Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri Ramírez y Emilio Fernández Moral

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Madre de Dios 53, 26006, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 31 de octubre de 2025.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco ($\star$) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 505. *Propuesto por Paolo Perfetti, Università degli studi di Roma Tor Vergata, Roma, Italia.*

Sean a y b valores reales y

$$L(a,b)=\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x^a)}{x^b}\,dx.$$

Evaluar $L(a,b)$ para los valores de a y b que sea posible.

Problema 506. *Propuesto por Mihály Bencze, Braşov, Rumanía.*

Sean $a_1,\dots,a_n$ valores reales positivos y $0<b\le c$. Probar que

$$\sum_{\text{cíclica}} \frac{(n-1)a_1-(a_2+\cdots+a_n)}{\sqrt{a_2+\cdots+a_n}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{(c-b)\sqrt{(n-1)(a_2+\cdots+a_n)}}{(n-1)bc+a_2+\cdots+a_n}\right)\ge 0.$$

PROBLEMA 507. *Propuesto por Daniel Sitaru, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Sean $x \in (0, \pi/2)$ y $\{F_n\}_{n\geq 0}$ la sucesión de los números de Fibonacci, definida por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ si $n \geq 2$. Probar que

$$\frac{F_n^2}{1 + F_n^2 \csc^2 x} + \frac{F_{n+1}^2}{1 + F_{n+1}^2 \sec^2 x} \leq \frac{F_{2n+1}}{1 + F_{2n+1}}.$$

PROBLEMA 508. *Propuesto por Ángeles Carmona y Andrés M. Encinas, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.*

Caracterizar los valores complejos $c_0, \ldots, c_m$, con $m \geq 2$, para los que la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} c_k \log(n+k)$$

es convergente y, en ese caso, hallar su suma.

PROBLEMA 509. *Propuesto por Marian Ursărescu, "Roman-Vodă" National College, Roman, Rumanía.*

Sean z_1, z_2 y z_3 tres números complejos distintos de módulo uno. Probar que si se cumple la condición

$$3z_1z_2z_3|(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)| + \sum_{\text{cíclica}} \big(z_1(z_2 - z_3)^2|z_2 - z_3|\big) = 0,$$

entonces z_1, z_2 y z_3 son los afijos de los vértices de un triángulo equilátero.

PROBLEMA 510. *Propuesto por Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.*

Sean A', B' y C', respectivamente, los puntos simétricos de los vértices A, B y C de un triángulo ABC respecto de los lados BC, CA y AB. Sean X, Y y Z, respectivamente, las proyecciones ortogonales del centro W de la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC sobre los lados BC, CA y AB. Demostrar que los baricentros de los triángulos ABC, $A'B'C'$ y XYZ están alineados.

PROBLEMA 511. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.*

Sean a, b, c y d las longitudes de los lados de un cuadrilátero, i y j las longitudes de sus diagonales y m la distancia entre los puntos medios de las diagonales. Probar la relación

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = i^2 + j^2 + 4m^2.$$

Problema 512. *Propuesto por D. M. Bătinetu-Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucarest, y Neculai Stanciu, "George Emil Palade" School, Buzău, Rumanía.*

Si $\{F_n\}_{n\geq 0}$ es la sucesión de los números de Fibonacci, definida por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ si $n \geq 2$, Γ denota la función Gamma de Euler y $m > 0$, calcular

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} \Gamma\left(\frac{x}{n} F_n^{m/n}\right) dx,$$

siendo $a_n = \sqrt[n]{n!}$.

Soluciones

Problema 481. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.*

Sean a, b y c números reales positivos tales que $abc = 1$. Probar que

$$\frac{3}{2} \leq \frac{1}{a^2(b+c)} + \frac{1}{b^2(c+a)} + \frac{1}{c^2(a+b)}.$$

Solución enviada por María Merino Sáenz (estudiante), Universidad de La Rioja, Logroño.

Se trata de una consecuencia directa de la bien conocida desigualdad de Nesbitt

$$\frac{3}{2} \leq \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}, \qquad x, y, z > 0.$$

En efecto, tomando $x = 1/a = bc$, $y = 1/b = ca$ y $z = 1/c = ab$, donde hemos aplicado la relación $abc = 1$, tenemos

$$\frac{3}{2} \leq \frac{1}{a(ca+ab)} + \frac{1}{b(ab+bc)} + \frac{1}{c(bc+ca)} = \frac{1}{a^2(b+c)} + \frac{1}{b^2(c+a)} + \frac{1}{c^2(a+b)}.$$

También resuelto por M. Amengual, F. D. Aranda, C. Beade, I. V. Codreanu (dos soluciones), N. D. Dasireddy, A. Elduque, J. Gómez, M. Gómez, I. Hasanov, Kee-Wai Lau, P. Perfetti, H. Ricardo, C. Sacristán, B. Salgueiro, A. Stadler, D. Văcaru, T. Zvonaru y el proponente.

