Las medallas Fields

Sección a cargo de

Adolfo Quirós Gracián

La obra de Alexander Grothendieck[1]

por

Leovigildo Alonso Tarrío y Ana Jeremías López

1. Introducción

Alexander Grothendieck recibió la medalla Fields en 1966 por sus contribuciones al Álgebra Homológica y la Geometría Algebraica[2]. Esto apenas da una idea del alcance de sus trabajos y sobre todo de su "visión". Grothendieck es un tipo de matemático que pone el énfasis en la construcción de vastas teorías que nos permiten vislumbrar mucho más allá de nuestra presente percepción. Nos abre puertas a puntos de vista que ponen en el punto de mira problemas que parecían difícilmente resolubles. Y lo más sorprendente es que lo ha hecho una y otra vez, abriendo campos insospechados y tendiendo puentes entre disciplinas alejadas.

Uno de los objetivos de sus constantes reflexiones era deshacerse de "hipótesis inútiles". Ello le granjeó la fama de generalizar por el gusto de hacerlo, pero el tiempo ha demostrado que éste era el enfoque adecuado. Su metodología consistía en desentrañar el "yoga" (en sus propias palabras) de una teoría antes de embarcarse en el descubrimiento, es decir, imaginar de antemano cuáles son las relaciones que deben regir entre los objetos de una teoría y cuál debe ser el lenguaje adecuado (frecuentemente en términos de categorías) en el que expresarlas. Éste es un punto de vista que muchos de sus seguidores continúan practicando, buscar resultados con la iluminación de una intuición previa. Los campos que ha tocado han cambiado profundamente debido a su influencia. Es, en resumen, uno de los grandes matemáticos vivos.

En esta reseña, tras mencionar algunos aspectos de su vida, trataremos de exponer sus ideas maestras (en su propia terminología) siguiendo un listado de temas del propio Grothendieck. Comentaremos en detalle los ocho primeros, dejando los restantes para un párrafo común titulado "sueños matemáticos"

[1]Trabajo realizado dentro del proyecto de investigación de la DGESIC PB97-0530. Agradecemos las indicaciones útiles de Antonio G. Tato, Marta Pérez, M^a. Jesús Vale y el editor de esta sección.

[2]Puede consultarse el informe realizado por Serre para el comité Fields en [17].

que trata los temas sobre los que reflexionó pero no produjo resultados concretos.

2. Notas Biográficas

Grothendieck nació en Berlín el 28 de marzo de 1928 en el seno de una familia de origen ruso. Sus padres eran activistas anarquistas, por ello sufrieron la persecución nazi. El padre fue ejecutado por los nazis, pero la madre logró refugiarse en Francia con el pequeño Alexander. Su fascinación por la Matemática fue muy temprana. Estudió matemáticas en la universidad de Montpellier considerada entonces una universidad "de provincias" con un plan de estudios anticuado que suscitaba en un estudiante brillante y activo toda su capacidad crítica. Su insatisfacción con la noción de volumen que le habían enseñado le llevó a desarrollar una teoría que resultó ser esencialmente equivalente a la teoría de la medida desarrollada por Lebesgue años antes.

Al licenciarse, se trasladó a París donde reside durante el curso 1948-49. Allí se familiarizó con el ambiente matemático en el que destacaban los seminarios dirigidos, entre otros, por H. Cartan. Se desplazó a la Universidad de Nancy en 1949 donde estudió las cuestiones de Análisis Funcional que le plantearon Delsarte, Dieudonné, Godement y Schwartz (un auténtico *dream team*). Para sorpresa de sus mentores, en 1953 tenía a su disposición seis memorias cualquiera de las cuales podría defenderse como una buena tesis según el criterio de su director Dieudonné. Tras sus puestos postdoctorales en Kansas y São Paulo fué contratado por el recién fundado I.H.E.S. (*Institut des Hautes Études Scientifiques*), la réplica francesa al I.A.S. (*Institute of Advanced Studies*) de Princeton. Aquí desarrolló la parte central de su trabajo desplegando una inmensa actividad para desarrollar sus ideas revolucionarias en el campo de la Geometría Algebraica. En el transcurso de la década de los 60 del siglo pasado hace emerger a su alrededor un excelente grupo de trabajo formado por matemáticos jóvenes que seguían sus exposiciones orales y colaboraban activamente en la redacción del seminario "*du Bois Marie*". Al mismo tiempo se decanta su carácter pacifista. En 1966 se niega a recoger la medalla Fields en Moscú como protesta por la represión soviética a la insurrección húngara de 1956. En 1970 muestra su desacuerdo con la financiación del I.H.E.S. proveniente del Ministerio de Defensa. Al no conseguir que el Instituto renuncie a esta financiación, Grothendieck lo abandona.

El I.H.E.S. en los 60

Tras un breve período ligado al C.N.R.S. (*Centre National de la Recherche Scientifique*), pasa, en 1973, a Montpellier donde se incorpora como profesor de la universidad. Aunque continúa reflexionando sobre Matemática, abandona la tarea de publicar. En esta época influirá en el quehacer matemático a través de su correspondencia. En 1984 vuelve al C.N.R.S., retirándose definitivamente en 1988, a los 60 años. Sintiéndose maltratado por la dirección del C.N.R.S. elabora unas memorias (tituladas *Recoltes et Semailles*) en las que arremete contra el panorama general de la Matemática francesa y allegados, lo que le aísla definitivamente del mundo matemático. En estas memorias pone el dedo en la llaga sobre la ética del proceder científico actual. Especialmente pone el acento en el trato que sufren los matemáticos que empiezan frente a las figuras consagradas, y hace un canto a la belleza de construir teorías generales frente a la tarea, más reconocida, de obtener resultados concretos. Sus descalificaciones éticas son probablemente demasiado generalizadas para ser justas. En esa época rechaza, como protesta por este estado de cosas, el premio Crafoord de la Academia Sueca, concedido conjuntamente a él y a Deligne "por su investigación fundamental en Geometría Algebraica". Finalmente, se ha retirado también del mundo en general y vive en los Pirineos franceses sin mantener siquiera un buzón de correo "institucional" en la universidad.

