

Representación de estructuras ordenadas en la recta real: una visión panorámica

por

Esteban Induráin

RESUMEN. ¿Podemos convertir cualquier escala cualitativa en una cuantitativa numérica equivalente? Daremos aquí una visión panorámica del estado actual del conocimiento acerca de la representabilidad de diferentes tipos de estructuras ordenadas (llámense estas escalas cualitativas, preferencias, etcétera, según contextos) a través de otras escalas, ahora ya cuantitativas, utilizando números reales. Desde el punto de vista del análisis real, esto corresponderá a una comprensión profunda de los axiomas de la recta real que se relacionan con el orden. Por ejemplo, podemos preguntarnos para qué conjuntos totalmente ordenados $(X, \preceq)$ existe una isomorfía de orden (usualmente llamada isotonía) con un subconjunto de la recta real $\mathbb{R}$ (dotada del orden habitual $\leq$). Además de a los órdenes totales, prestaremos atención a otras estructuras ordenadas clásicas, como preórdenes completos, órdenes-intervalo y semiórdenes, comentando los resultados clave sobre su representabilidad numérica que se han obtenido en los últimos años. También se discutirán aplicaciones diversas (por ejemplo, sobre el uso de funciones de utilidad en economía).

1. INTRODUCCIÓN Y MOTIVACIÓN INICIAL (ENTRE OTRAS MUCHAS POSIBLES)

Como una primera reflexión, cabe que nos preguntemos por qué razones sucede de hecho que estudios y artículos matemáticos relativos al *orden* aparecen ciertamente muy diseminados entre revistas matemáticas de todo tipo. Bien es verdad que existe una revista especializada, llamada *Order*, fundada en 1984 y actualmente a cargo de la editorial Springer. Pero aún así, los investigadores especializados en estructuras ordenadas no siempre publican ahí, entre otras razones porque la revista tiene actualmente un índice de impacto no demasiado alto.

En mi opinión (¡quizás muy subjetiva y bastante interesada!), el *orden* podría haber constituido de inicio toda una categoría en los estudios de Matemáticas, considerando tal disciplina o área de estudio e investigación al mismo nivel que, pongamos por caso, el cálculo, el álgebra o la geometría. Sin embargo, las cuestiones relativas al orden tradicionalmente han ido apareciendo más bien dispersas e incluidas, esporádicamente en la mayoría de los casos, como parte constituyente respectiva de otros temas, como por ejemplo algebra (ej.: grupos ordenados), combinatoria o topología (ej.: topologías ordenables).

Así, de vez en cuando fueron apareciendo excelentes artículos acerca del orden, pero en revistas matemáticas de otras ramas y categorías del saber matemático. Obviamente, esta situación disminuye y oculta la visibilidad de investigaciones dedicadas al orden como marco teórico con valor intrínseco y por sí mismo.

Y aún hay más: resulta que otras disciplinas, aparentemente bastante alejadas de la matemática, se han ido interesando por los resultados teóricos clave sobre estructuras ordenadas y su representabilidad numérica. A veces se da la circunstancia de que artículos ciertamente fundamentales, y de alto nivel, con resultados bastante relevantes sobre estructuras ordenadas, ampliamente citados por los especialistas en esta materia, se publicaron en revistas que encuadraríamos en otras ciencias, en vez de en la matemática pura. Incluso más de uno, por desgracia, no las consideraría ni siquiera de matemática aplicada, sino, como quedó implícitamente dicho antes, de otras diversas ciencias (ej.: economía, computación teórica, psicología, y un largo etcétera). Insistimos una vez más en que, aun tratándose de revistas que, en puridad, no siempre llamaríamos *de matemáticas*, contienen de hecho resultados matemáticos relevantes acerca de teoría del orden.

Lamentablemente, no siempre sucede que los matemáticos puros interesados en el orden conozcan esas otras fuentes, que pueden ser clave en ciertas investigaciones acerca de estructuras ordenadas. Cabe citar, entre otras, a *Econometrica*, *Journal of Mathematical Psychology*, *Journal of Mathematical Economics*, *Mathematical Social Sciences* o *Theory and Decision*. Por cierto, más de una de ellas tiene un índice de impacto bastante superior al de muchas de las revistas de matemática pura más conocidas. Es por tanto interesante hacer una llamada a la interdisciplinariedad o, cuando menos, a la idea de tratar de conocer más fuentes posibles para las investigaciones sobre estructuras ordenadas, sin menoscabar ninguna y sin limitarse a las propias de matemática pura.

Hay además un problema añadido, del que el investigador en estos temas debe tener conocimiento. Se trata de la nomenclatura y también de la notación, que cambian sustancialmente de unos contextos a otros. Conviene estar enterado de las distintas maneras con que se denomina o denota el mismo concepto según en qué tipo de disciplina científica se esté trabajando.

Así, lo que en matemáticas llamamos isotonía o isomorfismo de órdenes, en física o química podría ser una función de entropía, en economía se llamaría función de utilidad, y en psicología matemática se denominaría medición. Un preorden completo (matemáticas) se suele denominar preferencia en contextos de economía y elección social. Las clases de equivalencia definidas por un preorden completo (matemáticas) en economía o en teoría de la decisión se llamarán clases de indiferencia de una función de utilidad, o conjuntos de indiferencia de un agente, consumidor o decisor. Y esto es solamente una pequeña muestra, pues aparecen muchos más ejemplos similares en una gran variedad de contextos.

Terminamos esta sección introductoria con una motivación, entre otras muchas posibles, que puede hacernos entender que el estudio de representaciones numéricas de estructuras ordenadas debe considerarse importante e interesante, ya que tiene aplicaciones cruciales en múltiples disciplinas. Y, por cierto, algunas de estas apli-

caciones (como la que vamos a ver ahora) son de uso práctico y cotidiano en la vida real.

Así las cosas, consideremos una situación en la que una remota tribu se da cuenta de que el uso, rendimiento y beneficio que proporciona una vaca debe ser considerado mayor que el que proporciona una oveja. Haciendo eso, la tribu ha efectuado un proceso de comparación (vaca frente a oveja), y ha establecido una preferencia (por la vaca en este caso). Comparaciones y preferencias definen escalas cualitativas. Y aunque sea de modo rudimentario, definen también ordenaciones (en este caso sería entre los posibles tipos de ganado). Vayamos más lejos: supongamos ahora que nuestra tribu, que cuida vacas, decide negociar con una tribu vecina que cuida ovejas. Y se ponen de acuerdo ambas tribus en cambiar mediante trueque una vaca por cada cinco ovejas. Esa proporción de cambio, usando números (el 5 frente al 1 en este caso) es fundamental. No solamente pasan a tener una escala de cuenta, ya numérica, sino que acaban de inventar o implementar un sistema de precios de mercado. Si consideramos como unidad de medida el patrón *vaca*, la oveja valdría la quinta parte de esa unidad patrón. Todo esto no es en absoluto baladí. Cabe recordar al respecto que alguna de las primitivas monedas de la antigua Roma, denominadas en su origen *aes rude*, eran unos lingotes de cobre en los que se grababa la figura de una vaca, y representaban así el valor de la misma. El paso de la *vaca física*, viva y coleando, a su representación en un lingote (con asignación fiduciaria del valor de una vaca) supone un siguiente nivel de desarrollo, a saber, el invento de las monedas. ¡La imaginación al poder!

Aparece aquí una cuestión clave: ¿podemos convertir cualquier escala cualitativa en una cuantitativa numérica equivalente? Si tal conversión o *traducción* es posible, diremos que la escala cualitativa admite una representación numérica, o, más habitualmente y para simplificar, que tal escala cualitativa es representable.

Entraríamos ahora ya en el estudio técnico de escalas cualitativas, entendidas como estructuras ordenadas, tratando de ver si son representables o no. De eso trata esta teoría.