Nota. Salvo las soluciones remitidas por Kee-Wai Lau, Perfetti y Stadler (que recurren a otras técnicas), las restantes hacen un uso directo de la desigualdad de Nesbitt, como es el caso de la publicada, o dan demostraciones de esta desigualdad o de alguna otra equivalente. La entrada de la Wikipedia `https://en.wikipedia.org/wiki/Nesbitt%27s_inequality` nos facilita hasta nueve demostraciones de la desigualdad de Nesbitt, muchas de las cuales han aparecido en las distintas soluciones recibidas. La demostración que ha incorporado Amengual es especialmente simple y elegante. Usando que

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{y+z}-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 &\iff \frac{x^2}{(y+z)^2} \geq \frac{x}{y+z}-\frac{1}{4}\\ &\iff \frac{x}{y+z}\left(\frac{x}{y+z}+1\right) \geq \frac{2x}{y+z}-\frac{1}{4}\\ &\iff \frac{x}{y+z} \geq \frac{8x-y-z}{4(x+y+z)},\end{aligned}$$

se tiene

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y} \geq \frac{8x-y-z}{4(x+y+z)}+\frac{8y-z-x}{4(x+y+z)}+\frac{8z-x-y}{4(x+y+z)}=\frac{3}{2},$$

con la igualdad ocurriendo si y solo si $x=y=z$.

Queremos observar que partiendo de la desigualdad

$$\left(\frac{x_1}{x_2+\cdots+x_n}-\frac{1}{n-1}\right)^2 \geq 0, \qquad n \geq 2,$$

con $x_1,\ldots,x_n>0$, se puede probar la desigualdad de Nesbitt generalizada

$$\frac{x_1}{x_2+x_3+\cdots+x_n}+\frac{x_2}{x_1+x_3+\cdots+x_n}+\cdots+\frac{x_n}{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}} \geq \frac{n}{n-1}.$$

PROBLEMA 482. *Propuesto por Seán M. Stewart, King Abdullah University of Science and Technology, Thuwal, Arabia Saudita.*

Si n es un entero positivo, evaluar

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n-2}}{(1+x^2)^n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-k-1}{k}\left(\frac{1+x^2}{4x^2}\right)^k\right)dx.$$

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo, modificada por los editores.

Denotando por S_n la suma a evaluar, vamos a probar que $S_n=\pi/2^n$.

Como, para $0<a+1/2<b$,

$$\int_0^\infty \frac{x^{2a}}{(1+x^2)^b}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{t^{a-1/2}}{(1+t)^b}\,dt=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(a+1/2)\,\Gamma(b-a-1/2)}{\Gamma(b)},$$

resulta claro, tomando $a=n-k-1$ y $b=n-k$, que

$$S_n=\sqrt{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2^{2k+1}}\binom{n-k-1}{k}\frac{\Gamma(n-k-1/2)}{(n-k-1)!}=\sqrt{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2^{2k+1}}\frac{\Gamma(n-k-1/2)}{k!(n-2k-1)!}.$$

Usando la fórmula de duplicación de Legendre para la función Gamma

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\,\Gamma(z+1/2)}{\sqrt{\pi}}$$

con $z = n-k-1/2$, se puede comprobar que

$$\frac{1}{2^{2k+1}}\frac{\Gamma(n-k-1/2)}{k!(n-2k-1)!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}(n-1)!}\binom{n-1}{k}(2n-2k-2)(2n-2k-3)\cdots(n-2k)$$

y

$$S_n = \frac{\pi}{2^{2n-1}(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}(2n-2k-2)(2n-2k-3)\cdots(n-2k).$$

Ahora, puesto que

$$(2n-2k-2)(2n-2k-3)\cdots(n-2k) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}x^{2(n-k-1)}\bigg|_{x=1},$$

aplicando el binomio de Newton tenemos

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\pi}{2^{2n-1}(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}x^{2(n-k-1)}\bigg|_{x=1} \\ &= \frac{\pi}{2^{2n-1}(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^{n-1}\bigg|_{x=1}. \end{aligned}$$

Finalmente, si $P_k(x)$ denota el k-ésimo polinomio de Legendre, por la fórmula de Rodrigues se verifica que

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k$$

y

$$S_n = \frac{\pi}{2^n}P_{n-1}(1) = \frac{\pi}{2^n},$$

ya que $P_n(1) = 1$.

