$.

Vamos a emplear la siguiente notación:

$$MVT_1(I) = I, \quad MVT_p(I) = J, \quad MVT_{2p}(I) = \tilde{J} \text{ y } MVT_{2p+1}(I) = J'.$$

Dado un ideal monomial I , todos los multigrados $\mathbf{a} \in \mathbb{N}_0^n$ tales que $\beta_{i,\mathbf{a}}(I) \neq 0$ están presentes como exponentes de los generadores en alguno de los nodos del $MVT(I)$. En general, obtendremos todos los multigrados de los generadores $\gamma_{i,\mathbf{a}}(I)$ de una resolución no mínima de I . Bajo algunas circunstancias, sí se obtienen exactamente los números de Betti del ideal, cf. [15]. Los únicos multigrados que aparecen en $MVT(I)$ y que son relevantes para el cálculo de la homología de I son aquellos que están en posición 1 (para la que obtenemos H_0) o par. El grado de homología al que contribuyen se puede leer de la posición en el árbol. Para ello, vamos a asignar dimensión a cada uno de los nodos de $MVT(I)$ del siguiente modo:

- $\dim(MVT_1(I)) = 0$.
- Si $\dim(MVT_p(I)) = d$, entonces

$$\dim(MVT_{2p}(I)) = d + 1 \text{ y } \dim(MVT_{2p+1}(I)) = d.$$

Para leer los números de Betti de un MVT tenemos que $\beta_{i,\mathbf{a}}$ es el número de monomios en nodos en dimensión i , posición 1 o par en el árbol y con (multi)grado \mathbf{a} . *Ejemplo 2.23.* Vamos a calcular el MVT del ideal monomial

$$I = \langle x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5 \rangle \subseteq \mathbb{k}[x_1, \dots, x_5].$$

Dicho MVT está expuesto en la figura 2, con los nodos relevantes en **negrita**, y cada nodo está escrito de la forma (**posición, dimensión**) **generadores**.

De este árbol podemos obtener los números de Betti graduados, que son $\beta_{0,2}(I) = 4$, $\beta_{1,3}(I) = 3$, $\beta_{1,4}(I) = 1$ y $\beta_{2,5}(I) = 1$. Además, el numerador de la serie de Hilbert del ideal es

$$\begin{aligned} HN_{I,5} &= (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5) \\ &\quad - (x_1x_2x_4x_5 + x_3x_4x_5 + x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3) \\ &\quad + x_1x_2x_3x_4x_5 \end{aligned}$$

También podemos obtener los números de Betti multigraduados, que son:

$$\begin{aligned} \beta_{0,(1,1,0,0,0)}(I) &= \beta_{0,(0,1,1,0,0)}(I) = \beta_{0,(0,0,1,1,0)}(I) = \beta_{0,(0,0,0,1,1)}(I) = 1, \\ \beta_{1,(1,1,1,0,0)}(I) &= \beta_{1,(0,1,1,1,0)}(I) = \beta_{1,(0,0,1,1,1)}(I) = \beta_{1,(1,1,0,1,1)}(I) = 1, \\ \beta_{2,(1,1,1,1,1)}(I) &= 1. \end{aligned}$$

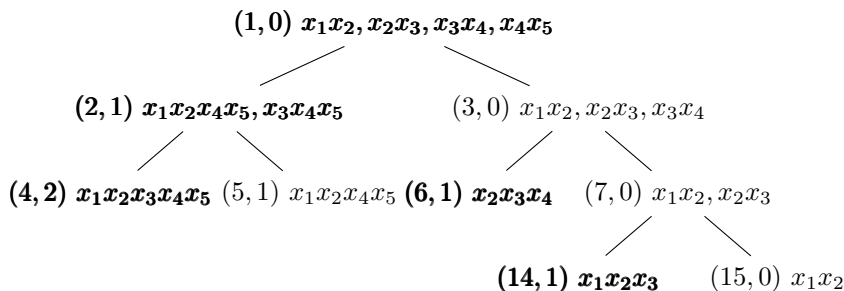


Figura 2: *MVT* del ideal monomial $I = \langle x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5 \rangle \subseteq \mathbb{k}[x_1, \dots, x_5]$.