2. ALGUNAS IDEAS PROPIAS DEL ANÁLISIS REAL: AXIOMÁTICA Y ORDEN

Si pensamos en cómo se define el *orden* en la recta real $\mathbb{R}$ tenemos que descender a los fundamentos del análisis matemático, y explorarlos. Veremos que la estructura de la recta real se define axiomáticamente (véase por ejemplo [40, 41, 55, 56]) y que además algunos de sus axiomas constitutivos o su estructura aritmética cuelgan a su vez de otros axiomas aún más básicos, que podríamos dar en considerar el primer nivel de los fundamentos de la matemática: se trata de los axiomas de la teoría de conjuntos (véase [44]).

Hay varias maneras de definir el orden en los números naturales. Una de ellas se basa en conceptos clásicos de la teoría de conjuntos, como conjuntos cardinales, uniones de conjuntos disjuntos, biyecciones, etcétera. A mí personalmente me gusta mucho más definir el orden en $\mathbb{N}$ a partir de la aritmética de los naturales, en la

que la definición axiomática de las operaciones usuales de suma y producto resulta sencilla (véase [55]).

Desde este punto de vista, la definición del orden natural quedaría como sigue: dados dos números naturales m, n declaramos que $m < n$ si existe otro número natural $p > 0$ tal que $m + p = n$. De esta forma, ponemos por caso, se tiene que $3 < 7$ porque el 4 es un número natural tal que $3 + 4 = 7$. Sin embargo, no es verdad que $7 < 3$ (no hay ningún número natural que sumado al 7 nos dé 4). A partir de la axiomática clásica de los naturales (devida a G. Peano) y de su aritmética, esta, y también la relación de orden clásica ($\leq$) se extiende ya a los enteros $\mathbb{Z}$ y racionales $\mathbb{Q}$, conjuntos que respectivamente se definen como clases de equivalencia adecuadas en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, y luego en $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

Para pasar ya a los números reales ($\mathbb{R}$) se necesitan nuevos axiomas. Dependiendo de cómo los agrupen los distintos autores, nos encontramos con una axiomática que consta de entre 10 y 14 axiomas (véase [56]). Tales axiomas giran en torno a existencia (del conjunto de números), operaciones algebraicas, orden y topología (principio de completitud o postulado de continuidad de la recta real).

Si nos paramos ahora a considerar los axiomas (o las consecuencias de los mismos en forma de teoremas o proposiciones derivadas de tal axiomática) que involucran *orden*, enseguida nos encontramos, por poner un ejemplo claro, con la regla de los signos: $a, b > 0 \implies a \cdot b > 0$; $a, b < 0 \implies a \cdot b > 0$, etcétera. O con el hecho de que el orden en la recta real $\mathbb{R}$ extiende al que ya había en $\mathbb{Q}$. Este extiende a su vez el orden de los enteros. Y el de los enteros extiende el de los naturales.

Para entender bien la estructura de la recta real $\mathbb{R}$ es importante entender profundamente el alcance de cada grupo de axiomas que definen $\mathbb{R}$.

En particular, cabe interesarse por entender bien cómo es el orden de la recta real, y a qué subestructuras ordenadas da lugar cuando se consideran subconjuntos de $\mathbb{R}$ ordenados con el orden usual. Y, para ello, nada mejor que entender cuáles son las estructuras ordenadas abstractas, que, de momento, veremos como pares $(X, \preceq)$, donde X es un conjunto no vacío y $\preceq$ es un orden total definido sobre X , que son *isótonas* a un subconjunto de la recta real dotado de su orden natural.

Esta es, de nuevo, la pregunta clave de la teoría de representaciones numéricas de estructuras ordenadas.

Como botón de muestra citamos aquí un potente resultado en esta dirección: el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, dotado de su orden usual $\leq$, contiene copias isótonas de cualquier conjunto totalmente ordenado de cardinalidad numerable (véase [9, 40, 41] y, para entender mejor el orden de la recta real, consúltese [45, 46, 47, 48, 49, 50]).

3. TRES TIPOS CLAVE DE ESTRUCTURAS ORDENADAS

Antes de empezar a dar una lista de definiciones técnicas, vamos a considerar tres ejemplos básicos ilustrativos:

- Si juzgamos la riqueza de un individuo solamente por el dinero que posee, bajo la perspectiva «más tienes, más vales» estamos comparando simplemente

números reales con su orden usual. Si el valor de la riqueza de un individuo es a y el del otro es b , no haremos otra cosa que ver si $a \leq b$ o $b \leq a$.

- Si pretendemos comprar un coche nuevo y vamos mirando distintos concesionarios de vehículos, estos nos ofrecerán ofertas. En general, no podemos decir que el precio de un determinado coche es fijo. Más bien, entre los distintos concesionarios el precio de ese coche estará comprendido entre un valor mínimo m y un valor máximo M . Si comparamos dos marcas de coches a y b , el precio del primer coche estará en un intervalo $[m_a, M_a]$ y el del segundo en otro $[m_b, M_b]$. Pues bien, solo podremos afirmar que «el coche a es más costoso que el b , invariablemente», si ocurre que $M_b < m_a$.

Notemos aquí que en esta situación lo que estamos comparando (u ordenando) en definitiva son los intervalos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$. De manera que miramos si un intervalo $[a, b]$ está situado o no *totalmente a la derecha* de otro $[c, d]$ para poder decir que *es mayor*. Si dos intervalos tienen algún elemento en común los declaramos *indiferentes* (volviendo al tema de los coches: en una tal situación, eligiendo adecuadamente los concesionarios, ambos coches podrían ser adquiridos a idéntico precio).

- Tomemos ahora una regla graduada, de manera que la separación entre una marca vertical y la siguiente sea muy pequeña (un milímetro, pongamos por caso). Así las cosas, dos puntos que cayeran completamente dentro del intervalo entre una de esas marcas y la siguiente los consideraríamos indiferentes o indistinguibles. Esa longitud constante entre una marca y su siguiente, longitud que actúa como un *umbral de percepción*, hace que no distingamos dos puntos mientras la distancia entre ellos no supere a esa distancia fija o umbral. Un modelo típico de este estilo de comparación aquí se daría en la recta real si pasáramos a comparar intervalos de la misma longitud (constante fija). Siendo esta 1, por fijar ideas, notemos que el intervalo $[a, a + 1]$ está totalmente a la derecha del $[b, b + 1]$ si y solamente si se tiene que $a - b > 1$.

Estos ejemplos clave nos ayudarán a entender mejor tres tipos de estructuras ordenadas, al menos en el caso particular en que tales estructuras sean representables numéricamente (algo que definiremos y analizaremos más adelante), a saber:

- El primer ejemplo corresponde a un *orden total*.
- El segundo ejemplo corresponde a un *orden-intervalo*.
- El tercer tipo corresponde a un *semiorden*.

Daremos después las definiciones abstractas de esos tres conceptos. Los ejemplos, cuando menos, fomentan la intuición para entender mejor dichas definiciones.

Pasamos a continuación a recordar alguna definición básica acerca de relaciones binarias en un conjunto. Sea X un conjunto no vacío. Una *relación binaria* $\mathcal{R}$ sobre X es un subconjunto del producto cartesiano $X^2 = X \times X$. Dados dos elementos $x, y \in X$, usaremos la notación estándar $x\mathcal{R}y$ para indicar que el par (x, y) pertenece a $\mathcal{R}$.

Asociadas a una relación binaria $\mathcal{R}$ sobre X , consideraremos las nuevas relaciones binarias $\mathcal{R}^c$ y $\mathcal{R}^{-1}$ definidas respectivamente sobre X por $\mathcal{R}^c = X^2 \setminus \mathcal{R}$, y por $x\mathcal{R}^{-1}y \iff y\mathcal{R}x$, para cualesquiera $x, y \in X$.

Una relación binaria $\mathcal{R}$ sobre un conjunto X se dice:

- *reflexiva* si $\Delta \subseteq \mathcal{R}$, siendo $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$,
- *irreflexiva* si $\Delta \cap \mathcal{R} = \emptyset$,
- *simétrica* si $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^{-1}$ coinciden,
- *antisimétrica* si $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \subseteq \Delta$,
- *asimétrica* si $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} = \emptyset$,
- *total (o completa)* si $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1} = X^2$,
- *transitiva* si $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$ para cualesquiera $x, y, z \in X$.