También resuelto por M. L. Glasser (dos soluciones), P. Perfetti, A. Stadler y el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.

Problema 483. *Propuesto por Ovidiu Furdui y Alina Sîntămărian, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{1}{(n+3)^2}+\cdots\right)-\frac{1}{2n}\right).$$

Solución enviada por Kee-Wai Lau, Honk Kong, China.

Denotando por S la suma a evaluar, probaremos que $S = \pi^2/16$.

Si
$$f(n) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{1}{(n+3)^2} + \cdots,$$
veamos que
$$\sum_{n=1}^{m} \left(nf(n) - \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{4} \left(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} - (2m+1)f(m+1) + f(1) \right) \tag{1}$$
y para ello procederemos por inducción. Usando la identidad
$$f(n+1) = \frac{1}{n^2} - f(n), \tag{2}$$
se tiene que
$$1 - 3f(2) + f(1) = -2 + 4f(1) = 4\left(f(1) - \frac{1}{2} \right)$$
y el caso $m = 1$ de (1) está probado. Ahora supongamos que (1) es cierta para un cierto m y veamos, aplicando de nuevo (2), que también se verifica para $m+1$. En efecto,
$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{m+1} \left(nf(n) - \frac{1}{2n} \right) \\
&\quad = \frac{1}{4} \left(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} - (2m+1)f(m+1) + f(1) \right) + (m+1)f(m+1) - \frac{1}{2(m+1)} \\
&\quad = \frac{1}{4} \left(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} + (2m+3)f(m+1) + f(1) - \frac{2}{m+1} \right) \\
&\quad = \frac{1}{4} \left(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} + (2m+3)\left(\frac{1}{(m+1)^2} - f(m+2) \right) + f(1) - \frac{2}{m+1} \right) \\
&\quad = \frac{1}{4} \left(\sum_{n=1}^{m+1} \frac{1}{n^2} - (2m+3)f(m+2) + f(1) \right)
\end{aligned}$$
y la prueba de (1) está concluida.

Finalmente, aplicando las desigualdades
$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} < f(n) < \frac{1}{n^2}$$
y las identidades
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{y} \qquad f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

tomando límite en (1) cuando m tiende a infinito, llegamos a que

$$S = \lim_{m\to\infty} \left(nf(n) - \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{4} \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} - (2m+1)f(m+1) + f(1) \right) = \frac{\pi^2}{16}.$$

También resuelto por N. S. Dasireddy, P. Perfetti, B. Salgueiro, A. Stadler y los proponentes. Se ha recibido una solución incorrecta.

Problema 484. *Propuesto por Ricardo Barroso, Sevilla.*

Sea H el ortocentro de un triángulo ABC y ω una circunferencia cualquiera de centro H. Dado un punto $V \in \omega$, sea r la recta tangente a ω en V, sean r_a, r_b y r_c, respectivamente, las rectas simétricas de r respecto de los lados BC, CA y AB, y sea $V_aV_bV_c$ el triángulo formado por las rectas r_a, r_b y r_c.

Sean V y V' dos puntos cualesquiera de ω. Probar que el triángulo $V_aV_bV_c$ se transforma en el triángulo $V_a'V_b'V_c'$ por un giro de ángulo VHV' y centro en un cierto punto W de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

Solución compuesta a partir de las enviadas, independientemente, por Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba, y Saturnino Campo Ruiz, Salamanca.

En primer lugar podemos ver que el triángulo $T_V := V_aV_bV_c$ es semejante al triángulo órtico del triángulo $T := ABC$. Supondremos bien conocido que, si los ángulos de T son $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ y $\angle BCA = \gamma$, entonces los ángulos de su triángulo órtico son $\pi - 2\alpha$, $\pi - 2\beta$ y $\pi - 2\gamma$.

Si r corta a los lados AB, AC y BC en los puntos M, N y Q, formando en ellos ángulos η, θ y φ, respectivamente (véase la figura 1), se tienen las relaciones

$$\alpha = \pi - (\eta + \theta), \quad \beta = \eta - \varphi, \quad \gamma = \theta + \varphi.$$

Entonces, podemos calcular los ángulos de T_V

$$\alpha' := \angle V_cV_aV_b = \angle NV_aM = \pi - 2\eta - 2\theta = \pi - 2\alpha,$$
$$\beta' := \angle V_aV_bV_c = \pi - \angle MV_bQ = \pi - (\pi - (\pi - 2\eta + 2\varphi)) = \pi - 2(\eta - \varphi) = \pi - 2\beta$$

y, por tanto, $\gamma' := \angle V_bV_cV_a = \pi - 2\gamma$. De modo que el triángulo T_V es semejante al triangulo órtico del triángulo T. Luego todos los triángulos T_V así construidos serán semejantes entre sí, independientemente de la posición del punto V sobre la circunferencia ω.