3. Productos tensoriales topológicos

La primera parte de la obra de Grothendieck pertenece al campo del Análisis Matemático. En su tesis define los espacios nucleares y el producto tensorial de espacios localmente convexos [3].

Veamos alguna de las aportaciones de esta tesis. Dados dos espacios vectoriales topológicos, E y F, se trata de definir una construcción análoga al producto tensor de los dos espacios que tenga en cuenta las topologías. Si E y F son de dimensión finita no hay ninguna dificultad, puesto que existe una única topología razonable en $E \otimes F$, que también posee dimensión finita. En el caso de dimensión infinita, Grothendieck propone dos soluciones "razonables" al problema. Una de ellas consiste en completar $E \otimes F$ para la topología más fina que hace la aplicación $E \times F \to E \otimes F$ continua y que denotaremos T_p. La topología T_p se caracteriza también como aquella que posee un sistema fundamental de entornos del 0 formado por las envolturas convexas equilibradas[3] de los productos $U \otimes V$ con U y V entornos fundamentales de 0 en E y F, respectivamente. La compleción de este espacio se denota $E\hat{\otimes}F$. Esta construcción conserva muchas propiedades de E y de F, que no detallaremos. Un ejemplo clave es la identificación $L^1_E(\mu) \cong L^1(\mu)\hat{\otimes}E$, es decir, las funciones μ-medibles de un espacio localmente compacto con valores en un espacio de Banach E se recuperan mediante esta construcción a partir de las funciones escalares μ-medibles. Denotando ahora mediante $(-)'$ el dual *topológico* de un espacio, se tiene una aplicación lineal inyectiva de $E \otimes F$ en las formas bilineales sobre $E' \times F'$. En un dual E', un conjunto equicontinuo H es un subconjunto tal que para un entorno V del 0 en el cuerpo base k, $\cap_{f\in H} f^{-1}(V)$ es un entorno del 0 en E. Consideramos ahora la topología T_e de la convergencia uniforme de los productos $H \times K$,

Grothendieck cerca de 1966

[3]En un espacio vectorial topológico E, un subconjunto A se dice *equilibrado* si $\lambda A \subset A$, para $|\lambda| \leq 1$.

con H un subconjunto equicontinuo de E' y K de F'. Se define $E\hat{\hat{\otimes}}F$ como la compleción de $E \otimes F$ para esta topología. Comparando ambas topologías se obtiene una aplicación lineal continua canónica:

$$E\hat{\otimes}F \longrightarrow E\hat{\hat{\otimes}}F.$$

Un espacio localmente convexo E se dice *nuclear* si para cada espacio localmente convexo F la aplicación citada es un isomorfismo lineal continuo.

A partir de esta noción Grothendieck obtiene una generalización del teorema del núcleo de Schwartz. Si $A \subset E$ es acotado, convexo y equilibrado, $E_A := \cup_{n=1}^{\infty} nA$ es un subespacio normado de E, que es además un espacio de Banach si A es completo. La versión de Grothendieck del teorema del núcleo dice que si E es nuclear y F localmente convexo, toda forma bilineal en $E \times F$ se origina a partir de un espacio de la forma $E'_A\hat{\otimes}F'_B$, con A y B subconjuntos equicontinuos adecuados de E' y F', respectivamente. Este resultado proporciona una descripción cómoda de las formas bilineales continuas en términos de sucesiones del espacio de Banach ℓ^1 y sucesiones equicontinuas en los espacios. Dado que los espacios habituales de distribuciones son nucleares, se tiene así una generalización del teorema de Schwarz. Otro ejemplo de espacio nuclear es el de las funciones holomorfas sobre una variedad analítica compleja, de modo que este trabajo conecta con el punto de vista "transcendente" para el estudio de la Geometría Algebraica que Grothendieck practicará de modo paralelo al algebraico como atestigua, por ejemplo, su aportación al seminario Cartan del curso 1960/61.

Entre sus contribuciones de esta época señalaremos [4], dónde hace una exploración de algunas propiedades de las paridades naturales, definidas en el contexto de las variedades diferenciables $\mathcal{C}^\infty$, entre los espacios de formas y los de corrientes con soporte compacto, por un lado, y entre corrientes y formas con soporte compacto por otro. Ya se presentían aquí algunos de sus futuros temas de investigación (algebraicos).

Después de estos primeros trabajos se interesó más y más por la Teoría de Haces. En 1956, [5, 6], obtuvo resultados de finitud para la cohomología de haces sobre una variedad diferenciable compleja compacta y estudió los fibrados holomorfos sobre la esfera de Riemann, el modelo analítico de la recta proyectiva compleja, temas que ya conectan con sus trabajos posteriores en Geometría Algebraica.

En esta investigación inicial destaca por su búsqueda de construcciones y definiciones "naturales". El espíritu de lo "funtorial" estaba ya implícito en estos primeros pasos.

4. Dualidad

A finales de los 50, durante su estancia en la universidad de Kansas, elabora una teoría general de espacios con haz estructural. Trata de establecer las bases de una tal teoría con la máxima generalidad posible, de modo que los fundamentos del problema tratado puedan, en principio, servir en otros casos.