Un *preorden* sobre X es una relación binaria reflexiva y transitiva. Si además es antisimétrica, se dice entonces que es un *orden parcial*, llamado *orden total* si tal relación binaria es también total.

En muchos contextos (por ejemplo en economía) una *preferencia* definida sobre un conjunto X es una relación binaria $\mathcal{R}$ transitiva y total. En otras palabras, en el lenguaje y nomenclatura propios de la matemática pura, diríamos que una preferencia se entiende como un *preorden total*.

Otros autores (generalmente también en contextos de economía) trabajan a partir de una relación binaria asimétrica $\mathcal{P}$, a la que denominan habitualmente *preferencia estricta*. Asociadas a $\mathcal{P}$, definen a continuación la *preferencia débil* $\mathcal{R}$ y la *indiferencia* $\mathcal{I}$, como sigue: $x\mathcal{R}y \iff y\mathcal{P}^c x$; $x\mathcal{I}y \iff (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x)$ ($x, y \in X$).

Este último marco (preferencias estrictas entendidas como relaciones binarias asimétricas) es de hecho más general y amplio que el primitivo (preferencias como preórdenes totales), puesto que permite ahora situaciones en que la indiferencia $\mathcal{I}$ no es transitiva.

Vamos ya con las definiciones clave, muchas de las cuales aparecían ya (de manera implícita y bajo una nomenclatura diferente) en varios artículos publicados por Norbert Wiener hacia 1910 (véase [87]).

En primer lugar, veamos el concepto de orden-intervalo, cuya introducción y estudio se atribuye a Peter C. Fishburn (véase [62, 63, 64, 65, 66]) a partir de 1970, si bien, como ha quedado dicho, la idea ya aparece en los trabajos de Wiener.

Una relación binaria total $\mathcal{R}$ sobre un conjunto X se dice *orden-intervalo* si satisface que $x\mathcal{R}y \wedge z\mathcal{R}t \implies x\mathcal{R}t \vee z\mathcal{R}y$, para cualesquiera $x, y, z, t \in X$.

Un caso particular de orden-intervalo lo da el concepto de *semiorden*, que, curiosamente, se considera que fue introducido y analizado antes, a partir de la segunda mitad de los años 50 del pasado siglo XX, por R. Duncan Luce (véase [74]). También este concepto había sido contemplado ya por N. Wiener.

Así, un orden-intervalo $\mathcal{R}$ sobre un conjunto X se denomina *semiorden* si sucede que $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}t \vee t\mathcal{R}z$, para cualesquiera $x, y, z, t \in X$.

TEOREMA 3.1 (véase [4, 14, 18, 63, 65, 74, 83, 85]). *Se tiene la siguiente jerarquía: preorden total $\implies$ semiorden $\implies$ orden-intervalo. Las implicaciones recíprocas son falsas, en general.*

TEOREMA 3.2 (véase [4, 14, 18, 63, 65, 74, 85]). Sea $\mathcal{P}$ una relación binaria asimétrica (llamada también preferencia estricta). Sea $\mathcal{R}$ su preferencia débil asociada y sea $\mathcal{I}$ su indiferencia asociada. Se tienen las caracterizaciones siguientes:

- $\mathcal{R}$ es un orden-intervalo si y solamente si $\mathcal{P} \circ \mathcal{I} \circ \mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}$,
- $\mathcal{R}$ es un semiorden si y solamente si se cumple que $(\mathcal{P} \circ \mathcal{I} \circ \mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}) \wedge (\mathcal{P} \circ \mathcal{P} \circ \mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}) \wedge (\mathcal{I} \circ \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \subseteq \mathcal{P})$.

Otras propiedades muy importantes de las estructuras de orden-intervalo tienen que ver con *intransitividades*. En concreto, si $\mathcal{R}$ es un orden-intervalo (o un semiorden, caso particular de orden-intervalo) puede ocurrir que $\mathcal{R}$ no sea transitiva. También puede suceder que la indiferencia asociada $\mathcal{I}$ sea así mismo intransitiva (véase [62, 63, 73, 74]).

Se tiene el siguiente resultado clave, bien conocido en esta teoría (véase por ejemplo [14]):

TEOREMA 3.3. Sea $\mathcal{R}$ un orden-intervalo definido sobre un conjunto X . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\mathcal{R}$ es un preorden total,
- $\mathcal{R}$ es transitiva,
- la indiferencia asociada $\mathcal{I}$ es transitiva.

En trabajos acerca de órdenes-intervalo es frecuente también usar la siguiente notación. Sea $\mathcal{R}$ un orden-intervalo sobre un conjunto X . La relación binaria $\mathcal{P}$ definida mediante $x\mathcal{P}y \iff y\mathcal{R}^c x$ ($x, y \in X$) es, de hecho, una relación asimétrica. Como ya se ha indicado, hay autores que empiezan por considerar primero una relación binaria asimétrica $\mathcal{P}$ y solamente después definen ya $\mathcal{R}$. De tal forma, alguna de las definiciones previas pueden darse de entrada (y de hecho así aparecen en algunos trabajos) en términos de una relación asimétrica $\mathcal{P}$.

4. ORDEN Y REPRESENTABILIDAD

Cuando intentamos representar una escala cualitativa (u *ordenación*, entendida en un sentido amplio y laxo) en otra, generalmente elegimos como modelo la recta real con su orden natural. Y tratamos, por ende, de representar aquella escala cualitativa de una manera equivalente, pero ya numérica.

Y cabe preguntarse ahora: ¿por qué elegimos la recta real como referencia principal? Como razones de este porqué, tratando de dar respuesta a la pregunta anterior, podemos decir que necesitamos alguna referencia o modelo universal fácil de manejar, con el que tratar de comparar de alguna manera cualquier estructura ordenada (o escala cualitativa) que sea objeto de nuestro análisis. Obviamente, estamos más que acostumbrados a comparar números y cantidades. ¿Qué mejor referencia entonces que la recta real con su orden natural? Además, y una vez más desde el punto de vista del análisis real, esto nos ayudará a comprender mejor la axiomática y estructura de la recta real $\mathbb{R}$.

Pero, con todo, cabe todavía preguntarse: ¿podría utilizarse algún otro tipo de conjunto totalmente ordenado para tratar de representar en él estructuras ordenadas o escalas cualitativas?

La respuesta es afirmativa. Pueden utilizarse modelos como el plano lexicográfico, la línea larga, o incluso conjuntos adecuados de números *fuzzy* (difusos, borrosos). Estos conjuntos totalmente ordenados alternativos han sido objeto de investigaciones más o menos recientes, aunque su uso no sea tan popular como el de la recta real. A tal respecto puede consultarse [7, 11, 15, 17, 20, 22, 24, 25, 26, 30, 60, 61, 79].

En cualquier caso, el conjunto totalmente ordenado más usual, y punto de partida de la representabilidad numérica de estructuras ordenadas, es $(\mathbb{R}, \leq)$.

Pasamos ahora a hacer un recorrido por los principales resultados acerca de *representaciones* de estructuras ordenadas.

Tratando de representar una tal escala mediante números, de alguna forma adecuada, la primera pregunta que cabe hacerse es: ¿cómo podríamos tratar de representar fielmente $\mathcal{R}$ utilizando números reales?