En segundo lugar vamos a probar que el incentro J del triángulo T_V está en la circunferencia Γ circunscrita al triángulo T. Por la construcción realizada, C es el incentro del triángulo V_cNQ y, por tanto, CV_c es una bisectriz interior de T_V. Las rectas CA y BA son dos bisectrices exteriores del triángulo MNV_a y entonces A es el excentro de este triángulo opuesto al vértice V_a, en consecuencia AV_a es otra bisectriz de este triángulo y también del triángulo T_V.

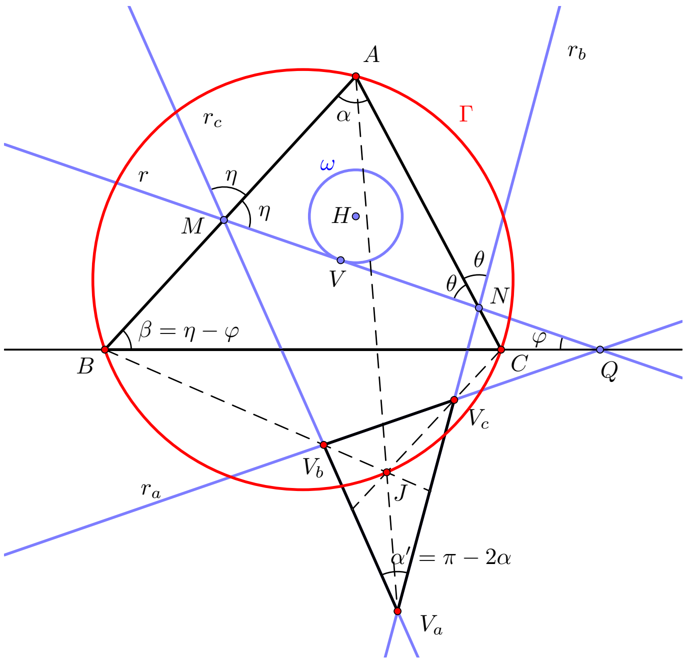

Figura 1: Primer esquema para la solución del problema 484.

Si nos fijamos ahora en el triángulo V_bJV_c, se tiene

$$\angle V_bJV_c = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha'}{2} = \pi - \alpha$$

y el cuadrilátero $ABJC$ es cíclico, así que $J \in \Gamma$.

Podemos pasar ya al asunto central del problema (véase la figura 2). Si V y V' son dos puntos cualesquiera de ω, sus triángulos asociados $T_V = V_aV_bV_c$ y $T_{V'} = V_a'V_b'V_c'$ son semejantes. También son congruentes, pues para pasar de la recta r tangente a ω en V a la recta r' tangente a ω en V' solo hay que hacer un giro de ángulo $\angle VHV'$, que es una transformación isométrica. El ángulo de giro es el suplementario del ángulo que forman las rectas r y r' ya que, si $r \cap r' = \{E\}$, los puntos V, E, V' y H son concíclicos.

Las bisectrices homólogas V_aJ y $V_a'J'$ se cortan en el punto A, por consiguiente el centro de semejanza de los triángulos T_V y $T_{V'}$ estará en la circunferencia que pasa por los puntos J, J' y A, que es la circunferencia Γ circunscrita al triángulo T. Como J y J' son puntos homólogos en la semejanza, el centro de semejanza (el centro del giro que transforma T_V en $T_{V'}$) será uno de los extremos del diámetro de Γ perpendicular a JJ'.

Para distinguir el centro del giro consideremos que si en una semejanza el segmento XY se transforma en $X'Y'$ y $XY \cap X'Y' = \{L\}$, entonces el centro de semejanza queda definido por el punto común, distinto de L, de las circunferencias que pasan