Ya hemos dicho que el *MVT* da los rangos para una resolución de un ideal monomial I . Dependiendo, por ejemplo, de cómo ordenemos los generadores, obtendremos los rangos de una resolución o de otra. Con ellos, siempre podremos escribir el numerador de la serie de Hilbert del ideal. Sin embargo, no siempre es seguro que vayamos a obtener los números de Betti (es decir, los rangos de la resolución mínima de I). Sí que podemos asegurar que si no existen generadores repetidos en los nodos relevantes de un *MVT* de dimensiones contiguas, obtendremos los números de Betti del ideal (y, por tanto, los rangos de la resolución mínima del mismo).

3. MÉTODO ALGEBRAICO

En la sección 1 ya hemos dado la definición de sistema coherente multiestado y hemos terminado explicando lo que son los j -caminos (mínimos) y los j -cortes (mínimos).

Sea $S = (\mathcal{C}, \phi)$ un sistema multiestado de n componentes y que puede alcanzar $m + 1$ niveles de funcionamiento diferentes.

DEFINICIÓN 3.1. Para cada $0 \leq j \leq m$, la j -fiabilidad del sistema S , denotada por $\mathbf{R}_{S,j}$, es la probabilidad de que el sistema este funcionando, al menos, a nivel j .

Vamos a ver cómo podemos emplear el método algebraico para calcular las diferentes j -fiabilidades del sistema S .

Consideremos de nuevo $R = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ un anillo de polinomios sobre el cuerpo \mathbb{k} . Cada tupla $s_1, \dots, s_n \in \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_n$ se corresponde con un monomio $x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n}$ en R . Por la propiedad de coherencia del sistema tenemos que los elementos de $\mathcal{F}_{S,j}$ se corresponden con un ideal monomial en R , denotado por $I_{S,j}$. El conjunto de generadores mínimo de $I_{S,j}$ está compuesto por los monomios correspondientes a los elementos de $\overline{\mathcal{F}}_{S,j}$. Por lo tanto, obtener los j -caminos mínimos de S es equivalente a calcular el conjunto de generadores mínimo de $I_{S,j}$.

Ejemplo 3.2. Imaginemos que tenemos el sistema binario S (representado en la figura 3), con dos componentes, cuya función de estructura es $\phi(\mathbf{x}) = \max\{x_1, x_2\}$. Su ideal de 1-fiabilidad es $I_{S,1} = \langle x_1, x_2 \rangle$.

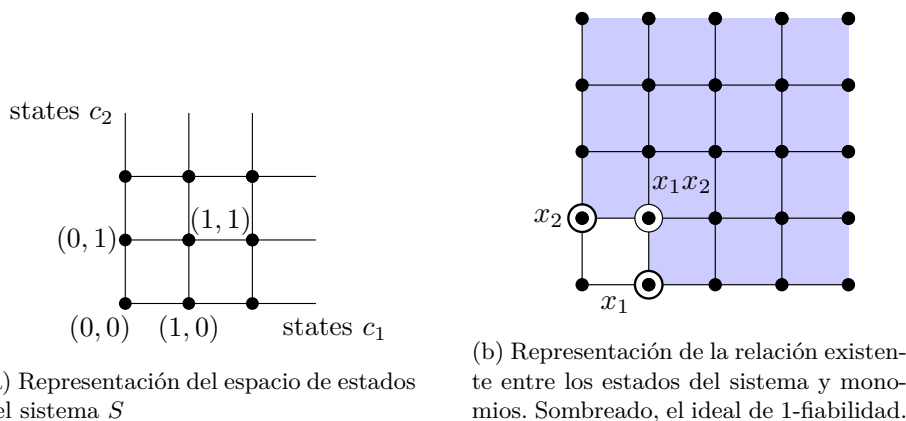


Figura 3: Representación gráfica del ejemplo 3.2.

DEFINICIÓN 3.3. Sea S un sistema multiestado que puede alcanzar $m + 1$ niveles de funcionamiento diferentes. Para cada $0 \leq j \leq m$, el ideal monomial $I_{S,j}$ definido anteriormente se denomina *ideal de j -fiabilidad del sistema*.