Pues bien, la literatura especializada ha introducido muy variadas y diversas formas de representar numéricamente relaciones binarias (cuando sea posible). Bien es cierto que la forma más popular nos la da el concepto de *función de utilidad* (véase [18, 43, 52, 53, 54, 57, 77]). Pero hay muchas más opciones (véase [1, 3, 25, 65, 76, 83, 85]). Damos aquí unos cuantos ejemplos significativos (entre muchos otros):

- mediante una *función de utilidad* $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x\mathcal{R}y \iff u(x) \leq u(y)$ ($x, y \in X$),
- mediante *intervalos de números reales*, de forma tal que a cada $x \in X$ se le asigna un intervalo $[a(x), b(x)]$ de manera que, si es posible, se satisfaga que $x\mathcal{R}y \iff a(x) \leq b(y)$ ($x, y \in X$),
- a través de una *función de utilidad* y un *umbral de percepción* $K \geq 0$ tales que se tenga que $x\mathcal{R}y \iff u(x) \leq u(y) + K$ ($x, y \in X$),
- a través de *subconjuntos adecuados de números reales*, de forma que a cada $x \in X$ se le asigna un subconjunto $C(x) \subseteq \mathbb{R}$ y se trata de que se cumpla que $x\mathcal{R}y \iff C(x) \subseteq C(y)$ ($x, y \in X$),
- a través de una *aplicación bivalente hemisimétrica* $F : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x\mathcal{R}y \iff F(x, y) \geq 0$, con F cumpliendo que $F(x, y) + F(y, x) = 0$ ($x, y \in X$),
- mediante una *aplicación bivalente* $F : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x\mathcal{R}y \iff F(x, y) \geq 0$ y F satisfaga además una ecuación funcional adecuada, por ejemplo, $F(x, y) + F(y, z) = F(x, z) + F(t, t)$ ($x, y, z, t \in X$).

En este punto debemos hacer notar que el tipo de representación que tratemos de hallar para una relación binaria o escala cualitativa dada no debe en ningún caso ser considerado a la ligera, eligiendo *al azar* algún tipo de las representaciones numéricas antes expuestas. Ello es así ya que la mera existencia de determinados tipos de representación puede conllevar, ya de entrada, importantes restricciones sobre la relación binaria (escala cualitativa) objeto de análisis. Un conocido y contundente ejemplo es el siguiente.

PROPOSICIÓN 4.1. *Si una relación binaria $\mathcal{R}$ sobre un conjunto no vacío X admite una representación numérica mediante una función de utilidad u tal que $x\mathcal{R}y \iff u(x) \leq u(y)$ ($x, y \in X$), entonces la relación $\mathcal{R}$ es, a fortiori, un preorden total.*

Pasamos ahora a considerar las representaciones más clásicas.

Sea X un conjunto no vacío. Un preorden total $\mathcal{R}$ sobre X se dice *representable en $\mathbb{R}$* si existe una aplicación $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x\mathcal{R}y \iff u(x) \leq u(y)$ se cumple para todo $x, y \in X$. La aplicación u se dice *isotonía* (también conocida por *función de utilidad*). A veces, y quizá por abuso de lenguaje, se dice simplemente que u es una *representación numérica* para $\mathcal{R}$.

Un semiorden $\mathcal{R}$ sobre X se dice *representable en $\mathbb{R}$ en el sentido de Scott y Suppes* (véase [85]) si existe una aplicación $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ junto con una constante estrictamente positiva $K > 0$ de forma tal que se cumpla que $x\mathcal{R}y \iff u(x) \leq u(y) + K$ para todo $x, y \in X$.

Un orden-intervalo $\mathcal{R}$ sobre X se dice *representable en $\mathbb{R}$* si existe un par de aplicaciones $u, v: X \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $x\mathcal{R}y \iff u(x) \leq v(y)$ se cumple para todo $x, y \in X$.

Damos ahora referencia a los resultados clásicos de representabilidad para el caso finito (véase por ejemplo [42]). Así X denotará ahora un conjunto finito no vacío.

En lo que se refiere a preórdenes totales, desde finales del siglo XIX se conocía ya el resultado siguiente, atribuido a G. Cantor (véase [40, 41])

TEOREMA 4.2. *Todo preorden total definido sobre un conjunto finito es representable.*

El resultado análogo es también válido para semiórdenes. Fue demostrado por D. S. Scott y P. C. Suppes en 1958 (véase [85]), y, aunque ellos, evidentemente, no hablaban de «en el sentido de Scott y Suppes», afirman lo siguiente:

TEOREMA 4.3. *Todo semiorden definido sobre un conjunto finito es representable en el sentido de Scott y Suppes.*

Más todavía: hay también un resultado análogo para órdenes-intervalo, si bien tal resultado tardó más en aparecer, y puede verse en trabajos de distintos autores que lo probaron de manera independiente (véase [57, 65]). Se tiene así que:

TEOREMA 4.4. *Cualquier orden-intervalo definido sobre un conjunto finito admite una representación numérica mediante dos funciones de valores reales.*

Pasamos a continuación a dar referencia a los resultados clásicos de representabilidad para el caso numerable.

Con respecto a preórdenes totales, el resultado siguiente procede también de los trabajos de G. Cantor, con alguna demostración mejorada mucho más adelante por Garret Birkhoff (véase [9, 40, 41]).

TEOREMA 4.5. *Todo preorden total definido sobre un conjunto numerable (finito o infinito numerable) es representable. Más aún, el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales dotado de su orden euclídeo usual $\leq$ es universal en el sentido de que contiene copias isotónicas de cualquier orden total que pueda definirse sobre un conjunto numerable.*

Para el caso de órdenes-intervalo se tiene también un resultado análogo (véase [57, 65]), a saber:

TEOREMA 4.6. *Cualquier orden-intervalo que se defina sobre un conjunto numerable es representable a través de una pareja de funciones de valores reales.*

Para el caso de semiórdenes ya no se dispone de un resultado análogo que sea tan general. Es necesario introducir una condición previa, denominada *regularidad para sucesiones*. Se define para relaciones binarias asimétricas, como sigue.

Sea X un conjunto no vacío. Una relación binaria asimétrica $\mathcal{P}$ definida sobre el conjunto X se dice *regular para sucesiones* si no existen $x, y \in X$, y sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$, tales que se tenga $x\mathcal{P} \dots \mathcal{P}x_{n+1}\mathcal{P}x_n\mathcal{P} \dots \mathcal{P}x_1$ o, dualmente, se tenga $y_1\mathcal{P} \dots \mathcal{P}y_n\mathcal{P}y_{n+1}\mathcal{P} \dots \mathcal{P}y$.

En otras palabras, el conjunto X carece tanto de cadenas infinitas numerables y ascendentes con respecto a $\mathcal{P}$ que tengan una cota superior y , como de cadenas infinitas numerables y descendentes con respecto a $\mathcal{P}$ que tengan una cota inferior x .

TEOREMA 4.7 (véase [8, 76]). *Un semiorden $\mathcal{R}$ definido sobre un conjunto numerable X admite una representación de tipo Scott y Suppes (a través de una función de utilidad y un umbral de percepción estrictamente positivo) si y solamente si su relación de preferencia estricta asociada $\mathcal{P}$ satisface la condición de regularidad con respecto a sucesiones.*

De cara a analizar qué ocurre en el caso general (conjuntos infinitos no necesariamente numerables) con respecto a la representabilidad de preórdenes totales, vamos a necesitar ahora introducir algunos conceptos previos.

En primer lugar definiremos las *trazas de un orden-intervalo*. Así, asociadas a un orden-intervalo $\mathcal{R}$ definido sobre un conjunto no vacío X , consideraremos la relación $\mathcal{P}$ dada por $x\mathcal{P}y \iff y\mathcal{R}^c x$ ($x, y \in X$). A partir de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{R}$, se definen dos nuevas relaciones binarias (véase [57, 62, 63, 64, 65]), que se denominan *trazas de $\mathcal{R}$* y que denotaremos, respectivamente, $\mathcal{P}^*$ y $\mathcal{P}^{**}$.

En primer lugar $x\mathcal{P}^*y \iff x\mathcal{P}z\mathcal{R}y$ para algún $z \in X$ ($x, y \in X$). De manera análoga $x\mathcal{P}^{**}y \iff x\mathcal{R}z\mathcal{P}y$ para algún $z \in X$ ($x, y \in X$).