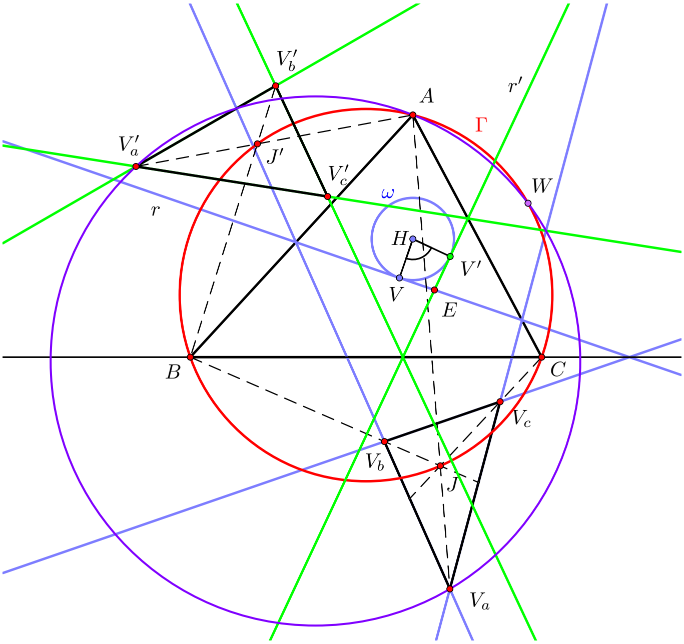

Figura 2: Segundo esquema para la solución del problema 484.

por $XX'L$ y $YY'L$. De modo que en nuestro caso, el centro del giro es el punto de intersección distinto de A de Γ y la circunferencia circunscrita al triángulo $V_aV_a'A$.

Finalmente, considerando la posición especial del punto V en la que el radio HV es paralelo a uno de los lados de T, se puede verificar que el inradio r_V de T_V es siempre igual al radio r_ω de la circunferencia ω, con lo que se pueden hallar las siguientes expresiones para los lados de T_V:

$$\begin{aligned} V_aV_b &= r_\omega(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta), \\ V_bV_c &= r_\omega(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma), \\ V_cV_a &= r_\omega(\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha). \end{aligned}$$

También resuelto por el proponente.

Problema 485. *Propuesto por Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.*

Los números reales positivos a, b y c cumplen las desigualdades

$$a + b > c, \qquad b + c > a, \qquad c + a > b \qquad \text{y} \qquad a + b + c < \pi.$$

Probar que, entonces, $\operatorname{sen} a$, $\operatorname{sen} b$ y $\operatorname{sen} c$ son las longitudes de los lados de un triángulo cuya área F verifica

$$8F < \operatorname{sen}(2a) + \operatorname{sen}(2b) + \operatorname{sen}(2c).$$

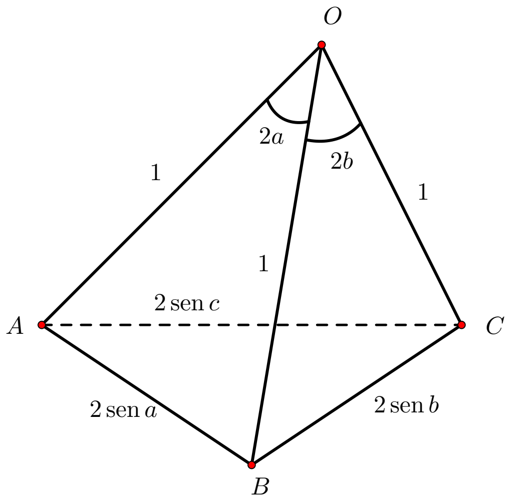

Figura 3: Esquema para la solución del problema 485.

Solución enviada por el proponente.

Los datos del problema permiten ([1, págs. 180 y 184–185]) la construcción de un tetraedro $OABC$ con ángulos $2a$, $2b$, $2c$ en el vértice O y aristas OA, OB, OC de longitud unidad (figura 3). La base de este tetraedro es un triángulo ABC de lados $2\operatorname{sen} a$, $2\operatorname{sen} b$, $2\operatorname{sen} c$. Con esto queda probada la primera afirmación del enunciado, que $\operatorname{sen} a$, $\operatorname{sen} b$ y $\operatorname{sen} c$ son las longitudes de los lados de un triángulo.

La segunda afirmación resulta utilizando que las áreas de dos triángulos semejantes son entre sí como el cuadrado de su razón de semejanza y que el área de la base ABC del tetraedro $OABC$ es necesariamente más pequeña que la suma de las áreas de sus caras laterales:

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} a + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} b + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} c > \text{área } \triangle ABC = 4F.$$

También resuelto por J. Gómez y A. Stadler.