El siguiente tema que Grothendieck estudia es la dualidad en cohomología. Se trata de trasponer al contexto de las variedades algebraicas el principio de dualidad de Poincaré. Serre ya había probado que la cohomología de grado p con coeficientes en un fibrado de una variedad analítica compleja (no singular) de dimensión n coincide con el dual de la cohomología de grado $n-p$ de las n-formas diferenciales con valores en el fibrado. El mismo Serre prueba en [16] que la topología de Zariski es apropiada para calcular la cohomología de variedades algebraicas con coeficientes en haces coherentes. En este trabajo obtenía la versión algebraica del teorema de dualidad para variedades proyectivas no singulares con coeficientes haces coherentes, a costa de representar el dual de la cohomología mediante un funtor de extensiones (Ext) de haces.

Grothendieck se propone extender este teorema a variedades con singularidades arbitrarias. Antes de nada, generaliza la definición de la cohomología de haces. Los haces de módulos forman una categoría abeliana[4] y el funtor secciones globales es exacto a la izquierda, por tanto, tiene sentido definir los grupos de cohomología como los funtores derivados del funtor secciones globales de haces. La resolución de Godement y el procedimiento de Čech quedan, en consecuencia, como meros procedimientos de cómputo, el último válido sólo en ciertos casos. Estos resultados aparecen en su memoria sobre las categorías abelianas que aparece en 1957 [7], donde sienta las bases de su trabajo posterior en homología. Esta obra fue la pieza de referencia del Álgebra Homológica en los años siguientes.

Aborda a continuación el problema de la generalización del teorema de dualidad y descubre que la condición de Cohen–Macaulay (en los anillos locales de gérmenes de funciones regulares de la variedad) permite una versión de la dualidad formalmente análoga a la obtenida por Serre en el caso no singular. Para ello sustituye el haz de n-formas por un haz definido abstractamente y denominado "haz dualizante", cuya estructura refleja en parte la singularidad de la variedad. Expone esta teoría en la sesión de mayo de 1957 del seminario Bourbaki.

Para poder tratar variedades con singularidades arbitrarias, ha de sustituir el haz dualizante por un complejo. Esto le obliga a replantearse el Álgebra Homológica, que ahora debe tomar como coeficientes complejos de cadenas de objetos de la categoría abeliana generalizando la "hipercohomología" definida por Cartan y Eilenberg para módulos. Necesita así extender el Álgebra Homológica una vez más. El desarrollo de estas ideas constituye el tema que propone a Verdier para su trabajo de tesis doctoral. La noción clave es la de categoría derivada, que está de actualidad por su uso reciente en la teoría de las Representaciones de Álgebras y en la Homotopía Estable. Las ideas de Grothendieck al respecto son esbozadas en su charla en el I.C.M. (Congreso Internacional de Matemáticos) de 1958 en Edimburgo. La teoría de dualidad se publica con todos sus detalles en 1966, ya en el lenguaje de esquemas. La redacta Hartshorne. El trabajo [14] es el resultado de un seminario desarrollado

[4]De hecho muy especial: con generador y límites directos exactos.

por Hartshorne en Harvard en el curso 1963-64, basado en unas “pre-notas” de Grothendieck donde esbozaba la teoría.

La dualidad finalmente se expande a toda una visión cohomológica que se resume en la teoría de las “seis operaciones” que se pueden emparejar por dualidad: tensor–hom, imagen directa–imagen inversa, imagen directa con soporte compacto–imagen inversa excepcional. Esta visión impregnará todas sus reflexiones cohomológicas, especialmente en lo que se refiere a las cohomologías *étale* y cristalina que comentaremos más adelante.

5. Riemann-Roch a la Grothendieck

La fórmula de Riemann-Roch sobre curvas permite determinar la característica de Euler-Poincaré de la curva compleja C con coeficientes en el haz inversible $\mathcal{O}(D)$, asociado a la clase de divisores equivalentes a un divisor dado D. Formulada así se enuncia: $\chi(C, \mathcal{O}(D)) = \deg(D) + 1 - g$, donde g denota un invariante numérico global de la curva, el género, que se identifica con el invariante del mismo nombre considerando el espacio topológico subyacente a C. Existía una generalización clásica al caso de superficies que involucra la paridad de intersección de divisores y dónde figura la clase canónica de divisores, que en una superficie no singular tiene asociado el haz de 2-formas diferenciales. Se plantea pues el problema de calcular la característica de Euler-Poincaré de una variedad no singular X con coeficientes en el haz de secciones de un fibrado. Se suponía que en una tal fórmula debían aparecer las clases características de Chern del fibrado y las del fibrado tangente. Hirzebruch obtiene esta generalización, publicada en 1956 [15]. La fórmula de Hirzebruch es: $\chi(X, \mathcal{E}) = \int \mathrm{ch}(\mathcal{E}) \smile \mathrm{td}(\mathcal{T}_X)$ (donde $\int$ denota tomar la componente de grado máximo[5]). Es decir, están involucrados unos ciertos polinomios universales (de Chern y Todd) con valores en las clases características del fibrado $\mathcal{E}$ y del fibrado tangente a la variedad, $\mathcal{T}_X$, respectivamente. Los métodos de Hirzebruch son “transcendentes”, es decir, supone que el cuerpo base es el de los números complejos y hace uso de la topología euclídea para que las clases de Chern tomen valores en los espacios de cohomología singular de X.