Además, se definen otras dos nuevas relaciones $\mathcal{R}^*$ y $\mathcal{R}^{**}$, dadas por $x\mathcal{R}^*y \iff y(\mathcal{P}^*)^c x$ ($x, y \in X$), mientras que $x\mathcal{R}^{**}y \iff y(\mathcal{P}^{**})^c x$ ($x, y \in X$). Tanto $\mathcal{R}^*$ como $\mathcal{R}^{**}$ resultan ser preórdenes totales.

A continuación vamos a definir *condiciones de separabilidad*. Lo hacemos para preórdenes totales y también para órdenes-intervalo.

Sea X un conjunto no vacío. Un preorden total $\mathcal{R}$ definido sobre X se dice *perfectamente separable* si existe un subconjunto numerable $D \subseteq X$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$ con $x\mathcal{P}y$ existe algún elemento $d \in D$ tal que se cumple $x\mathcal{R}d\mathcal{R}y$. (Existen muchas definiciones equivalentes, véase [18, 31, 32, 33]).

Un orden-intervalo $\mathcal{R}$ definido sobre X se dice *orden-intervalo separable* si existe un subconjunto numerable $D \subseteq X$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$ con $x\mathcal{P}y$ existe algún elemento $d \in D$ tal que se cumple $x\mathcal{R}^*d\mathcal{P}y$. (También en este caso hay varias definiciones equivalentes, véase [14]).

Veamos ahora cómo un preorden total induce una topología. Sea $\mathcal{R}$ un preorden total definido sobre un conjunto no vacío X . La *topología del orden* $\tau_{\mathcal{R}}$ sobre X se define como la engendrada a partir de la subbase $\{X\} \cup \{\emptyset\} \cup \{L(x) : x \in X\} \cup \{R(x) : x \in X\}$, siendo $R(x) = \{y \in X : xPy\}$ y $L(x) = \{z \in X : zPx\}$ ($x \in X$).

Mencionamos ahora las principales caracterizaciones de la representabilidad en el caso general. Empezamos con el caso de preórdenes totales.

TEOREMA 4.8. *Sea $\mathcal{R}$ un preorden total definido sobre un conjunto no vacío X . Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

- $\mathcal{R}$ es representable,
- $\mathcal{R}$ es perfectamente separable,
- la topología del orden $\tau_{\mathcal{R}}$ satisface el segundo axioma de numerabilidad,
- la topología del orden $\tau_{\mathcal{R}}$ es metrizable y separable.

Las demostraciones de estos hechos aparecen en diversos trabajos (véase [6, 9, 18, 67, 69, 72, 77, 78]).

A continuación damos una caracterización de la representabilidad de órdenes-intervalo (véase [14, 82]).

TEOREMA 4.9 (véase [14, 82]). *Un orden-intervalo $\mathcal{R}$ sobre un conjunto no vacío X es representable mediante un par de funciones reales si y solamente si es orden-intervalo separable.*

Hay otras caracterizaciones bastante más sofisticadas y que involucran más de una condición, que aparecieron anteriormente (véase [57, 65]).

Para el caso de semiórdenes se tiene el resultado siguiente:

TEOREMA 4.10 (véase [14, 29, 82]). *Un semiorden $\mathcal{R}$ sobre un conjunto no vacío X es representable en el sentido de Scott y Suppes si y solo si es orden-intervalo separable y, además, su relación binaria asimétrica asociada $\mathcal{P}$ es regular para sucesiones.*

Existen otras caracterizaciones que son mucho más sofisticadas e involucran condiciones más complicadas (véase [2, 34, 37]).

5. REPRESENTACIONES NUMÉRICAS DE ORDENACIONES CON MÁS ESTRUCTURA AÑADIDA: TOPOLOGÍA Y ÁLGEBRA

Estudiamos ahora situaciones en que la estructura ordenada (escala cualitativa) que estamos considerando tiene asociada alguna estructura adicional.

Este estudio podría ser muy amplio y exhaustivo, al haber multitud de posibles ramificaciones de la teoría, topologías añadidas que pueden ser compatibles o no con una ordenación o relación binaria, estructuras algebraicas de muy diverso tipo (por ejemplo semigrupos, grupos, espacios vectoriales, etcétera) que, de nuevo, pueden o no ser compatibles con una escala cualitativa dada. Incluso puede haber varias estructuras adicionales (más de una) sobre un conjunto en el que tenemos dada una cierta relación binaria o escala cualitativa (por ejemplo, grupos topológicos ordenados).

Aquí presentaremos solamente algunos resultados notables. El lector interesado puede consultar la literatura especializada al respecto de estas cuestiones (véase [5, 10, 12, 13, 16, 19, 21, 23, 27, 28, 35, 36, 38, 39, 51, 58, 59, 68, 70, 71, 75, 80, 81, 84, 86, 88]).

En primer lugar analizamos qué sucede cuando el conjunto X sobre el que tenemos definido algún tipo de ordenación, relación binaria o escala cualitativa $\mathcal{R}$ está dotado además con una topología τ .

Cuando $\mathcal{R}$ es un preorden, un semiorden o un orden-intervalo, estaremos ahora interesados en investigar la existencia de representaciones numéricas (mediante una función de utilidad en el caso de preórdenes totales, una función de utilidad y un umbral de percepción en el caso de semiórdenes, o un par de funciones con valores reales en el caso de órdenes-intervalo) en las que las funciones que estén involucradas en la representación sean además *continuas* con respecto a la topología τ sobre X y la topología euclídea usual sobre la recta real $\mathbb{R}$.

¿Qué puede afirmarse ahora acerca de la existencia de representaciones continuas para estos tipos clásicos de relaciones binarias? Comenzamos con el caso de preórdenes totales.

Siendo $\mathcal{R}$ un preorden total definido sobre un espacio topológico (X, τ) , diremos que la topología τ es *natural* con respecto a $\mathbb{R}$ (o, equivalentemente, diremos que el preorden total $\mathcal{R}$ es τ -continuo) si para cualquier $x \in X$ los conjuntos $\{y \in X : y\mathcal{P}x\}$ y $\{z \in X : x\mathcal{P}z\}$ son ambos conjuntos abiertos en la topología τ .

Se tiene el siguiente resultado clásico (véase [18, 52, 54]):

TEOREMA 5.1. *Sea $\mathcal{R}$ un preorden total sobre un espacio topológico (X, τ) . Son equivalentes las afirmaciones siguientes:*

- $\mathcal{R}$ es representable mediante una función de utilidad continua,
- τ es natural con respecto a $\mathcal{R}$, y $\mathcal{R}$ es perfectamente separable,
- τ es natural con respecto a $\mathcal{R}$, y la topología del orden $\tau_{\mathcal{R}}$ satisface el segundo axioma de numerabilidad.

Pasamos ahora a comentar resultados existentes acerca de la representabilidad continua de órdenes-intervalo y semiórdenes. Esta cuestión ha sido un auténtico *tour de force* durante muchos años. Muy recientemente, en 2023, se ha resuelto el problema de dar una caracterización de la representabilidad continua de semiórdenes en el caso general (véase [59]). Para órdenes-intervalo, caracterizar el caso general de representabilidad continua sigue siendo un problema abierto, si bien existen resultados parciales muy relevantes. Para presentarlos, introducimos a continuación el concepto de topología natural para un orden-intervalo (véase [10]).

Sea $\mathcal{R}$ un orden-intervalo sobre un espacio topológico (X, τ) . La topología τ se dice *natural con respecto al orden-intervalo* $\mathbb{R}$ si para cualquier $x \in X$ ocurre que los conjuntos $\{y \in X : y\mathcal{P}x\}$, $\{z \in X : x\mathcal{P}z\}$, $\{y \in X : y\mathcal{P}^*x\}$, $\{z \in X : x\mathcal{P}^*z\}$, $\{y \in X : y\mathcal{P}^{**}x\}$ y $\{z \in X : x\mathcal{P}^{**}z\}$ son todos abiertos en la topología τ .