Con estas definiciones tenemos las herramientas necesarias para calcular la j -fiabilidad de un sistema S . En la sección 2 ya vimos que el numerador de la serie de Hilbert de un ideal monomial nos proporciona una fórmula, en términos de x_1, \dots, x_n , que enumera todos los monomios en un ideal monomial. Por lo tanto, el numerador de la serie de Hilbert de $I_{S,j}$, $HN_{I_{S,j}}$, enumera todos los monomios de $I_{S,j}$ o, lo que es lo mismo, todos los monomios que se corresponden con los estados de $\mathcal{F}_{S,j}$. Para todo monomio $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ en $HN_{I_{S,j}}$ sustituimos cada $x_i^{a_i}$ por p_{i,a_i} —la probabilidad de que la componente i esté funcionando, al menos, a nivel a_i —, y la probabilidad del monomio será la probabilidad conjunta de que cada una de sus variables esté funcionando al menos al nivel de su exponente. En el caso en el que las probabilidades sean independientes, esta probabilidad conjunta viene dada por

$$pr(x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}) = \prod_{i=1}^n p_{i,a_i}.$$

Nosotros consideraremos que trabajamos siempre con probabilidades independientes. Usando estas sustituciones obtenemos por tanto la probabilidad de j -funcionamiento del sistema, es decir, la j -fiabilidad del mismo.

Recordemos de la sección anterior que podíamos escribir el numerador de la serie de Hilbert de varias formas. En particular, si está escrita como la suma alternada de los rangos de una resolución, es decir,

$$HN_{I_{S,j}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^d (-1)^i \left(\sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}_0^n} \gamma_{i,\mathbf{a}} \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \right),$$

donde $\gamma_{i,\mathbf{a}}$ es el rango del i -ésimo módulo en multigrado \mathbf{a} y d es la longitud de la resolución, truncando en cada uno de los sumandos somos capaces de obtener cotas

para la j -fiabilidad. Escrito matemáticamente, los truncamientos quedarían así:

$$\mathbf{R}_{S,j} \leq \sum_{i=0}^k (-1)^i \left(\sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}_0^n} \gamma_{i,\mathbf{a}} \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \right) \text{ para } k = 0 \text{ o } k \text{ par,}$$

$$\mathbf{R}_{S,j} \geq \sum_{i=0}^k (-1)^i \left(\sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}_0^n} \gamma_{i,\mathbf{a}} \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \right) \text{ para } k \text{ impar.}$$

Cuando la resolución es mínima, es decir, cuando los rangos de la resolución son los números de Betti, al truncar en $HN_{I_{S,j}}$ obtenemos las mejores cotas posibles con este método.

Un resumen algorítmico del método algebraico sería:

- 1) Asociamos al sistema S sus ideales $I_{S,j}$ de j -fiabilidad.
- 2) Obtenemos el conjunto de generadores mínimo de $I_{S,j}$ para obtener del conjunto de j -caminos (respectivamente j -cortes, si queremos calcular la no fiabilidad) mínimos $\overline{\mathcal{F}}_{S,j}$.
- 3) Calculamos el numerador de la serie de Hilbert de $I_{S,j}$ para obtener la j -fiabilidad (respectivamente j -no fiabilidad) de S .
- 3') Calculamos una resolución de $I_{S,j}$. La suma alternada de los rangos de la resolución proporciona una fórmula para el numerador de la serie de Hilbert que nos permite obtener cotas, truncando en cada sumando.

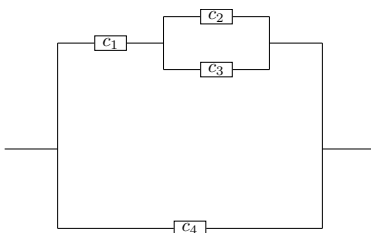


Figura 4: Sistema series-paralelo del ejemplo 1.4

1-caminos mínimos	2-caminos mínimos
(1,1,0,0)	(0,0,0,2)
(0,0,0,1)	(2,0,2,0)
(1,0,1,0)	

Cuadro 2: 1-caminos mínimos y 2-caminos mínimos del ejemplo 1.4

Ejemplo 3.4. Sea S el sistema del ejemplo 1.4 —representado de nuevo en la figura 4— y para el que conocíamos los j -caminos mínimos —volvemos a recogerlos en el cuadro 2—.