NOTA. B. Salgueiro envía un comentario advirtiendo que este problema, propuesto por la Unión Soviética, fue seleccionado tanto en la *lista larga* como en la *lista corta* de problemas para la 28.ª IMO de 1987 [2, problema 68, pág. 211, y problema 19, pág. 214] y que es posible acceder a la solución original [2, pág. 497]. De hecho la solución del proponente es esencialmente esa misma. Con todo, hemos decidido publicarla porque en la rara referencia que aporta, una publicación rumana del año 1986 que es anterior por cierto a la 28.ª IMO, se demuestra efectivamente [1, teorema 5, pág. 184] que las condiciones del enunciado del problema, que es sencillo ver que son necesarias para la existencia de un tetraedro $OABC$ con ángulos $\angle AOB = 2a$, $\angle BOC = 2b$ y $\angle COA = 2c$, son también suficientes, lo que no es tan inmediato, y sobre lo cual se pasa de largo en la redacción de la solución del problema en [2].

Referencias

[1] D. Brânzei, S. Anita y C. Cocea, *Planul şi Spaţiul Euclidian*, Editura Academiei Republicii Socialiste Románia, Bucarest, 1986.

[2] D. Djukić, V. Janković, I. Matić y N. Petrović, *The IMO Compendium. A Collection of problems suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2004*, Springer, Nueva York, 2004.

Problema 486. *Propuesto por Florică Anastase, "Alexandru Odobescu" High school, Lehliu-Gară, y Marian Ursărescu, "Roman-Vodă" National College, Roman, Rumanía.*

Probar que en todo triángulo ABC se cumple la desigualdad

$$r_a^5 r_b + r_b^5 r_c + r_c^5 r_a \geq 3(4Rr + r^2)^3,$$

siendo respectivamente R, r y r_a, r_b, r_c los radios de las circunferencias circunscrita, inscrita y exinscritas.

Solución enviada, independientemente, por Daniel Văcaru, "Maria Teiuleanu" National Economic College, Piteşti, y Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramures, Rumanía.

Escribamos

$$r_a^5 r_b + r_b^5 r_c + r_c^5 r_a = \frac{r_a^5}{\frac{1}{r_b}} + \frac{r_b^5}{\frac{1}{r_c}} + \frac{r_c^5}{\frac{1}{r_a}}.$$

Usando la desigualdad

$$\frac{a_1^p}{b_1^q} + \frac{a_2^p}{b_2^q} + \frac{a_3^p}{b_3^q} \geq 3^{1+q-p} \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^p}{(b_1 + b_2 + b_3)^q}, \qquad p \geq 1, \quad q \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

que se sigue de la desigualdad de Hölder y la desigualdad de medias, se obtiene

$$\frac{r_a^5}{\frac{1}{r_b}} + \frac{r_b^5}{\frac{1}{r_c}} + \frac{r_c^5}{\frac{1}{r_a}} \geq \frac{1}{27} \frac{(r_a + r_b + r_c)^5}{\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}} = \frac{1}{27} \frac{(4R + r)^5}{\frac{1}{r}},$$

sustituyendo al final las relaciones $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ y $1/r_a + 1/r_b + 1/r_c = 1/r$, que se suponen bien conocidas.[1]

Sería suficiente ahora probar

$$\frac{r(4R + r)^5}{27} \geq 3(4Rr + r^2)^3 = 3r^3(4R + r)^3,$$

una desigualdad equivalente a

$$4R + r \geq 9r,$$

o $R \geq 2r$. Pero esta última es la conocida desigualdad de Euler.

[1] Ver, por ejemplo, H.S.M. Coxeter, *Fundamentos de Geometría*, Limusa-Wiley, México, 1971, sección 1.5: ecuación 1.56 y ejercicio 1.5.2 (*Nota de los editores*).

También resuelto por Kee-Wai Lau, N. S. Dasireddy, P. Perfetti, B. Salgueiro, A. Stadler, I. V. Codreanu (una segunda solución) y los proponentes. Se ha recibido una solución incompleta.

NOTA. La pieza fundamental de la elegante solución que hemos presentado es la desigualdad (1). Sin embargo, puesto que su prueba no es obvia, nos parece adecuado dar una demostración de la misma.

Como $q + 1 - q = 1$, por la desigualdad de Hölder se tiene

$$\begin{aligned}(b_1 + b_2 + b_3)^q &\left(\frac{a_1^p}{b_1^q} + \frac{a_2^p}{b_2^q} + \frac{a_3^p}{b_3^q}\right) 3^{-q} \\ &= (b_1 + b_2 + b_3)^q \left(\frac{a_1^p}{b_1^q} + \frac{a_2^p}{b_2^q} + \frac{a_3^p}{b_3^q}\right)(1+1+1)^{-q} \\ &\geq b_1^q \frac{a_1^p}{b_1^q} 1^{-q} + b_2^q \frac{a_2^p}{b_2^q} 1^{-q} + b_3^q \frac{a_3^p}{b_3^q} 1^{-q} \\ &= a_1^p + a_2^p + a_3^p \geq 3^{1-p}(a_1 + a_2 + a_3)^p,\end{aligned}$$

donde en el último paso hemos aplicado la desigualdad de medias

$$\frac{a_1^p + a_2^p + a_3^p}{3} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right)^p, \qquad p \geq 1.$$

Solamente Salgueiro añade a su solución que, en la desigualdad del problema, la igualdad se alcanza si y solo si el triángulo ABC es equilátero.