Esta fórmula será un caso particular de la enunciada por Grothendieck cuya demostración fue redactada por Borel y Serre [1]. En ella Grothendieck no sólo emplea métodos algebraicos sustituyendo la homología singular por los grupos de ciclos de Chow, sino que inaugura una de sus grandes aportaciones técnicas y conceptuales: el punto de vista relativo. Según éste, el objeto natural de estudio no son las variedades sino los morfismos entre ellas. Para Grothendieck, un morfismo de variedades es una aplicación racional que es regular en todos sus puntos. Las variedades aparecen como el morfismo “proyección a un punto” y un morfismo de variedades $f : X \to Y$ se puede reinterpretar como una familia de variedades algebraicas parametrizada por los puntos de Y, con X jugando el papel de espacio total. Ya de por sí esta es una aportación

[5]Se identifica con un número entero dado que $H^{2n}(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

novedosa y fructífera. Pero el trabajo contenía otra aportación que resultó fundamental también en Topología: el denominado grupo de Grothendieck, hoy conocido como "funtor K_0". La idea es que dado (el haz de secciones de) un fibrado $\mathcal{E}$, sobre una variedad X, su cohomología son espacios vectoriales, a los que podemos calcular su dimensión. La característica de Euler-Poincaré es la suma alternada de estas dimensiones. Una propiedad esencial de esta función es que es aditiva en sucesiones exactas cortas, de modo que para una tal sucesión de fibrados:

$$0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}'' \to 0$$

se tiene que:

$$\chi(X, \mathcal{E}) = \chi(X, \mathcal{E}') + \chi(X, \mathcal{E}'').$$

En el caso relativo, la cohomología de un fibrado toma valores en la categoría de haces sobre el espacio base. Si el morfismo es propio, el teorema de finitud cohomológica afirma que los haces de cohomología son coherentes. Tales haces son "resolubles" por fibrados, de modo que la característica de Euler-Poincaré de esa expresión formal tiene sentido. La idea de Grothendieck es que lo esencial son las funciones aditivas en sucesiones exactas cortas de fibrados (y de haces coherentes) y codifica esta información en un grupo que tiene sentido para cualquier categoría con una buena noción de sucesiones exactas cortas, el grupo $K^0(X)$ de clases de fibrados y $K_0(X)$ de clases de haces coherentes. Dado un morfismo propio $f : X \to Y$ entre variedades no singulares, se tiene una imagen directa (f_*) para clases de ciclos, es decir, para grupos de Chow, y otra ($f_!$) para grupos K^0. En el caso en que el morfismo es la proyección a un punto $f : X \to \{pt\}$, f_* se identifica con $\int$ y $f_!$ con la característica de Euler-Poincaré, χ. Por otra parte, se puede pasar de clases de fibrados a clases de ciclos mediante el operador de Chern, ch. Este operador no conmuta con las imágenes directas anteriores, pero esto se compensa con los productos por las clases de Todd de los fibrados tangentes. Ésta es la generalización de Grothendieck del teorema de Riemann-Roch, que se escribe[6] para un haz localmente libre $\mathcal{E}$ sobre la variedad X:

$$ch(f_!(\mathcal{E})) \cdot \mathrm{td}(\mathcal{T}_Y) = f_*(ch(\mathcal{E}) \cdot \mathrm{td}(\mathcal{T}_X))$$

y se verifica tras tensorizar por $\mathbb{Q}$ los grupos de Chow y K^0 correspondientes. Estas ideas produjeron varios desarrollos posteriores. Los topólogos emplearon el grupo K^0 para definir una nueva teoría de cohomología denominada "Teoría K", que dió lugar a las teorías de cohomología generalizadas. También se definió la versión algebraica de esta nueva teoría proporcionando grupos K^i superiores con las correspondientes versiones del teorema de Riemann-Roch.

[6]En los grupos de Chow, el producto '$\cdot$' se corresponde al producto *cup* "$\smile$" en la cohomología singular.

6. Esquemas

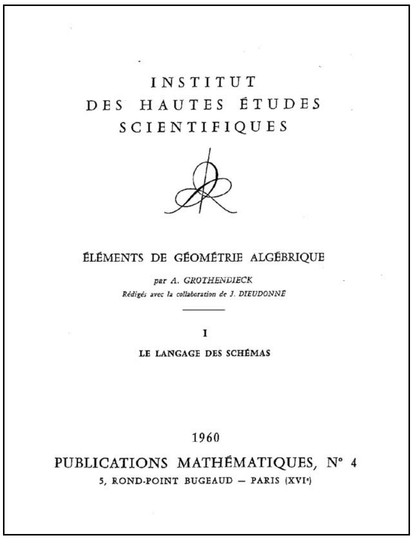
En su alocución en el Congreso Internacional de Matemáticas en Edimburgo en 1958, Grothendieck expone un vasto programa de investigación que sienta las bases de la Geometría Algebraica del resto del siglo. Una aportación fundamental es el cambio de lenguaje. No es exagerado decir que la gran mayoría de los trabajos relevantes en el campo de la Geometría Algebraica emplean de forma más o menos explícita el lenguaje de esquemas.