Se tiene el siguiente resultado, cuya prueba puede verse en [10]:

TEOREMA 5.2. Sea $\mathcal{R}$ un orden intervalo sobre un espacio topológico (X, τ) . Supongamos además que la topología τ es natural con respecto a $\mathcal{R}$. Son entonces equivalentes las afirmaciones siguientes:

- existe una representación numérica de $\mathcal{R}$ mediante dos funciones continuas $u, v : X \rightarrow \mathbb{R}$ tales que, además, u representa $\mathcal{R}^{**}$ mientras que v representa $\mathcal{R}^*$,
- $\mathcal{R}$ es orden-intervalo separable.

Además de continuidad, se han estudiado también representaciones *semicontinuas* de las estructuras ordenadas más clásicas, cuando están definidas sobre un espacio topológico (véase a modo de ejemplo la referencia [16]).

A continuación vamos a comentar algún resultado acerca de la representabilidad numérica de ciertas estructuras algebraicas ordenadas.

En este contexto general, se supone que partimos de un conjunto no vacío equipado con alguna estructura algebraica (por ejemplo, un grupo abeliano) además de algún tipo de ordenación (por ejemplo, un orden total) que sea, en algún sentido, *compatible* con la estructura algebraica.

Por ejemplo, si $(G, \bar{+})$ es un grupo abeliano y $\mathcal{R}$ es un orden total sobre G , diremos que la estructura (mixta) $(G, \bar{+}, \mathcal{R})$ es un *grupo abeliano totalmente ordenado* si se tiene que $x\mathcal{R}y \iff x\bar{+}z\mathcal{R}y\bar{+}z$ se satisface para cualesquiera $x, y, z \in G$.

Es lógico y natural ahora buscar representaciones numéricas que no solamente preserven el tipo de ordenación, sino también (y a la vez) la estructura algebraica. Por ejemplo, si $(G, \bar{+}, \mathcal{R})$ es un grupo abeliano totalmente ordenado, trataremos de encontrar una función de utilidad $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para cualesquiera $x, y \in G$,

- $x\mathcal{R}y \iff u(x) \leq u(y)$,
- $u(x\bar{+}y) = u(x) + u(y)$.

Este es brevemente el estado del conocimiento sobre este tipo de objetos.

- Existen en esta teoría resultados clásicos muy potentes, alguno de ellos muy antiguo, acerca de la representación numérica de grupos totalmente ordenados (véase por ejemplo [70]).
- Hay también caracterizaciones de la representabilidad numérica de semigrupos totalmente ordenados (véase [5, 27, 28, 51]).
- También hay otros resultados (parciales) interesantes acerca de la representabilidad numérica de semigrupos, grupos, espacios vectoriales, conos reales, álgebras y espacios de Banach dotados de un preorden total compatible (véase [12, 19, 26, 35, 36, 39]).
- Cuando *el álgebra encuentra a la topología* (esto es, trabajando, por ejemplo, con grupos o semigrupos topológicos totalmente ordenados o totalmente preordenados) hay resultados muy bellos acerca de *continuidad automática* de algunos tipos de funciones de utilidad que preservan la estructura algebraica (véase, por ejemplo, [81]). En estos casos se trata de encontrar funciones de utilidad que preserven a la vez las tres estructuras, a saber, ordinal, topológica y algebraica.

- A pesar de tratarse de un campo de investigación ya entrado en años (por así decirlo), aún queda una gran cantidad de cuestiones abiertas en esta disciplina (véase [26]).

Citamos ahora algún resultado clave, como botón de muestra. Un grupo totalmente ordenado $(G, \bar{+}, \mathcal{R})$ se dice *arquimédiano* si, siendo e el elemento neutro de $(G, \bar{+})$, ocurre que para cualesquiera $x, y \in G$ tales que $e\mathcal{P}x\mathcal{P}y$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y\mathcal{P}(n \cdot x)$ (aquí $n \cdot x$ significa $x\bar{+} \dots (n\text{-veces}) \dots \bar{+}x$).

Se tiene el siguiente resultado, probado ya por Otto Hölder en 1901 (véase [70]):

TEOREMA 5.3. *Sea $(G, \bar{+}, \mathcal{R})$ un grupo totalmente ordenado. Son entonces equivalentes las afirmaciones siguientes:*

- $\mathcal{R}$ es representable mediante una función de utilidad $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x\mathcal{R}y \iff u(x) \leq u(y)$ y $u(x\bar{+}y) = u(x) + u(y)$ se cumple para todo $x, y \in G$,
- $(G, \bar{+}, \mathcal{R})$ es arquimédiano.

Por su parte, un semigrupo totalmente ordenado $(S, \bar{+}, \mathcal{R})$ se dice *positivo* si se cumple que $x\mathcal{P}x\bar{+}x$, para cualquier $x \in S$ y se dice *conmutativo* si $x\bar{+}y = y\bar{+}x$ se cumple para cualesquiera $x, y \in S$.

Se alcanza así el siguiente resultado (véase [5, 51]):

TEOREMA 5.4. *Sea $(S, \bar{+}, \mathcal{R})$ un semigrupo totalmente ordenado positivo. Son entonces equivalentes las afirmaciones siguientes:*

- $\mathcal{R}$ es representable mediante una función de utilidad $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x\mathcal{R}y \iff u(x) \leq u(y)$ y $u(x\bar{+}y) = u(x) + u(y)$ se cumplen para cualesquiera $x, y \in S$ (y, como un consecuencia de este hecho, $(S, \bar{+}, \mathcal{R})$ es conmutativo),
- para todo $x, y \in G$ tales que $x\mathcal{P}y$ existe $n \in \mathbb{N}$ para el que se satisface que $[(n+1) \cdot x]\mathcal{P}(n \cdot y)$.

Mencionamos ahora un resultado clave de una situación en la que el álgebra encuentra a la topología. Fue probado por Peter J. Nyikos y Hans C. Reichel en 1975 (véase [81]).

TEOREMA 5.5. *Todo grupo abeliano totalmente ordenado $(G, \bar{+}, \mathcal{R})$ es un grupo topológico con respecto a la topología del orden $\tau_{\mathcal{R}}$, de forma tal que la operación $\bar{+} : G \times G \rightarrow G$, y también la operación de tomar el elemento opuesto en G , resultan ser continuas (se dice entonces que la continuidad se da de forma automática).*

Como ha quedado ya dicho, en esta teoría hay todavía una gran cantidad de problemas abiertos (véase [26]). Uno del que ya se ha hablado es el de dar una caracterización general de la representabilidad continua de órdenes-intervalo.

Como muestra, y para terminar, presentamos otro curioso problema abierto. Decimos que un espacio topológico (X, τ) tiene la *propiedad de extensión de Yi* (véase [26, 88]) si todo preorden total definido sobre un subconjunto τ -cerrado no vacío $A \subseteq X$ y tal que (el preorden) sea continuo con respecto a la topología τ_A que τ induce sobre el conjunto A , admite una extensión τ -continua a todo el espacio X .

Se sabe que la propiedad de extensión de Yi implica la propiedad de extensión de Tietze, clásica en topología general. Sin embargo, el recíproco no siempre es cierto.

La propiedad de extensión de Yi no se ha identificado todavía con ninguna de las nociones clásicas relativas a los espacios normales (axiomas de separación) que se estudian en topología general. El problema de caracterizar los espacios topológicos que satisfacen la propiedad de extensión de Yi permanece abierto a día de hoy.