Imaginemos que las probabilidades de las componentes de dicho sistema son las siguientes:

$$\begin{array}{lll} p_{1,0} = 1 & p_{1,1} = 0.95 & p_{1,2} = 0.9 \\ p_{2,0} = 1 & p_{2,1} = 0.9 & \\ p_{3,0} = 1 & p_{3,1} = 0.9 & p_{3,2} = 0.8 \\ p_{4,0} = 1 & p_{4,1} = 0.9 & p_{4,2} = 0.85. \end{array}$$

Como ya tenemos los j -caminos mínimos para $j = 1, 2$, podemos obtener los ideales de j -fiabilidad de manera sencilla:

$$\begin{aligned} I_{S,1} &= \langle x_1x_2, x_1x_3, x_4 \rangle, \\ I_{S,2} &= \langle x_1^2x_3^2, x_4^2 \rangle. \end{aligned}$$

Una vez que ya conocemos los ideales de j -fiabilidad, lo que vamos a hacer es calcular los numeradores de la serie de Hilbert. Para ello empleamos los árboles de Mayer-Vietoris como vimos en la sección anterior, los cuales nos dan como resultado:

$$\begin{aligned} HN_{I_{S,1}} &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_4 - (x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4) + x_1x_2x_3x_4, \\ HN_{I_{S,2}} &= x_1^2x_3^2 + x_4^2 - x_1^2x_3^2x_4^2. \end{aligned}$$

Recordemos que una vez conocemos el numerador de la serie de Hilbert del ideal de j -fiabilidad es sencillo calcular la j -fiabilidad: esencialmente basta con sustituir los x_i^a por $p_{i,a}$.

Vamos a comenzar calculando la 2-fiabilidad del sistema S ya que es más sencilla:

$$\mathbf{R}_{S,2} = 0.72 + 0.85 - 0.612 = 0.9558.$$

Así, la probabilidad de que el sistema funcione en estado al menos 2 es de 0.9558.

Veamos qué ocurre cuando calculamos la 1-fiabilidad del sistema:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{S,1} &= 0.855 + 0.855 + 0.9 - (0.7695 + 0.7695 + 0.7695) + 0.69255 \\ &= 2.61 - 2.3085 + 0.69255 = 0.99405 \end{aligned}$$

Tenemos entonces la probabilidad de que el sistema funcione en estado mayor o igual que 1 y en estado mayor o igual que 2. Llegados a este punto, somos capaces de calcular la probabilidad de que funcione en estado exactamente 1 o 2, y lo denotaremos por $\mathbf{r}_{S,i}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{S,0} &= 1 - \mathbf{R}_{S,1} = 1 - 0.99405 = 0.00595, \\ \mathbf{r}_{S,1} &= \mathbf{R}_{S,1} - \mathbf{R}_{S,2} = 0.99405 - 0.9558 = 0.03825, \\ \mathbf{r}_{S,2} &= \mathbf{R}_{S,2} = 0.9558 \end{aligned}$$

Las cotas que obtendríamos para este ejemplo, truncando en el numerador de la serie de Hilbert, son las siguientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{S,1} &\geq 2.61 - 2.3085 = 0.3015, \\ \mathbf{R}_{S,1} &\leq 2.61, \\ \mathbf{R}_{S,2} &\leq 1.57 \end{aligned}$$

Como podemos observar, son cotas no demasiado buenas: para la 1-fiabilidad obtenemos como única cota superior 2.61 (por lo que es totalmente prescindible) y, como cota inferior, obtenemos 0.3015 que queda muy lejos de la probabilidad exacta que habíamos calculado; para la 2-fiabilidad solo somos capaces de calcular una cota superior que, de nuevo, no nos sirve de nada.

4. SISTEMAS k -ENTRE- n

Los sistemas k -entre- n y sus variantes (consecutivos, lineales consecutivos, circulares consecutivos. . .) son uno de los tipos de sistemas más importantes estudiados en teoría de la fiabilidad debido a su interés teórico y a su gran número de aplicaciones (ver, por ejemplo, [4, 9]).

La versión multiestado, la cual es más útil cuando tratamos de modelar situaciones de la vida cotidiana, ha sido objeto de estudio durante las últimas décadas, a partir de su primera definición en [3]. Desde entonces, varios autores (ver, por ejemplo, [6] y sus referencias) han definido estos sistemas de diversas formas y han desarrollado métodos particulares para calcular su fiabilidad.