Una variedad algebraica (afín) está determinada por su anillo de funciones regulares. Incluso su espacio subyacente se reconstruye como el conjunto de ideales maximales. Sin embargo, muchos enunciados que se refieren a variedades son en realidad proposiciones sobre anillos conmutativos (tal vez noetherianos). Más aún, algunas propiedades que dependen de la existencia de cuerpo base son de hecho propiedades del homomorfismo de anillos asociado. De este modo, Grothendieck propone una simplificación del lenguaje de la Geometría Algebraica asociando a cada anillo conmutativo un "objeto geométrico", su esquema afín o espectro del anillo. En este caso, el espacio subyacente está formado por los ideales primos del anillo, ya que, en general, la contracción de un ideal maximal mediante un homomorfismo no tiene por qué ser un ideal maximal. Esto es ciertamente perturbador para el que ha adquirido la intuición asociada al lenguaje clásico: algunos puntos no son cerrados en el espacio, de hecho su clausura se corresponde a toda una subvariedad del espacio ambiente. Las ventajas técnicas, por contra, son innumerables. Ante todo no hay restricción del cuerpo base y el *Nullstellensatz*[7] no aparece como un elemento esencial para el desarrollo básico de la estructura. Más aún, cualquier anillo sirve como anillo de coeficientes (Nagata y Chevalley ya lo habían intentado previamente pero bajo condiciones muy restrictivas). De hecho, en este caso, el esquema se interpreta como una familia de variedades sobre el espectro del anillo, unificándose así la teoría general con el punto de vista relativo, comentado en el párrafo anterior. Además los "gérmenes de variedades" en torno a un punto se interpretan simplemente como el espectro del anillo local del esquema en el punto; son, pues, objetos tratados en pie de igualdad con los demás objetos de la teoría. La existencia de productos (fibrados) categóricos permite expresar el "cambio de base" y nociones análogas a la compacidad o la separación en espacios topológicos. Otra novedad es admitir la posibilidad de elementos nilpotentes en el haz estructural. ¿Quién pensaría que son útiles las funciones que se anulan en todos los puntos y no son la función 0? Y, sin embargo el anillo $k[\varepsilon]$, con $\varepsilon^2 = 0$ representa un vector tangente "sin espacio", ya que un punto que tome valores en este anillo conlleva el valor de la primera derivada junto con el valor de la función en el punto. Con este arsenal técnico se generalizan considerablemente muchas de las demostraciones clásicas explicando fenómenos mal comprendidos hasta entonces en característica positiva.

[7] "Teorema de los valores nulos", o como se le conoce comúnmente: "Teorema de los ceros".

Llevando al límite (literalmente) el punto de vista de los elementos nilpotentes, Grothendieck define los esquemas formales, que extienden la teoría de las funciones holomorfas (algebraicas) de Zariski y que permiten estudiar todos los posibles encajes de una variedad como cerrado de otra. Con ello, obtiene resultados de comparación entre los grupos fundamental y de Picard de una variedad y los de sus secciones hiperplanas. Recientemente han aparecido nuevas aplicaciones de los esquemas formales en la algebraización de la Geometría Analítica Ultramétrica y en el contexto de la Homotopía.

Otro punto de vista original en el trabajo de Grothendieck es el yoga de los *funtores representables*. Se trata de abordar el problema de construir un espacio a partir de sus propiedades, por ejemplo un espacio de parámetros. El problema se descompone en dos partes. La primera (fácil) es mostrar que el problema define un funtor (contravariante) de la categoría de esquemas sobre el esquema base a conjuntos. Con el enfoque de Grothendieck es posible estudiar ya las propiedades *geométricas* de este funtor. La segunda y más difícil es decidir si este funtor proviene de un esquema. Esta técnica ha permitido la construcción precisa y algebraica (es decir, sin restricción de la característica del cuerpo base) de los espacios de *moduli* (soñados ya por Riemann y estudiados con grandes dificultades técnicas por Severi) que parametrizan las curvas de un género dado[8]. También ha contribuido a la comprensión rigurosa de las variedades Jacobianas de curvas en cuerpos de cualquier característica zanjando las controversias derivadas de la extensión de ciertos resultados de característica cero a característica positiva. En general, este enfoque ha sido muy fructífero para la construcción de espacios de parámetros de uso muy frecuente en problemas enumerativos.


INSTITUT
DES HAUTES ÉTUDES
SCIENTIFIQUES

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE
par A. GROTHENDIECK
Rédigés avec la collaboration de J. DIEUDONNÉ

I
LE LANGAGE DES SCHÉMAS

1960
PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES, N° 4
5, ROND-POINT BUGEAUD — PARIS (XVIe)

Portada de los *Eléments*

La teoría de esquemas fue expuesta en un tratado redactado por Dieudonné, titulado *Eléments de Géométrie Algébrique*. Estaba proyectado para 12 capítulos, pero sólo aparecieron los cuatro primeros [8, 9] debido a la monumentalidad de la obra y las circunstancias. Posteriormente, Grothendieck se ha referido a este aspecto de su obra como las “tareas interminables”.

[8]De hecho, sólo es posible construir esquemas que aproximen los funtores de *moduli*. Los “verdaderos” espacios de *moduli* requieren otra extensión del lenguaje generalizando los esquemas a las llamadas *pilas* algebraicas (en francés *champs*, en inglés *stacks*).

7. Topos

Los *topos* son la contribución de Grothendieck a los fundamentos de la Topología. El concepto de espacio topológico posee ciertas limitaciones, por ejemplo, no permite definir una teoría de "coeficientes discretos" sobre un esquema (ver siguiente párrafo) y, por otro lado, permite ejemplos con propiedades poco deseables. La idea de topos parte del hecho de que la cohomología de los espacios interesantes se puede expresar en términos de haces. Un topos es una categoría con las propiedades formales de una categoría de haces. La forma usual de comprender un topos es como la categoría de haces sobre ciertas categorías estructuradas denominadas *sitios.* Un sitio es una categoría que verifica las propiedades análogas a las que verifica la categoría de los abiertos de un espacio topológico junto con las inclusiones, de modo que sea posible realizar construcciones a la Čech, pero sin que los morfismos tengan por qué ser inclusiones. Esta noción es la que permite construir las cohomologías *étale* y cristalina de esquemas. Grothendieck pensaba que esta filosofía supondría un vuelco en los métodos básicos de la Topología, pero ese vuelco no se ha producido, a pesar de que es claro que podría servir para explicar estructuras exóticas como los espacios de hojas de las foliaciones. Lo que sí se produjo fue una pequeña ampliación de la noción de topos a la de "topos elemental". Esta noción generalizada de topos es un modelo de categoría similar a la de conjuntos. En estos topos elementales se producen fenómenos muy peculiares como que pueden regir lógicas no clásicas (intuicionista, borrosa ...), no cumplirse ciertos axiomas de conjuntos (como el axioma de elección) o ser diferentes los números reales de Cantor y de Dedekind. Esto sí ha promovido toda una nueva línea de investigación en Teoría de Modelos no presentida por Grothendieck.