REFERENCIAS

- [1] F. J. ABRÍSQUETA, J. C. CANDEAL, R. G. CATALÁN, J. R. DE MIGUEL Y E. INDURÁIN, Generalized Abel functional equations and numerical representability of semiorders, *Publ. Math. Debrecen* **78** (2011) (3-4), 557–568.
- [2] F. J. ABRÍSQUETA, J. C. CANDEAL, E. INDURÁIN Y M. ZUDAIRE, Scott-Suppes representability of semiorders: internal conditions, *Math. Social Sci.* **57** (2009) (2), 245–261.
- [3] J. C. R. ALCANTUD, M. J. CAMPIÓN, J. C. CANDEAL, R. G. CATALÁN Y E. INDURÁIN, On the structure of acyclic binary relations, en J. Medina, M. Ojeda-Aciego, J. L. Verdegay, I. Perfilieva, B. Bouchon-Meunier y R. R. Yager, (eds.), Information processing and management of uncertainty in knowledge-based systems. Applications, IPMU 2018, *Communications in Computer and Information Science* **855**, 3–15, Springer, Cham, 2018.
- [4] F. ALESKEROV, D. BOUYSSOU Y B. MONJARDET, *Utility maximization, choice and preference* (segunda edición), Springer, Berlín, 2007.
- [5] N. G. ALIMOV, Sobre semigrupos ordenados (en ruso), *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **14** (1950), 569–576.
- [6] A. F. BEARDON, Totally ordered subsets of Euclidean space, *J. Math. Econom.* **23** (1994) (4), 391–393.
- [7] A. F. BEARDON, J. C. CANDEAL, G. HERDEN, E. INDURÁIN Y G. B. MEHTA, The non-existence of a utility function and the structure of non-representable preference relations, *J. Math. Econom.* **37** (2002) (1), 17–38.
- [8] A. BEJA E I. GILBOA, Numerical representations of imperfectly ordered preferences (a unified geometric exposition), *J. Math. Psych.* **36** (1992) (3), 426–449.
- [9] G. BIRKHOFF, *Lattice theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **25**, American Mathematical Society, Providence RI, 1948.
- [10] G. BOSI, M. J. CAMPIÓN, J. C. CANDEAL Y E. INDURÁIN, Interval-valued representability of qualitative data: the continuous case, *Internat. J. Uncertain. Fuzziness Knowledge-Based Systems* **15** (2007) (3), 299–319.
- [11] G. BOSI, M. J. CAMPIÓN, J. C. CANDEAL Y E. INDURÁIN (EDS.), *Mathematical topics on representations of ordered structures and utility theory*, Essays in honor of Professor Ghanshyam B. Mehta, *Stud. Syst. Decis. Control* **263**, Springer, Cham, 2020.
- [12] G. BOSI, M. J. CAMPIÓN, J. C. CANDEAL, E. INDURÁIN Y M. E. ZUANON, Isotonies on ordered cones through the concept of a decreasing scale, *Math. Social Sci.* **54** (2007) (2), 115–127.

- [13] G. BOSI, J. C. CANDEAL Y E. INDURÁIN, Continuous representability of interval orders and biororders, *J. Math. Psych.* **51** (2007) (2), 122–125.
- [14] G. BOSI, J. C. CANDEAL, E. INDURÁIN, E. OLÓRIZ Y M. ZUDAIRE, Numerical representations of interval orders, *Order* **18** (2001) (2), 171–190.
- [15] G. BOSI, J. GUTIÉRREZ GARCÍA Y E. INDURÁIN, Unified representability of total preorders and interval orders through a single function: the lattice approach, *Order* **26** (2009) (3), 255–275.
- [16] G. BOSI Y M. E. ZUANON, Semicontinuous representability of interval orders on a metrizable topological space, *Int. J. Contemp. Math. Sci.* **2** (2007) (17-20), 853–858.
- [17] S. J. BRAMS, W. V. GEHRLEIN Y F. S. ROBERTS (EDS.), *The mathematics of preference, choice and order. Essays in honor of Peter C. Fishburn*, Studies in Choice and Welfare, Springer, Heidelberg, 2009.
- [18] D. S. BRIDGES Y G. B. MEHTA, *Representations of preferences orderings*, Lecture Notes in Econom. and Math. Systems, **422**, Springer, Berlín, 1995.
- [19] M. J. CAMPIÓN, J. C. CANDEAL, A. S. GRANERO Y E. INDURÁIN, Ordinal representability in Banach spaces, *Methods in Banach space theory*, 183–196, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **337**, Cambridge University Press, UK, 2006.
- [20] M. J. CAMPIÓN, J. C. CANDEAL Y E. INDURÁIN, Representability of binary relations through fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems* **157** (2006) (1), 1–19.
- [21] M. J. CAMPIÓN, J. C. CANDEAL Y E. INDURÁIN, Preorderable topologies and order-representability of topological spaces, *Topology Appl.* **159** (2009) (18), 2971–2978.
- [22] M. J. CAMPIÓN, J. C. CANDEAL, E. INDURÁIN Y G. B. MEHTA, Order embeddings with irrational codomain: Debreu properties of real subsets, *Order* **23** (2006) (4), 343–357.
- [23] M. J. CAMPIÓN, J. C. CANDEAL, E. INDURÁIN Y G. B. MEHTA, Continuous order representability properties of topological spaces and algebraic structures, *J. Korean Math. Soc.* **49** (2012) (3), 449–473.
- [24] M. J. CAMPIÓN, R. G. CATALÁN, J. GARAY Y E. INDURÁIN, Functional equations related to fuzzy sets and representable orderings, *J. Intell. Fuzzy Systems* **29** (2015) (3), 1065–1077.
- [25] M. J. CAMPIÓN, L. DE MIGUEL, R. G. CATALÁN, E. INDURÁIN Y F. J. ABRÍSQUETA, Binary relations coming from solutions of functional equations: orderings and fuzzy subsets, *Internat. J. Uncertain. Fuzziness Knowledge-Based Systems* **25** (2017), suppl. 1, 19–42.
- [26] M. J. CAMPIÓN Y E. INDURÁIN, Open questions in utility theory, en G. Bosi, M. J. Campión, J. C. Candéal y E. Induráin (eds.), *Mathematical topics on representations of ordered structures and utility theory*, Stud. Syst. Decis. Control **263**, 47–81, Springer, Cham, 2020.

- [27] J. C. CANDEAL, J. R. DE MIGUEL Y E. INDURÁIN, Extensive measurement: continuous additive utility functions on semigroups, *J. Math. Psych.* **40** (1996) (4), 281–286.
- [28] J. C. CANDEAL, J. R. DE MIGUEL Y E. INDURÁIN, Topological additively representable semigroups, *J. Math. Anal. Appl.* **210** (1997) (1), 375–389.
- [29] J. C. CANDEAL, A. ESTEVAN, J. GUTIÉRREZ GARCÍA Y E. INDURÁIN, Semiorders with separability properties, *J. Math. Psych.* **56** (2012) (6), 444–451.
- [30] J. C. CANDEAL, J. GUTIÉRREZ GARCÍA Y E. INDURÁIN, Universal codomains to represent interval orders, *Internat. J. Uncertain. Fuzziness Knowledge-Based Systems* **17** (2009) (2), 197–219.
- [31] J. C. CANDEAL Y E. INDURÁIN, Representación numérica de órdenes totales, *Rev. Acad. Ci. Madrid* **84** (1990) (3), 415–428.
- [32] J. C. CANDEAL Y E. INDURÁIN, Sobre caracterizaciones topológicas de la representabilidad de cadenas mediante funciones de utilidad, *Revista Española de Economía* **7** (1990), 235–244.
- [33] J. C. CANDEAL Y E. INDURÁIN, Utility functions on chains, *J. Math. Econom.* **22** (1992) (2), 161–168.
- [34] J. C. CANDEAL Y E. INDURÁIN, Semiorders and thresholds of utility discrimination: solving the Scott-Suppes representability problem, *J. Math. Psych.* **54** (2010) (6), 485–490.
- [35] J. C. CANDEAL, E. INDURÁIN Y J. A. MOLINA, Numerical representability of ordered topological spaces with compatible algebraic structure, *Order* **29** (2012) (1), 131–146.
- [36] J. C. CANDEAL, E. INDURÁIN Y M. SANCHIS, Order representability in groups and vector spaces, *Expo. Math.* **30** (2012) (2), 103–123.
- [37] J. C. CANDEAL, E. INDURÁIN Y M. ZUDAIRE, Numerical representability of semiorders, *Math. Social Sci.* **43** (2002) (1), 61–77.
- [38] J. C. CANDEAL-HARO Y E. INDURÁIN ERASO, Utility representations from the concept of measure, *Math. Social Sci.* **26** (1993) (1), 51–62.
- [39] J. C. CANDEAL-HARO Y E. INDURÁIN ERASO, A note on linear utility, *Econom. Theory* **6** (1995) (3), 519–522.
- [40] G. CANTOR, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre I, *Math. Ann.* **46** (1895) (4), 481–512.
- [41] G. CANTOR, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre II, *Math. Ann.* **49** (1897) (2), 207–246.
- [42] N. CASPARD, B. LECLERC Y B. MONJARDET, *Ensembles ordonnés finis: concepts, résultats et usages*, Springer, Berlín, 2007.
- [43] J. S. CHIPMAN, The foundations of utility, *Econometrica* **28** (1960) (2), 193–224.
- [44] K. CIESIELSKI, *Set theory for the working mathematician*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [45] N. CUESTA-DUTARI, Teoría decimal de los tipos de orden, *Rev. Mat. Hisp.-Amer.* **3** (1943), 186–205, 242–268.