4.1. SISTEMAS BINARIOS k -ENTRE- n

DEFINICIÓN 4.1. Un *sistema binario k -entre- n* es un sistema con n componentes que funciona si al menos k de sus n componentes están en funcionamiento.

El ideal de fiabilidad de un sistema binario k -entre- n viene dado por

$$I_{k,n} = \langle \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \text{ t.q. } \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \text{ es un monomio libre de cuadrados de grado } k \text{ en } n \text{ variables} \rangle.$$

Ejemplo 4.2. Vamos a calcular la fiabilidad de un sistema 2-entre-4 cuyas componentes tienen las siguientes probabilidades de funcionamiento: $p_{1,0} = 1$, $p_{1,1} = 0.9$, $p_{2,0} = 1$, $p_{2,1} = 0.85$, $p_{3,0} = 1$, $p_{3,1} = 0.95$, $p_{4,0} = 1$, $p_{4,1} = 0.83$.

Para este ejemplo, el ideal de fiabilidad es

$$I_{2,4} = \langle x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4 \rangle.$$

Utilizando los árboles de Mayer-Vietoris, tenemos que el numerador de la serie de Hilbert es

$$\begin{aligned} HN_{I_{2,4}} &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\ &\quad - 2(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) \\ &\quad + 3x_1x_2x_3x_4, \end{aligned}$$

y, sustituyendo las probabilidades de las componentes, tenemos los siguientes resultados:

$$\mathbf{R}_{S,1} = 4.6685 - 2 \cdot 2.78195 + 3 \cdot 0.6032025 = 0.9142075,$$

$$\mathbf{R}_{S,1} \geq 4.6685 - 2 \cdot 2.78195 = -0.8954,$$

$$\mathbf{R}_{S,1} \leq 4.6685.$$

De nuevo, las cotas aportadas por nuestro método no son muy útiles. Esto es porque el ideal no tiene suficientes generadores.

DEFINICIÓN 4.3. Un sistema binario k -entre- n consecutivo es un sistema de n componentes que funciona si, y solamente si, k componentes consecutivas funcionan.

El ideal de fiabilidad de estos sistemas es

$$J_{k,n} = \langle x_1 \cdots x_k, x_2 \cdots x_{k+1}, \dots, x_{n-k+1} \cdots x_n \rangle.$$

Ejemplo 4.4. El árbol de Mayer-Vietoris calculado en el ejemplo 2.23 corresponde al ideal de un sistema binario 2-entre-5 consecutivo.

4.2. SISTEMAS k -ENTRE- n MULTIESTADO

La primera definición de sistema k -entre- n multiestado fue propuesta en [3] por El-Newehi *et. al.*:

DEFINICIÓN 4.5 (El-Newehi *et. al.*, 1978). Un sistema S es un sistema k -entre- n multiestado si su función de estructura satisface

$$\phi(\mathbf{x}) = x_{(n-k+1)} \tag{1}$$

donde $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$ es un reordenamiento de las variables de forma que sus estados quedan en una secuencia no decreciente.

Estos sistemas también se conocen como *sistemas k -entre- n multiestado simples*.

En [2] Boedigheimer y Kapur dieron una definición ligeramente distinta. En ambas definiciones las componentes deben tener el mismo número de estados que el sistema. Los ideales de j -fiabilidad correspondientes a estas definiciones vienen dados por el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 4.6. *El ideal*

$$I_{(k,n),j} = \left\langle \prod_{\substack{\sigma \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |\sigma| = k}} x_i^j \mid i \in \sigma \right\rangle$$

es el ideal de j -fiabilidad de un sistema k -entre- n multiestado, como los definidos por El-Newehi *et. al.* en [3] y por Boedigheimer y Kapur en [2].