8. Cohomología étale

Como hemos dicho antes, la introducción de una teoría de cohomología en variedades sobre cuerpos de característica positiva análoga a la cohomología singular de las variedades topológicas no es algo evidente a simple vista. La topología de Zariski es extremadamente gruesa para que los símplices singulares produzcan algo de interés. Sin embargo, para una variedad compleja, el teorema de existencia de Riemann garantiza que los revestimientos topológicos finitos poseen estructura de variedad algebraica. Por tanto, si G es un grupo conmutativo finito podemos recuperar algebraicamente el grupo $H_1(V, G)$ de una variedad algebraica V caracterizando qué variedades algebraicas X junto con un morfismo $X \to V$ corresponden a revestimientos con grupo de automorfismos G. Estos morfismos son los que cumplen las condiciones algebraicas análogas a las hipótesis del teorema de la función inversa y se denominan morfismos *étales.* La definición de Grothendieck se basa en ideas de Serre.

En concreto, se construye un topos en el que los "abiertos" del sitio son los revestimientos *étales.* La cohomología de este topos es la cohomología *étale* y, para variedades definidas sobre el cuerpo de los complejos, recupera la cohomología singular conmutativa con coeficientes finitos. Sin embargo, la principal

Grothendieck durante una sesión de su seminario de Geometría Algebraica

aplicación de esta cohomología es el cómputo de los números de Betti. Para un primo ℓ diferente de la característica del cuerpo base de la variedad, empleando la topología étale[9], se definen módulos $H^i_{\text{ét}}(V, \mathbb{Z}_\ell)$ sobre el anillo de enteros ℓ-ádicos $\mathbb{Z}_\ell$, y, tensorizando por su cuerpo de fracciones $\mathbb{Q}_\ell$, espacios vectoriales $H^i_{\text{ét}}(V, \mathbb{Q}_\ell)$ cuya dimensión es el i-ésimo número de Betti ℓ-ádico de la variedad V. Con esta construcción se tienen los ingredientes necesarios para probar tres de las cuatro conjeturas de Weil sobre el número de puntos de una variedad algebraica sobre un cuerpo finito. Faltaba comprobar el análogo de la hipótesis de Riemann para la función Zeta de una curva sobre un cuerpo finito. Esta conjetura fue resuelta afirmativamente por Deligne en 1974 [2] aplicando resultados de formas modulares y las propiedades de monodromía de la cohomología étale estudiados en el seminario de Grothendieck [10, 11] de 1967–69.

9. Motivos

A finales de los 60, Grothendieck enuncia las famosas conjeturas estándar (estudiadas también independientemente por Bombieri). La primera predice la existencia del correspondiente algebraico del operador de Hodge Λ cuasi-inverso del operador de Lefschetz L (multiplicar por la clase de una sección hiperplana). La segunda predice la validez en característica positiva del teorema de Hodge que enuncia la positividad de la paridad definida por la intersección de ciclos. Las conjeturas son ciertas para curvas, superficies y variedades abelianas (entre otros casos) pero están abiertas en general. La conjetura de Weil-Riemann se deduce inmediatamente de ellas, aunque este hecho carezca de importancia dado que se tiene la prueba de Deligne. Por otro lado, las conjeturas estándar tienen una consecuencia fundamental, la existencia de una teoría de cohomología universal para variedades algebraicas. Esta teoría explicaría la coincidencia de las propiedades de las múltiples cohomologías

[9] El anillo $\mathbb{Z}_\ell$ se puede expresar como el límite inverso de los anillos $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$. La cohomología no conmuta con límite inverso, y se define:

$$H^i_{\text{ét}}(V, \mathbb{Z}_\ell) := \varprojlim H^i_{\text{ét}}(V, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}),$$

en donde sólo aparecen grupos de cohomología con coeficientes grupos finitos.

disponibles. Sobre estos temas Grothendieck nunca publicó una línea. En un principio, los trabajos de Demazure, Kleiman y Manin sirvieron para exponer la primera construcción conjetural de la categoría de motivos de variedades proyectivas lisas, que de ser ciertas las conjeturas estándar sería una categoría abeliana semi-simple. Un motivo, es en pocas palabras, un "sumando directo" de la información cohomológica que posee una variedad proyectiva lisa. Esta formulación expresa la idea de intentar extraer la información cohomológica esencial (un dato que pertenece a una categoría abeliana) de una variedad, un objeto perteneciente a una categoría esencialmente "no-abeliana", de hecho, con propiedades más similares a las de la categoría de espacios topológicos que a las de la de módulos sobre un anillo.