- [46] N. CUESTA-DUTARI, Notas sobre unos trabajos de Sierpiński. *Rev. Mat. Hisp.-Amer.* **7** (1947), 128–131.
- [47] N. CUESTA-DUTARI, Matemática del orden (I), *Rev. Acad. Ci. Madrid* **52** (1958), 147–321.
- [48] N. CUESTA-DUTARI, Matemática del orden (II), *Rev. Acad. Ci. Madrid* **52** (1958), 609–770.
- [49] N. CUESTA-DUTARI, Matemática del orden (III), *Rev. Acad. Ci. Madrid* **53** (1959), 33–190.
- [50] N. CUESTA-DUTARI, *La sinfonía del infinito. Y ya en el paraíso de Euler (99 lecciones de análisis matemático)*, Ediciones Universidad de Salamanca, 1981.
- [51] J. R. DE MIGUEL, J. C. CANDEAL Y E. INDURÁIN, Archimedeaness and additive utility on totally ordered semigroups, *Semigroup Forum* **52** (1996) (3), 335–347.
- [52] G. DEBREU, *Representation of a preference ordering by a numerical function*, en R. M. Thrall, C. H. Coombs y R. L. Davies (eds.), *Decision Processes*, 159–165, Wiley, Nueva York, 1954.
- [53] G. DEBREU, *Theory of value. An axiomatic analysis of economic equilibrium*, Yale University Press, New Haven y Londres, 1959.
- [54] G. DEBREU, Continuity properties of Paretian utility, *Internat. Economic Rev.* **5** (1964), 285–293.
- [55] R. DEDEKIND, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1888.
- [56] J. DIEUDONNÉ, *Fundamentos de análisis moderno*, Reverté, Barcelona, 1966.
- [57] J. P. DOIGNON, A. DUCAMP Y J. C. FALMAGNE, On realizable biorders and the biorder dimension of a relation, *J. Math. Psych.* **28** (1984) (1), 73–109.
- [58] S. EILENBERG, Ordered topological spaces, *Amer. J. Math.* **63** (1941), 39–45.
- [59] A. ESTEVAN, Semiorders and continuous Scott-Suppes representations. Debreu's Open Gap Lemma with a threshold, *J. Math. Psych.* **113** (2023), 102754.
- [60] A. ESTEVAN, J. GUTIÉRREZ GARCÍA Y E. INDURÁIN, Numerical representation of semiorders, *Order* **30** (2013) (2), 455–462.
- [61] M. ESTÉVEZ TORANZO Y C. HERVÉS BELOSO, On the existence of continuous preference orderings without utility representations, *J. Math. Econom.* **24** (1995) (4), 305–309.
- [62] P. C. FISHBURN, Intransitive indifference with unequal indifference intervals, *J. Math. Psych.* **7** (1970), 144–149.
- [63] P. C. FISHBURN, Intransitive indifference in preference theory: A survey, *Oper. Res.* **18** (1970) (2), 207–228.
- [64] P. C. FISHBURN, *Utility theory for decision making*, Wiley, Nueva York, 1970.
- [65] P. C. FISHBURN, Interval representations for interval orders and semiorders, *J. Math. Psych.* **10** (1973), 91–105.
- [66] P. C. FISHBURN, *Interval orders and interval graphs*, Wiley, Nueva York, 1985.

- [67] I. FLEISCHER, Embedding linearly ordered sets in real lexicographic products, *Fund. Math.* **49** (1961), 147–150.
- [68] L. FUCHS, *Partially ordered algebraic systems*, Pergamon Press, Oxford, 1963.
- [69] G. HERDEN, On the existence of utility functions, *Math. Social Sci.* **17** (1989) (3), 297–313.
- [70] O. HÖLDER, Der Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass, *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sachsichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math. Phys. Kl.* **53** (1901), 1–64.
- [71] E. INDURÁIN Y V. KNOBLAUCH, On topological spaces whose topology is induced by a binary relation, *Quaest. Math.* **36** (2013) (1), 47–65.
- [72] J. Y. JAFFRAY, Existence of a continuous utility function: an elementary proof, *Econometrica* **43** (1975) (5-6), 981–983.
- [73] A. Y. KLIMENKO, Intransitivity in theory and in the real world, *Entropy* **17** (2015) (6), 4364–4412.
- [74] R. D. LUCE, Semiorders and a theory of utility discrimination, *Econometrica* **24** (1956), 178–191.
- [75] D. J. LUTZER Y H. R. BENNET, Separability, the countable chain condition and the Lindelöf property on linearly orderable spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **23** (1969) (3), 664–667.
- [76] K. L. MANDERS, On JND representations of semiorders, *J. Math. Psych.* **24** (1981) (3), 224–248.
- [77] G. B. MEHTA, *Preference and utility*, en S. Barberà, P. Hammond y C. Seidl (eds.), *Handbook of utility theory*, vol. 1, 1–47, Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, 1999.
- [78] A. N. MILGRAM, Partially ordered sets, separating systems and inductiveness, *Reports of a Mathematical Colloquium*, 2nd series, no. 1, 18–30, Notre Dame University Press, 1939.
- [79] P. K. MONTEIRO, Some results on the existence of utility functions on path connected spaces, *J. Math. Econom.* **16** (1987) (2), 147–156.
- [80] L. NACHBIN, *Topology and order*, Van Nostrand Reinhold, Nueva York, 1970.
- [81] P. J. NYIKOS Y H. C. REICHEL, Topologically orderable groups, *General Topology Appl.* **5** (1975) (3), 195–204.
- [82] E. OLÓRIZ, J. C. CANDEAL Y E. INDURÁIN, Representability of Interval Orders, *J. Econom. Theory* **78** (1998) (1), 219–227.
- [83] M. PIRLOT Y P. VINCKE, *Semiorders. Properties, Representations, Applications*, Kluwer, Dordrecht, 1997.
- [84] S. PURISCH, A history of results on orderability and suborderability, *Handbook of the history of general topology*, vol. 2, 689–702, Kluwer, Dordrecht, 1998.
- [85] D. SCOTT Y P. SUPPES, Foundational aspects of theories of measurement, *J. Symbolic Logic* **23** (1958), 113–128.
- [86] J. VAN DALEN Y E. WATTEL, A topological characterization of ordered spaces, *General Topology Appl.* **3** (1973), 347–354.

- [87] N. WIENER, A contribution to the theory of relative position, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **17** (1914), 441–449.
- [88] G. YI, Continuous extension of preferences, *J. Math. Econom.* **22** (1993) (6), 547–555.

ESTEBAN INDURÁIN, INAMat² (INSTITUTE FOR ADVANCED MATERIALS AND MATHEMATICS) Y DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA, INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA. 31006 PAMPLONA.

Correo electrónico: steiner@unavarra.es

Página web: <https://www.unavarra.es/pdi?uid=17>