La generalización, en términos de ideales monomiales y permitiendo estados diferentes entre las componentes y el sistema se presenta en [13]:

DEFINICIÓN 4.7. Sea S un sistema multiestado que puede alcanzar los niveles $\{0, \dots, M\}$ y tal que la componente i tiene M_{i+1} niveles de funcionamiento $\{0, \dots, M_i\}$. Sea $n_j \leq n$ el número de componentes tales que $M_i \geq j$ para cada $j \in \{0, \dots, M\}$ (para facilitar la notación, supongamos que son las componentes $1, \dots, n_j$). S es un sistema k -entre- n multiestado si para todo $j \in \{1, \dots, M\}$ el ideal de j -fiabilidad de S , $I_{S,j}$, es de la forma

$$I_{S,j} = \left\langle \prod_{\substack{\sigma \subseteq \{1, \dots, n_j\} \\ |\sigma|=k}} x_i^j \mid i \in \sigma \right\rangle.$$

Ejemplo 4.8. Sea S un sistema multiestado tal que $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3\}$, $\mathcal{S}_1 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{S}_2 = \{0, 1, 2, 3\}$, $\mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_4 = \{0, 1, 2\}$ y $\mathcal{S}_5 = \{0, 1\}$, y sea $\phi(\mathbf{x}) = x_{(4)}$. El sistema se comporta como un sistema 2-entre-5 para los niveles $j = 1, 2, 3$ (de acuerdo con la definición de El-Newehi *et. al.*)

Los ideales de j -fiabilidad para este sistema son:

$$\begin{aligned} I_{S,1} &= \langle x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5, x_2x_3, x_2x_4, x_2x_5, x_3x_4, x_3x_5, x_4x_5 \rangle, \\ I_{S,2} &= \langle x_1^2x_2^2, x_1^2x_3^2, x_1^2x_4^2, x_2^2x_3^2, x_2^2x_4^2, x_3^2x_4^2 \rangle, \\ I_{S,3} &= \langle x_1^3x_2^3 \rangle. \end{aligned}$$

Años más tarde, Huang, Zuo y Wu definieron en [5] los sistemas k -entre- n multiestado generalizados como sigue.

DEFINICIÓN 4.9. Un sistema de n componentes se denomina *sistema k -entre- n multiestado generalizado* si, para $1 \leq j \leq M$, $\phi(\mathbf{x}) > j$ cuando existe un valor entero l ($j \leq l \leq M$) tal que al menos k_l componentes están en estado l o superior.

En la definición de los sistemas k -entre- n multiestado simples, siempre debía haber el mismo número de componentes funcionando a determinado nivel para que el sistema funcionase. En este caso, para cada nivel de funcionamiento se permite un número diferente de componentes funcionando en ese estado.

Si denotamos por ϕ la función de estructura del sistema S y por N_j el número de componentes en estado j o superior, esta definición puede ser reescrita como $\phi(S) \geq j$ si

$$\begin{aligned} N_j &\geq k_j, \\ N_{j+1} &\geq k_{j+1}, \\ &\vdots \\ N_M &\geq k_M. \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos denotar al sistema S como $S_{n,(k_1, \dots, k_M)}$. Cuando $k_1 \leq \dots \leq k_m$ el sistema se dice sistema k -entre- n multiestado generalizado *creciente*, y si $k_1 \geq \dots \geq k_m$ el sistema se dice sistema k -entre- n multiestado generalizado *decreciente*.

Para estos sistemas, también conocemos los ideales de j -fiabilidad.

PROPOSICIÓN 4.10. *El ideal de j -fiabilidad de un sistema k -entre- n multiestado generalizado $S = S_{n,(k_1,\dots,k_M)}$ viene dado por*

$$I_{S,j} = I_{n,(k_j,\dots,k_M)} = \sum_{i=j}^M I_{(k_i,n),i}.$$

Terminamos la sección realizando, en términos algebraicos, el ejemplo 8 en [5].

Ejemplo 4.11. Tenemos un sistema k -entre-3 multiestado generalizado que puede tomar cuatro estados $(0, 1, 2, 3)$ y de forma que $k_1 = 3$, $k_2 = 2$ y $k_3 = 2$. Por lo tanto, tenemos un sistema k -entre- n multiestado generalizado *decreciente*. Las probabilidades de las componentes son las siguientes: $p_{1,0} = 1$, $p_{1,1} = 0.9$, $p_{1,2} = 0.6$, $p_{1,3} = 0.4$, $p_{2,0} = 1$, $p_{2,1} = 0.9$, $p_{2,2} = 0.7$, $p_{2,3} = 0.2$, $p_{3,0} = 0.1$, $p_{3,1} = 1$, $p_{3,2} = 0.8$, $p_{3,3} = 0.3$, donde $p_{i,j}$ es la probabilidad de que la componente i funcione, al menos, a nivel j .