Los escasos progresos sobre las conjeturas estándar provocarían que la teoría de motivos durmiese durante muchos años. Sin embargo, las aplicaciones potenciales a problemas de Teoría de Números las han puesto en el centro de la Geometría Algebraica actual. Citemos un reciente congreso denominado "Motivos" en Seattle, 1991 cuyas actas ocupan casi 1500 páginas. Entre los desarrollos siguientes debemos citar los motivos mixtos que permiten abarcar las variedades no necesariamente lisas ni proyectivas. Esta construcción esta basada en la filosofía de los pesos desarrollada por Deligne a partir de ideas de Serre y Grothendieck. Mediante estas ideas se obtiene una relación entre los ciclos algebraicos, la Teoría K Algebraica y los valores de las funciones L de Teoría de Números. Todo ello ha producido una auténtica galaxia de conjeturas entre las que podemos señalar las de Beilinson, Murre y Lichtenbaum, además de las clásicas de Tate, Bloch–Kato, Birch–Swinnerton-Dyer. Otra vertiente del yoga motívico son los grupos de Galois motívicos que permiten recuperar la categoría de motivos como la categoría de representaciones de un grupo algebraico mediante la dualidad de Tannaka–Grothendieck.

10. Cristales

Según la visión de Grothendieck, la cohomología tiene dos aspectos, el discreto y el continuo. Los coeficientes continuos son los haces coherentes sobre las variedades algebraicas y analíticas. Esta teoría era considerada por Grothendieck como esencialmente completa a principios de los años 60 (aunque posteriormente se han obtenido avances). Por otro lado están los coeficientes discretos que se corresponden a haces localmente constructibles de módulos sobre un anillo fijo (frecuentemente $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ó $\mathbb{C}$). La tesis de Verdier dejó la cuestión encarrilada para las variedades analíticas. La cohomología *étale* aborda el problema en el caso de las variedades algebraicas. La única dificultad reside en que la cohomología ℓ-ádica sólo tiene las propiedades apropiadas en el caso en que el primo ℓ no coincida con la característica del cuerpo base, p, lo que deja sin posibilidad de estudio la torsión cohomológica p-ádica. Por esta razón Grothendieck inventa la cohomología cristalina, que posteriormente desarrollará Berthelot en su tesis y en trabajos posteriores. La idea del sitio cristalino es forzar la validez del lema de Poincaré, de modo que se pueda integrar formalmente. En todo caso, quedaba abierta la cuestión de la comparación entre la teoría discreta y la continua. La intuición de Grothendieck era que la conexión debía venir dada por los complejos de operadores diferenciales. Él mismo obtuvo un primer resultado fundamental: el teorema de comparación [12] que enuncia que la cohomología singular con coeficientes en $\mathbb{C}$ se puede recuperar algebraicamente mediante la hipercohomología del complejo de De Rham algebraico. Este es un resultado que liga los coeficientes continuos, ya que los haces de formas diferenciales son coherentes, y los discretos, ya que estamos calculando la cohomología singular. Precisamente la cohomología cristalina surge como un intento de trasponer estas construcciones al caso de caraterística positiva. Relacionados con estas ideas se encuentran los trabajos de Mebkhout de dualidad para $\mathcal{D}$-módulos sobre variedades analíticas complejas. Por estos trabajos, Grothendieck ha considerado a Mebkhout un discípulo "póstumo", por haber completado su programa de comparación de ambos tipos de coeficientes cohomológicos. Una extensión adecuada de la teoría de los $\mathcal{D}$-módulos a característica positiva serviría para extender las seis operaciones de Grothendieck al contexto cristalino. Varios grupos de matemáticos trabajan actualmente en esa línea.

Grothendieck en los 70

11. Sueños matemáticos

En su período de retiro activo en Montpellier, Grothendieck concibió más teorías matemáticas. Nunca pretendió desarrollarlas en detalle, sino que son más bien sueños especulativos sobre ciertos temas que le llamaban la atención. Podría pensarse que sus ideas eran meros desvaríos de una mente relativamente aislada, pero no es el caso. Cada idea especulativa suya ha abierto un campo muy fértil de investigación que ha producido gran cantidad de actividad. Sin entrar en detalle, haremos un breve resumen de cada una de estas ideas.

La primera es el Álgebra Topológica. Parte de la observación hecha en una larga carta a Quillen de que lo análogo en Homotopía al concepto de complejo serían los ∞-grupoides laxos, versión haces, es decir, las ∞-pilas. La pretensión es obtener una versión muy general de la cohomología no abeliana y un método para obtener modelos combinatorios de los tipos de homotopía. Hoy en día hay propuestas varias definiciones alternativas de ∞-categorías laxas (cuyas relaciones precisas son en este momento un problema abierto) y se están obteniendo aplicaciones de las n-pilas a la cohomología. Es sorprendente que parte del interés en estos conceptos se debe a las posibles aplicaciones a la Física.

La segunda es la Topología moderada. La pretensión es obtener un modelo de topología estable por operaciones naturales como contracción, recolección, espacio de funciones (inspirado en los métodos que introdujo en esquemas). Tenía en mente, posiblemente, como modelos los espacios semi-algebraicos, subanalíticos o similares, pero el énfasis era fundacional. Ha habido cierta actividad en el campo de la Geometría Algebraica Real conectada con estas ideas.

Otro tema es la Geometría Algebraica Anabeliana: dar una teoría que diga cuándo y cómo puede reconstruirse una variedad algebraica a partir de su grupo fundamental, el caso de interés aparece cuando éste no es conmutativo. Un aspecto clave es el estudio de la acción del grupo de Galois absoluto del cuerpo base de la variedad sobre su grupo fundamental. Ya se han obtenido resultados parciales que refrendan la intuición de Grothendieck. En conexión con este tema, Grothendieck propuso la teoría de Galois-Teichmüller. Se trata de relacionar el grupo de Galois absoluto del cuerpo de los racionales, $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$, con el grupo de automorfismos de la torre de Teichmüller, formada por las pilas de *moduli* de las curvas de genero g con n puntos marcados $\mathcal{M}_{g,n}$ que respetan sus morfismos de estructura naturales. Drinfel'd, por su parte, ha construido de forma explícita un tercer grupo $\widehat{GT}$, que conjeturalmente debe coincidir con los anteriores, del que ya se sabe que se sitúa en medio de ambos. La actividad en el estudio de la comparación de los tres grupos es muy intensa.