PROBLEMA 487. *Propuesto por Óscar Ciaurri, Universidad de La Rioja, Logroño.*

Sea $n \geq 1$ un entero positivo. Probar que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} H_{2i-1} \leq H_n,$$

donde $H_j = 1 + 1/2 + \cdots + 1/j$ es el j-ésimo número armónico.

Primera solución, enviada por Javier Rández Ibáñez (estudiante), Universidad de La Rioja, Logroño.

Para deducir esta desigualdad solo necesitamos demostrar una desigualdad más simple. En concreto, probaremos que si $m \geq 1$ es un entero positivo y $1 \leq j \leq m$, entonces

$$H_{2m-j} + H_j \leq 2H_m \tag{1}$$

y a partir de esta obtendremos el resultado. Si en (1) se toma $j = m$, se tiene claramente una igualdad, y si $1 \leq j < m$ se cumple que

$$\begin{aligned}H_{2m-j} + H_j = H_m + \sum_{i=1}^{m-j} \frac{1}{m+i} + H_j &< H_m + \sum_{i=1}^{m-j} \frac{1}{j+i} + H_j \\ &= H_m + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i} = 2H_m.\end{aligned}$$

Así, aplicando (1), llegamos a

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H_{2i-1} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(H_{2i-1} + H_{2n-(2i-1)}) \le \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} 2H_n = H_n.$$

Notar que la desigualdad es igualdad si y solo si $n = 1$.

Haciendo uso de (1) también podemos probar una desigualdad similar para la suma de números armónicos de índice par. En efecto,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H_{2i} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(H_{2i} + H_{2(n+1)-2i}) \le \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} 2H_{n+1} = H_{n+1}, \tag{2}$$

donde la igualdad de nuevo se cumple si y solo si $n = 1$.

Segunda solución, enviada por Santiago Alzate, Universidad de Antioquia, Colombia.

Es conocido que el n-ésimo número armónico puede escribirse como

$$H_n = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}\, dx.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} H_{2i-1} &= \sum_{i=1}^{n}\int_0^1 \frac{1-x^{2i-1}}{1-x}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{1-x}\sum_{i=1}^{n}(1-x^{2i-1})\, dx\\ &= \int_0^1 \frac{1}{1-x}\left(n - \sum_{i=1}^{n} x^{2i-1}\right) dx.\end{aligned}$$

Ahora, como por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica

$$\sum_{i=1}^{n} x^{2i-1} \ge n\sqrt[n]{xx^3\cdots x^{2n-1}} = nx^n, \qquad x > 0,$$

donde hemos aplicado que $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} H_{2i-1} \le n\int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}\, dx = nH_n$$

y hemos concluido.

Tercera solución, enviada por José Luis Arregui, Universidad de La Rioja, Logroño.

Si llamamos

$$a_n = n\,H_n - \sum_{i=1}^{n} H_{2i-1},$$

tenemos que probar que $a_n \geq 0$ para cada $n \geq 1$. Pero esto, por ser $a_1 = 0$, es inmediato si demostramos que $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente. En efecto, dado $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (n+1)H_{n+1} - n\,H_n - \sum_{i=1}^{n+1} H_{2i-1} + \sum_{i=1}^{n} H_{2i-1} \\ &= n(H_{n+1} - H_n) + H_{n+1} - H_{2(n+1)-1} \\ &= \frac{n}{n+1} + H_{n+1} - H_{2n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= \sum_{i=2}^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+i}\right) > 0 \end{aligned}$$

porque la última suma es de términos positivos.

También resuelto por S. Betancur, J. Gómez, E. Lanchares y V. Lanchares (conjuntamente), Kee-Wai Lau, P. Perfetti, Á. Plaza, C. Sacristán, A. Stadler y el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.

NOTA. Las soluciones no publicadas mantienen un patrón común: utilizan un argumento de inducción que reduce la prueba a comprobar la desigualdad $H_{2n+1} < H_n + 1$ (o alguna otra similar en la que se cambia el 1 por otro factor como, por ejemplo, $n/(n+1)$). Los procedimientos para estudiar esta última desigualdad son variados y van desde argumentos de inducción a estimaciones integrales, pasando por pruebas directas.