- Para que el sistema esté en estado 3 tiene que haber, al menos, 2 componentes en estado 3 o superior ($k_3 = 2$). Por lo tanto, el ideal de 3-fiabilidad es $I_{S,3} = \langle x^3y^3, x^3z^3, y^3z^3 \rangle$. El numerador de su serie de Hilbert viene dado por $HN_{I_{S,3}} = x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3 - 2(x^3y^3z^3)$ e, introduciendo las probabilidades de cada una de las componentes, tenemos que la probabilidad de que el sistema funcione en estado 3 o superior es $\mathbf{R}_{S,3} = 0.396$, que es, en este caso, igual a la probabilidad de que el sistema funcione, exactamente, a nivel 3: $\mathbf{r}_{S,3} = \mathbf{R}_{S,3} = 0.396$.
- El sistema estará en estado 2 o superior si al menos 2 componentes están en estado 2 o superior, luego $I_{S,2} = I_{(2,3),2} + I_{(2,3),3} = I_{(2,3),2} = \langle x^2y^2, x^2z^2, y^2z^2 \rangle$. El numerador de la serie de Hilbert es $HN_{I_{S,2}} = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 - 2(x^2y^2z^2)$ y tenemos $\mathbf{R}_{S,2} = 0.826$. Además, podemos obtener $\mathbf{r}_{S,2} = \mathbf{R}_{S,2} - \mathbf{R}_{S,3} = 0.826 - 0.396 = 0.430$.
- Como $k_1 = 3$ el sistema estará en estado 1 o superior si las tres componentes están funcionando en estado 1 o superior, o si al menos 2 componentes están en estado 2 o superior o si al menos 2 componentes están en estado 3 o superior. El ideal de 1-fiabilidad es $I_{S,1} = I_{(3,3),1} + I_{(2,3),2} + I_{(2,3),3} = I_{(3,3),1} + I_{(2,3),2} = \langle xyz, x^2y^2, x^2z^2, y^2z^2 \rangle$, $HN_{I_{S,1}} = xyz + x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 - (xy^2z^2 + x^2yz^2 + x^2y^2z)$ y obtenemos que $\mathbf{R}_{S,1} = 0.89$ y $\mathbf{r}_{S,1} = \mathbf{R}_{S,1} - \mathbf{R}_{S,2} = 0.89 - 0.826 = 0.064$.
- Finalmente, $\mathbf{r}_{S,0} = \mathbf{R}_{S,0} - \mathbf{R}_{S,1} = 1 - 0.89 = 0.11$.

Para ampliar información sobre estos sistemas y sus variantes, también estudiadas con el método algebraico, se recomiendan las referencias [11, 12, 13].

5. LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN ABIERTAS

En este artículo hemos hecho una muy breve introducción a todo el trabajo que estamos realizando. Para ampliar la información relacionada con este tema se recomiendan, entre otras, [1, 10, 11].

Actualmente estamos estudiando si el método algebraico puede ayudarnos a determinar la importancia de las componentes. Es decir, si una componente tuviese que mejorar, ¿cuál debería ser para que la fiabilidad del sistema aumente más? Nuestro método nos va a ayudar a determinar la importancia de una componente desde el punto de vista estructural, es decir, teniendo en cuenta la posición en el sistema. Una parte del estudio está desarrollada en [8]. Por otro lado, estamos viendo si los *support posets* —ver capítulo 2, sección 2.3 de [11]— puede sernos de ayuda. Además de la parte teórica y comprobar si el método es útil o no, queremos saber si, a nivel computacional, el método algebraico es *utilizable*: estamos desarrollando una clase de C++ con el software libre CoCoALib que nos diga el orden de importancia (estructural) de las componentes.

Por otro lado, y también relacionado con los *support posets*, ya estudiamos en [11] que los ideales que comparten la misma polarización, también comparten ciertas propiedades e invariantes (como los números de Betti). Tenemos como objetivo seguir investigando más propiedades compartidas.

Los sistemas k -entre- n multiestado, aunque ampliamente estudiados ya durante nuestra trayectoria de investigación, poseen más variantes en las que, quizá, el método algebraico pueda ser de ayuda.