Finalmente, propuso un tema del que no tenemos indicios completos: El punto de vista esquemático o aritmético para los poliedros regulares. De este aspecto han salido a la superficie los "dibujos de niños"[10]. En pocas palabras, se trata de recuperar una curva definida sobre un cuerpo de números a partir de ciertos grafos dibujados sobre superficies de Riemann y a partir de éste estudiar las propiedades de la curva. Su intuición fue confirmada por un teorema de Belyĭ que dice que una superficie de Riemann X procede de una curva algebraica sobre un cuerpo de números precisamente cuando X posee una función meromorfa no constante ramificada a lo sumo sobre tres puntos. Sobre este tema nos encontramos ya con más de 40 referencias en la literatura.

La actividad matemática producida por estas reflexiones de Grothendieck se debe a la circulación restringida de [13], publicado más tarde de modo "oficial". En Montpellier, J. Magloire se ha propuesto mecanografiar y hacer públicos los manuscritos inéditos de Grothendieck, de los que es depositario. Hay otras iniciativas para poner su obra, tanto la publicada como la oculta, a disposición de la comunidad matemática pero la escasez de medios nos hace pensar que la tarea puede prolongarse bastante en el tiempo. Si alguna institución internacional apoyase esta iniciativa y en ella se vieran involucrados una gran cantidad de colaboradores, este período podría acortarse bastante.

[10] En la terminología de Grothendieck: *dessins d'enfants*.

12. Conclusión

La figura de Grothendieck ha influenciado el panorama matemático y lo seguirá haciendo durante mucho tiempo. Tanto sus teorías como sus actitudes, difícilmente pueden dejarnos indiferentes. Ha puesto en el centro del debate temas cruciales, como la importancia de las teorías generales frente a los resultados concretos, si estamos tratando a las jóvenes generaciones de matemáticos con el respeto debido o la cooperación o no que debe tener la ciencia con los aparatos militares.

Sus contribuciones al conocimiento se cuentan por líneas de trabajo abiertas. Sus ideas han dejado una huella indeleble en muchos campos de la Matemática y nos ha hecho volver a pensar en la profunda unidad de campos que tendemos a considerar dispares como el Álgebra, el Análisis, la Geometría o la Topología.

Referencias

[1] Borel, A.; Serre, J.-P.: Le théorème de Riemann-Roch. *Bull. Soc. Math. France* **86** 1958, 97–136.

[2] Deligne, P.: La conjecture de Weil. I. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **43** (1974), 273–307.

[3] Grothendieck, A.: *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* Mem. Amer. Math. Soc. **16** (1955).

[4] Grothendieck, A.: Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dérivées partielles. *J. Analyse Math.* **2**, (1953), 243–280.

[5] Grothendieck, A.: Théorèmes de finitude pour la cohomologie des faisceaux. *Bull. Soc. Math. France* **84** (1956), 1–7.

[6] Grothendieck, A.: Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann. *Amer. J. Math.* **79** (1957), 121–138.

[7] Grothendieck, A.: Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tôhoku Math. J.* (2) **9**, (1957), 119–221.

[8] Grothendieck, A.; Dieudonné J. A.: *Eléments de Géométrie Algébrique I*, Grundlehren der math. Wiss. **166**, Springer–Verlag, Heidelberg, 1971.

[9] Grothendieck, A.; Dieudonné J. A.: *Eléments de Géométrie Algébrique*, II: *Publications Mathématiques* **8**, París, 1961. III: *Pub. Math.* **11**, 1961; *Pub. Math.* **17**, 1963. IV: *Pub. Math.* **20**, 1964; *Pub. Math.* **24**, 1965; *Pub. Math.* **28**, 1966; *Pub. Math.* **32**, 1967.

[10] ARTIN M.; GROTHENDIECK, A.; VERDIER, J. L.: *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4).* Tome 1: Lecture Notes in Mathematics **269**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972. Tome 2: Lec. N. in Math. **270**, 1972. Tome 3: Lec. N. in Math. **305**, 1973.

[11] GROTHENDIECK, A.: *Groupes de monodromie en géométrie algébrique. I. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967–1969 (SGA 7 I).* Lecture Notes in Mathematics, **288**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[12] GROTHENDIECK, A.: On the de Rham cohomology of algebraic varieties. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **29**, (1966), 95–103.

[13] GROTHENDIECK, A.: *Esquisse d'un programme.* (Traducción al inglés en las pp. 243–283.) London Math. Soc. Lecture Note Ser. **242**, *Geometric Galois actions*, 1, 5–48, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[14] HARSTSHORNE, R.: *Residues and duality.* Lecture Notes in Mathematics **20**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1966.

[15] HIRZEBRUCH, F.: *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Heft **9**. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1956.

[16] SERRE, J.-P.: Faisceaux algébriques cohérents. *Ann. of Math.* (2) **61**, (1955), 197–278.

[17] SERRE, J.-P.: Rapport au comité Fields sur les travaux de A. Grothendieck. *K-Theory* **3**, (1989), no. 3, 199–204.

Leovigildo Alonso Tarrío y Ana Jeremías López
Departamento de Álxebra
Facultade de Matemáticas
Universidade de Santiago de Compostela
E-15782 Santiago de Compostela
correo electrónico: `leoalonso@usc.es, jeremias@usc.es`