La expresión para los números armónicos generalizados

$$H_x = \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}\,dt, \qquad x > -1,$$

utilizada en la segunda de las soluciones publicadas con $x = n$, permite dar una interesante extensión de la desigualdad propuesta. En concreto, si $x_1, \ldots, x_n \geq 0$, $w_1, \ldots, w_n > 0$ y $w = w_1 + \cdots + w_n > 0$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{w_k}{w} H_{x_k} \leq H_{\frac{w_1x_1+\cdots+w_nx_n}{w}}. \tag{3}$$

La prueba se sigue como en la segunda solución observando que, por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica ponderadas,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{w_k t^{x_k}}{w} \geq t^{\frac{w_1x_1+\cdots+w_nx_n}{w}}.$$

Tomando en (3) los valores $x_k = 2k-1$ y $w_k = 1$, como $x_1 + \cdots + x_n = n^2$ y $w = n$, se obtiene la desigualdad propuesta. La elección $x_k = 2k$ y $w_k = 1$, puesto que $x_1 + \cdots + x_n = n(n+1)$ y $w = n$, da lugar a (2) en la primera solución.

Problema 488. *Propuesto por Mihály Bencze, Braşov, Rumanía.*

Sean $a, b, c, d \geq 2$. Probar que

$$\sum_{\text{cíclica}} \log_a \left(abc + a + b + c + d^2\right) \geq \frac{32}{5} + 16 \log_{abcd}(5\sqrt[5]{2}).$$

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Demostraremos que si $a, b, c, d \geq 2$, entonces

$$\sum_{\text{cíclica}} \log_a \left(abc + a + b + c + d^2\right) \geq \frac{32}{5} + 16 \log_{abcd} \left(\frac{9}{\sqrt[5]{8}}\right),$$

con la igualdad ocurriendo si y solo si $a = b = c = d = 2$. Puesto que $9/\sqrt[5]{8} > 5\sqrt[5]{2}$, nuestro resultado prueba que la desigualdad del enunciado es estricta.

Aplicando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, tenemos

$$\begin{aligned} abc + a + b + c + d^2 &= \frac{abc}{4} + \frac{abc}{4} + \frac{abc}{4} + \frac{abc}{4} + a + b + c + \frac{d^2}{2} + \frac{d^2}{2} \\ &\geq \frac{9}{\sqrt[9]{2^{10}}} \sqrt[9]{(abc)^5 d^4} \geq \frac{9}{\sqrt[5]{2^3}} \sqrt[5]{(abcd)^2}, \end{aligned}$$

donde en ambas desigualdades la igualdad ocurre si y solo si $a = b = c = d = 2$. De este modo

$$\log_a \left(abc + a + b + c + d^2\right) \geq \log_a \left(\frac{9}{\sqrt[5]{8}} \sqrt[5]{(abcd)^2}\right) = \frac{2}{5}(1 + \log_a(bcd)) + \frac{\log\left(\frac{9}{\sqrt[5]{8}}\right)}{\log a}$$

y

$$\sum_{\text{cíclica}} \log_a \left(abc + a + b + c + d^2\right) \geq \frac{8}{5} + \frac{2}{5} \sum_{\text{cíclica}} \log_a(bcd) + \log\left(\frac{9}{\sqrt[5]{8}}\right) \sum_{\text{cíclica}} \frac{1}{\log a},$$

con la igualdad dándose si y solo si $a = b = c = d = 2$. La desigualdad entre las medias aritmética y geométrica implica

$$\log_x y + \log_y x \geq 2\sqrt{\log_x y \log_y x} = 2,$$

con igualdad si y solo si $x = y$, y, por tanto,

$$\sum_{\text{cíclica}} \log_a(bcd) \geq 16.$$

Asimismo, usando la desigualdad entre las medias armónica y aritmética tenemos

$$\log\left(\frac{9}{\sqrt[5]{8}}\right) \sum_{\text{cíclica}} \frac{1}{\log a} \geq \log\left(\frac{9}{\sqrt[5]{8}}\right) \frac{4^2}{\log a + \log b + \log c + \log d} = 16 \log_{abcd}\left(\frac{9}{\sqrt[5]{8}}\right),$$

lo que nos permite concluir que

$$\sum_{\text{cíclica}} \log_a \left(abc + a + b + c + d^2\right) \geq \frac{32}{5} + 16 \log_{abcd} \left(\frac{9}{\sqrt[5]{8}}\right)$$

con la igualdad cumpliéndose si y solo si $a = b = c = d = 2$.

También resuelto por el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.