Finalmente, también queremos estudiar la relación de los sistemas multiestado, las matroides (relación ya estudiada, entre otros, por Arne Bang Huseby) y los ideales monomiales.

Cualquier sugerencia o idea relacionada con los temas propuestos durante el artículo, serán bien recibidas en los correos electrónicos de los autores.

REFERENCIAS

- [1] A. M. BIGATTI, P. PASCUAL-ORTIGOSA Y E. SÁENZ-DE-CABEZÓN, A C++ class for multi-state algebraic reliability computations, *Reliab. Eng. Syst. Saf.* **213** (2021), 107751.
- [2] R. BOEDIGHEIMER Y K. KAPUR, Customer-driven reliability models for multistate coherent systems, *EEE Trans. Reliab.* **43** (1994), no. 1, 46–50.
- [3] E. EL-NEWEIHI, F. PROSCHAN Y J. SETHURAMAN, Multistate coherent systems, *J. Appl. Probab.* **15** (1978), no. 4, 675–688.
- [4] S. ERYILMAZ, Review of recent advances in reliability of consecutive k -out-of- n and related systems, *Proc. Inst. Mech. Eng., Part O: J. Risk Reliab.* **224** (2010), no. 3, 225–237.
- [5] J. HUANG, M. J. ZUO Y Y. WU, Generalized multi-state k -out-of- n : G systems, *IEEE Trans. Reliab.*, **49** (2000), no. 1, 105–111.
- [6] J. HUANG, M. J. ZUO Y Z. FANG, Multi-state consecutive- k -out-of- n systems, *IE Trans.*, **35** (2003), no. 6, 527–534.
- [7] J. C. HUDSON, *The structure and reliability of multistate systems with multistate components*, Tesis doctoral, Wayne State University, 1982.

- [8] R. IGLESIAS, F. MOHAMMADI, P. PASCUAL-ORTIGOSA, E. SÁENZ-DE-CABEZÓN Y H. WYNN, Stable coherent systems, <https://arxiv.org/abs/2406.00829>, 2023.
- [9] W. KUO Y M. ZUO, *Optimal reliability modelling: principles and applications*, John Wiley & sons, 2003.
- [10] F. MOHAMMADI, P. PASCUAL-ORTIGOSA, E. SÁENZ-DE-CABEZÓN Y HENRY P. WYNN, Polarization and depolarization of monomial ideals with application to multi-state system reliability, *J. Algebraic Comb.* **51** (2020), no. 4, 617–636.
- [11] P. PASCUAL-ORTIGOSA, *Algebraic Reliability. Monomial ideals applied to multi-state system reliability*, Tesis doctoral, Universidad de La Rioja, 2022.
- [12] P. PASCUAL-ORTIGOSA Y E. SÁENZ-DE-CABEZÓN, Algebraic Analysis of Variants of Multi-State k-out-of-n Systems, *Mathematics* **9** (2021), no. 17, 2042.
- [13] P. PASCUAL-ORTIGOSA, E. SÁENZ-DE-CABEZÓN Y HENRY P. WYNN, Algebraic reliability of multi-state k-out-of-n systems, *Probab. Eng. Inf. Sci.* **35** (2021), no. 4, 923–927.
- [14] P. PASCUAL-ORTIGOSA Y E. SÁENZ-DE-CABEZÓN, Support posets of some monomial ideals, *Appl. Algebra Eng. Commun. Comput* **33** (2022), no. 4, 457–475.
- [15] E. SÁENZ-DE-CABEZÓN, *Combinatorial Koszul Homology: computations and Applications*, Tesis doctoral, Universidad de La Rioja, 2008.

RODRIGO IGLESIAS, DEPARTAMENTO. DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE LA RIOJA
Correo electrónico: rodrigo.iglesias@unirioja.es

LAURA MORENO-RESA, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE LA RIOJA
Correo electrónico: laura.morenor@unirioja.es

PATRICIA PASCUAL-ORTIGOSA, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE LA RIOJA
Correo electrónico: patricia.pascualo@unirioja.es

EDUARDO SÁENZ-DE-CABEZÓN, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE LA RIOJA
Correo electrónico: eduardo.saenz-de-cabazon@unirioja.es